https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/investigium/issue/archive

Boletín Científico INVESTIGIUM de la Escuela Superior de Tizayuca

InvESTigium

Publicación semestral, Vol. 11, No. 21 (2025) 68-76

ISSN: 2448-4830

El uso de GeoGebra en la enseñanza de la física de sistemas caóticos y fractales

The use of GeoGebra in teaching the physics of chaotic and fractal systems

Cliffor J. Herrera Castrillo [a]

Abstract:

The incorporation of GeoGebra in teaching the physics of chaotic and fractal systems has shown promising results. Students have gained a better understanding of complex concepts, thanks to the interactive visualization and hands-on experimentation offered by the tool. Teachers have observed an increased level of student participation and engagement, as GeoGebra allows them to explore and discover patterns and behaviors of chaotic and fractal systems in real time. In addition, a development of analytical and modeling skills has been observed, as well as an increased ability to understand and graphically represent fractals at different scales. Overall, the results obtained support the effectiveness of GeoGebra as a valuable tool for improving the teaching and learning of the physics of chaotic and fractal systems, stimulating reflection and application of these concepts in various fields.

Keywords:

GeoGebra, teaching, physics, chaotic systems, fractals.

Resumen:

La incorporación de GeoGebra en la enseñanza de la física de sistemas caóticos y fractales ha demostrado resultados prometedores. Los estudiantes han logrado una mejor comprensión de conceptos complejos, gracias a la visualización interactiva y la experimentación práctica que ofrece la herramienta. Los docentes han observado un mayor nivel de participación y compromiso por parte de los estudiantes, ya que GeoGebra les permite explorar y descubrir patrones y comportamientos de sistemas caóticos y fractales en tiempo real. Además, se ha observado un desarrollo de habilidades analíticas y de modelado, así como una mayor capacidad para comprender y representar gráficamente fractales en diferentes escalas. En general, los resultados obtenidos respaldan la eficacia de GeoGebra como una herramienta valiosa para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la física de sistemas caóticos y fractales, estimulando la reflexión y la aplicación de estos conceptos en diversos campos.

***Palabras Clave**:*

GeoGebra, enseñanza, física, sistemas caóticos, fractales.

Introducción

La enseñanza de la física de sistemas caóticos y fractales ha experimentado un avance significativo con la incorporación de GeoGebra como herramienta educativa. En este ensayo, se examinará el impacto positivo que ha tenido el uso de GeoGebra en el aprendizaje de estos complejos conceptos, así como los beneficios observados tanto para los estudiantes como para los docentes.
desde un punto de vista matemático, Fernández Rosales (2009) define a un sistema dinámico de la siguiente forma:

“Un sistema dinámico es un conjunto de elementos que interactúan entre sí, donde la evolución de sus estados es dada por funciones que dependen del tiempo t, tal que $t \in T$.

Los sistemas dinámicos son conceptos matemáticos que describen un comportamiento generalmente físico con un sistema de ecuaciones diferenciales, y a su vez entregan información sobre los puntos singulares de tal sistema.”

Un ejemplo de estos sistemas dinámicos, aplicados a la física, es el mostrado por Alligood et al. (1997) , en el cual se pregunta acerca de los cambios de temperatura de un objeto caliente en una habitación fría pueden modelarse como un mapa unidimensional. Si la diferencia de

[a] Autor de Correspondencia, Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua | Centro Universitario Regional Estelí | Estelí-Estelí | Nicaragua, https://orcid.org/0000-0002-7663-2499, Email: cliffor.herrera@unan.edu.ni

Fecha de recepción: 27/12/2024, Fecha de aceptación: 13/02/2025, Fecha de publicación: 05/07/2025

DOI: https://doi.org/10.29057/est.v11i21.14410

temperatura inicial entre el objeto y la habitación es $D(0)$ la diferencia de temperatura $D(t)$ después de t minutos.

$D(t) = D(0)e^{-Kt}$.

Donde $K > 0$ y depende del calor específico del objeto.

A partir de la idea de sistemas dinámicos, surgen los sistemas caóticos, el cual varían con respecto de cada autor porque el concepto de caos difiere de acuerdo con que cada autor, como, por ejemplo, están los caos en sentido de Devaney o el caos en sentido de Li y Yorke.

Abordar el modelo a través de las TIC en el aula de matemática, constituye una propuesta innovadora en varios aspectos: el modelo discreto permite realizar una introducción al caos y la teoría fractal; la incorporación de esta temática forma parte de un proceso de transformación en los ambientes de aprendizajes; y los estudiantes, a partir de herramientas matemáticas conocidas y las TIC, pueden explorar y validar algunas características de los sistemas dinámicos discretos y del comportamiento caótico. (Martínez et al., 2015, p. 1)

Uno de los aspectos más destacados de GeoGebra es su capacidad para ofrecer una visualización interactiva y una experimentación práctica. Los estudiantes han logrado una comprensión más profunda de los conceptos complejos relacionados con sistemas caóticos y fractales al interactuar directamente con la herramienta. La visualización en tiempo real de los patrones y comportamientos caóticos y fractales les permite explorar y descubrir de manera intuitiva las propiedades de estos sistemas.

Para Torres Ampuero y Quispe Aparicio, (2020) el uso de GeoGebra como estrategia de aprendizaje en la enseñanza de la geometría permite a los estudiantes ir más allá de las definiciones teóricas y explorar de manera práctica y visual los conceptos geométricos. La construcción de figuras fractales en GeoGebra les brinda una comprensión más profunda de los elementos geométricos y estimula su curiosidad y participación en el proceso educativo. Esta metodología promueve un enfoque más activo y exploratorio en el aprendizaje de la geometría, preparando a los estudiantes para comprender y aplicar estos conceptos en diferentes contextos.

Además, se ha observado un aumento significativo en la participación y el compromiso de los estudiantes durante las clases que utilizan GeoGebra. La posibilidad de experimentar y manipular los sistemas caóticos y fractales de manera activa e independiente ha estimulado su curiosidad y ha fomentado su involucramiento en el proceso de aprendizaje. Los estudiantes se sienten motivados al tener la oportunidad de explorar y descubrir por sí mismos las características y regularidades de estos sistemas complejos.

Asimismo, el uso de GeoGebra ha demostrado promover el desarrollo de habilidades analíticas y de modelado en los estudiantes. La interacción con la herramienta les brinda la oportunidad de realizar análisis detallados y de experimentar con diferentes configuraciones de sistemas caóticos y fractales. Esta práctica fortalece su capacidad para formular hipótesis, realizar predicciones y evaluar los resultados obtenidos, fomentando así una mentalidad científica y crítica.

Otro aspecto relevante de la utilización de GeoGebra es su capacidad para comprender y representar gráficamente fractales en diferentes escalas. Los estudiantes adquieren habilidades para identificar patrones y estructuras fractales en diversos contextos, lo que les permite comprender mejor la naturaleza fractal de muchos fenómenos presentes en la física y en otros campos de estudio. Esta competencia les proporciona una base sólida para comprender y aplicar conceptos fractales en áreas tan diversas como la biología, la economía y la geografía.

Las diferentes ciencias han proporcionado herramientas muy útiles para el conocimiento humano tales como la observación, el cuestionamiento y la reflexión, entre otras, intentando explicar cada detalle del universo y del entorno que nos rodea y nos muestra, por mínimas que sean, las señales asombrosas sobre la manera en que la naturaleza actúa, se desarrollan y se establecen. Entre estas ciencias está la geometría euclidiana que procede, con mucha lógica, de axiomas que describen propiedades básicas de objetos geométricos, luego aparece la geometría introducida por Descartes casi 2000 años después, que usa coordenadas para expresar propiedades geométricas como fórmulas algebraicas estableciendo una relación entre el álgebra y la geometría. (Bendaña, 2023, p. 12)

La física, como una de las disciplinas científicas, también ha contribuido significativamente al conocimiento humano sobre el universo y nuestro entorno. Al igual que otras ciencias, la física se basa en la observación, el cuestionamiento y la reflexión para comprender cómo funciona la naturaleza y cómo se desarrolla.

Una de las principales problemáticas que se presentan durante el desarrollo de contenidos de Física es la carencia de materiales, sobre todo de prácticas y documentos mediados que faciliten el aprendizaje, ya que es típico en la cultura actual de los estudiantes omitir el uso de libros de texto y recurrir como primera instancia al internet, lo que trae como problemática garantizar que la selección de información sea confiable. (Herrera Arróliga y Herrera Castrillo, 2023, p. 87)

En relación con la geometría, la física ha establecido una conexión profunda entre la geometría euclidiana y los principios físicos. La geometría euclidiana, basada en

axiomas que describen propiedades básicas de objetos geométricos, ha sido fundamental en la formulación de leyes físicas y la descripción de fenómenos naturales.
Sin embargo, la introducción de la geometría por Descartes, que utiliza coordenadas para expresar propiedades geométricas mediante fórmulas algebraicas, ha ampliado aún más la relación entre el álgebra y la geometría, y ha tenido un impacto significativo en la física. Esta conexión entre el álgebra y la geometría ha permitido a los físicos describir y comprender fenómenos físicos en términos matemáticos, lo que ha llevado al desarrollo de modelos y teorías físicas más avanzadas.
En este contexto, el uso de herramientas como GeoGebra en la enseñanza de la física también puede enriquecer la comprensión de los conceptos físicos a través de la geometría. GeoGebra, al combinar visualización interactiva y herramientas matemáticas, permite a los estudiantes explorar y experimentar con modelos físicos y sus representaciones geométricas. Esto les brinda una comprensión más intuitiva y visual de los principios físicos y les ayuda a establecer conexiones entre la geometría y la física.
Además, GeoGebra también puede ser utilizado para modelar sistemas físicos complejos, como sistemas caóticos y fractales. Estos sistemas a menudo tienen una naturaleza geométrica intrincada y pueden ser difíciles de comprender y representar únicamente a través de descripciones matemáticas. El uso de GeoGebra permite a los estudiantes explorar y visualizar los patrones y comportamientos de estos sistemas, lo que facilita una comprensión más profunda de los fenómenos físicos involucrados. “El uso de recursos tecnológicos, en asignaturas de física, despierta el interés de los estudiantes por las clases de física, además de que los dota de más habilidades y destrezas computacionales” (Herrera Castrillo, 2020, p. 22)

Desarrollo

1. Características de los fractales

Los fractales son estructuras geométricas que poseen características únicas, lo que los distingue de las figuras geométricas tradicionales. Una de sus principales propiedades es la autosimilitud, que significa que un fractal mantiene el mismo patrón en diferentes escalas. Esto implica que si se observa un fragmento de la figura a cualquier nivel de magnificación, la estructura se repetirá de manera similar (García Pinilla, 2021). Este principio es evidente en la naturaleza, donde patrones fractales pueden encontrarse en ramas de árboles, ríos, pulmones humanos y costas.

Otra característica fundamental de los fractales es su dimensión fraccionaria, que difiere de la dimensión entera de los objetos geométricos convencionales. En la geometría euclidiana, una línea tiene una dimensión de 1, una superficie tiene dimensión 2 y un volumen, dimensión 3. Sin embargo, los fractales pueden tener dimensiones no enteras, como 1.5 o 2.7, lo que refleja su complejidad y la manera en que ocupan el espacio. Un ejemplo representativo es el conjunto de Cantor, que se construye eliminando iterativamente segmentos de una línea, dando lugar a una estructura cuya dimensión se encuentra entre 0 y 1 (Artigue et al., 2021).

Además, los fractales suelen formarse mediante iteración y recursión, es decir, a través de la repetición de un proceso matemático sobre sí mismo. Este procedimiento es el que genera su apariencia detallada e infinita. Un claro ejemplo es el triángulo de Sierpiński, que se obtiene dividiendo un triángulo en cuatro partes y eliminando el triángulo central, repitiendo este proceso de manera indefinida (Martínez et al., 2015). Este método permite que, con reglas simples, se obtengan estructuras increíblemente complejas.

Otra característica esencial es la complejidad infinita, lo que significa que los fractales contienen detalles sin importar cuán cerca se observe. A diferencia de las figuras geométricas tradicionales, que tienen una resolución finita, un fractal puede revelar nuevas estructuras a medida que se amplía la imagen (Artigue et al., 2021). Esto los convierte en herramientas poderosas en diversas disciplinas científicas, incluyendo la física, la biología y la economía.

Finalmente, los fractales se encuentran presentes en múltiples sistemas naturales y artificiales, debido a su capacidad de modelar estructuras caóticas y patrones irregulares. En la naturaleza, pueden observarse en la forma de las nubes, la estructura de los relámpagos y la distribución de galaxias en el universo. En la informática, los fractales son utilizados en la generación de gráficos realistas, en la compresión de imágenes y en la simulación de fenómenos físicos complejos.

Estas características hacen que los fractales sean un objeto de estudio fascinante tanto en matemáticas como en otras ciencias. Su presencia en la naturaleza y su capacidad de describir el caos y la complejidad los convierten en herramientas esenciales en la modelización de sistemas dinámicos y en la enseñanza de conceptos avanzados de geometría y física.

1.1. Pasos para Crear el Triángulo de Sierpiński en GeoGebra

Este fractal es uno de los más conocidos y se obtiene dividiendo un triángulo en subtriángulos más pequeños y eliminando el central en cada iteración.

- Abrir GeoGebra
- Abra GeoGebra Clásico o utilice la versión en línea en GeoGebra .
- Definir los puntos del triángulo inicial
- En la barra de entrada, introduzca tres puntos para formar un triángulo equilátero:

A = (0, 0)
B = (2, 0)
C = (1, sqrt(3))

- Definir una función recursiva para dibujar el fractal
- Utilice la herramienta de entrada de comandos para definir una función que dibuje el Triángulo de Sierpiński de manera recursiva.
- Copia y pega el siguiente código en la barra de entrada de GeoGebra:

```
Sierpinski(A, B, C, n) :=
If(n > 0,
  (Mid1 = (A + B) / 2,
   Mid2 = (B + C) / 2,
   Mid3 = (C + A) / 2,
   Polygon(A, Mid1, Mid3),
   Polygon(Mid1, B, Mid2),
   Polygon(Mid3, Mid2, C),
   Sierpinski(A, Mid1, Mid3, n - 1),
   Sierpinski(Mid1, B, Mid2, n - 1),
   Sierpinski(Mid3, Mid2, C, n - 1)
  )
)
```

- Ejecutar la función
- En la barra de entrada, llama a la función con un nivel de profundidad deseado (por ejemplo, 4 niveles):

Sierpinski(A, B, C, 4)

2. Impacto en el aprendizaje de los estudiantes mediante GeoGebra

Para Bravo Rodríguez, (2022) el impacto en el aprendizaje de los estudiantes mediante el uso de GeoGebra es notable y beneficioso en varios aspectos. GeoGebra, como una herramienta interactiva y visualmente atractiva, proporciona a los estudiantes una experiencia de aprendizaje más dinámica y participativa, lo cual tiene un efecto positivo en su comprensión y retención de los conceptos.

En primer lugar, GeoGebra permite a los estudiantes explorar y experimentar con conceptos matemáticos y científicos de manera práctica. Pueden interactuar con gráficos, modelos y representaciones visuales en tiempo real, lo que les brinda una comprensión más intuitiva y profunda de los conceptos abstractos. Al manipular objetos y observar cómo cambian en respuesta a las modificaciones realizadas, los estudiantes pueden visualizar y comprender mejor las relaciones y propiedades matemáticas y científicas.

Además, GeoGebra fomenta el pensamiento crítico y el razonamiento lógico. Los estudiantes pueden plantear preguntas, realizar investigaciones y realizar experimentos virtuales utilizando GeoGebra. Esto les ayuda a desarrollar habilidades analíticas y de resolución de problemas, ya que deben identificar patrones, hacer predicciones y justificar sus conclusiones utilizando datos y evidencias visuales. A través de este proceso, los estudiantes adquieren una comprensión más profunda de los conceptos y desarrollan habilidades de pensamiento crítico que son transferibles a otras áreas de estudio.

Otro impacto significativo del uso de GeoGebra es el aumento en la motivación y el compromiso de los estudiantes. Al utilizar una herramienta interactiva y visualmente atractiva, los estudiantes se sienten más involucrados en el aprendizaje. La capacidad de manipular objetos y explorar conceptos de manera activa y personalizada genera un mayor interés y entusiasmo por la asignatura. Esto a su vez promueve un ambiente de aprendizaje más interactivo y colaborativo, donde los estudiantes se sienten más cómodos compartiendo ideas y trabajando en equipo.

Los procesos de aprendizaje son más eficientes cuando integramos herramientas informáticas que facilitan el análisis matemático a través de procesos visuales, garantizando la conexión del aprendizaje adquirido con la aportación de soluciones matemáticas a los problemas de la sociedad. Este aspecto marca la diferencia con la forma tradicional de enseñar matemáticas, que se basa en la resolución de un determinado número de ejercicios, que se rigen por procesos matemáticos repetitivos ya definidos y descontextualizados de los problemas reales de la sociedad. (Sánchez-Balarezo y Borja-Andrade, 2022, p. 44)

Además, el uso de GeoGebra también fomenta el aprendizaje autónomo y la autorreflexión. Los estudiantes pueden utilizar la herramienta fuera del aula para revisar y practicar los conceptos aprendidos, explorar nuevas ideas y realizar investigaciones independientes. Esto les permite desarrollar su propia comprensión y aumentar su confianza en sus habilidades matemáticas y científicas.

3. Desarrollo de habilidades analíticas y de modelado

En primer lugar, GeoGebra proporciona a los estudiantes una plataforma para analizar y estudiar los sistemas caóticos y fractales de manera más precisa y detallada. Los estudiantes pueden utilizar herramientas de GeoGebra para explorar gráficamente los patrones y comportamientos complejos de estos sistemas. Pueden observar cómo pequeños cambios en las condiciones iniciales o en los parámetros pueden generar resultados drásticamente diferentes, lo que es una característica fundamental de los sistemas caóticos. Esto fomenta el pensamiento analítico al requerir que los estudiantes analicen y comprendan las relaciones entre las variables y los resultados observados.

Además, GeoGebra permite a los estudiantes modelar y simular sistemas caóticos y fractales. Pueden construir visualmente ecuaciones y relaciones matemáticas que describan estos sistemas y luego utilizar GeoGebra para generar representaciones gráficas de los modelos. Al experimentar con diferentes valores y parámetros, los estudiantes pueden observar cómo los cambios en las ecuaciones se traducen en cambios en los patrones y formas fractales generados. Este enfoque de modelado ayuda a los estudiantes a desarrollar habilidades fundamentales de modelado científico, como la formulación de hipótesis, la recolección de datos y la validación de los modelos.

Otra habilidad analítica que se desarrolla mediante el uso de GeoGebra en el estudio de sistemas caóticos y fractales es la capacidad de identificar y analizar patrones. Los estudiantes pueden explorar visualmente los patrones repetitivos y autosemejantes presentes en los fractales, lo que les permite comprender mejor las propiedades geométricas y topológicas de estos objetos. Además, al estudiar los sistemas caóticos, los estudiantes pueden analizar los patrones complejos y aparentemente aleatorios que emergen de estos sistemas, lo que les ayuda a desarrollar habilidades de reconocimiento de patrones y a apreciar la belleza y complejidad inherentes a estos fenómenos.

El uso de GeoGebra también promueve el pensamiento crítico y la resolución de problemas en el contexto de los sistemas caóticos y fractales. Los estudiantes enfrentan desafíos al intentar comprender la naturaleza caótica y fractal de estos sistemas, y deben aplicar estrategias analíticas y de modelado para resolver problemas y extraer conclusiones. Esto fomenta el pensamiento crítico al requerir que los estudiantes evalúen y justifiquen sus razonamientos y conclusiones basados en evidencias visuales y matemáticas.

4. Fenómenos físicos que se pueden simular utilizando GeoGebra y que involucran sistemas caóticos y fractales

Demostrar un principio físico que a simple vista es de lo más difícil, poderlo percibir y captar desde la realidad misma, juega en gran medida un papel muy fundamental al momento de impartir un contenido, en este caso los docentes, se convierten en pilares de la innovación e interacción para el desenvolvimiento del proceso educativo, al mismo tiempo está el papel que ocupa el estudiante al ser el constructor de su propio conocimiento; no obstante debe entenderse que la tecnología es pieza fundamental en el proceso de enseñanza aprendizaje, pero para que sea efectiva el docente debe utilizar oportunamente los entornos educativos. (Muñoz Vallecillo et al., 2023, p. 49)

Oscilador caótico: GeoGebra permite simular osciladores caóticos como el oscilador de Duffing. Los estudiantes pueden ajustar los parámetros del oscilador y observar cómo cambia el comportamiento del sistema, desde oscilaciones periódicas hasta oscilaciones caóticas. También pueden visualizar los atractores caóticos asociados y explorar su estructura fractal.

Para Vacca González et al., (2015) el Oscilador de Duffing es un sistema no lineal, lo que implica que sus ecuaciones diferenciales son no lineales y requieren métodos específicos para su solución. Entre varios métodos disponibles, destacan el método de Euler y el método del punto medio o método de Runge-Kutta. Estos métodos son utilizados para aproximar las soluciones del sistema y permiten abordar la naturaleza no lineal del Oscilador de Duffing.

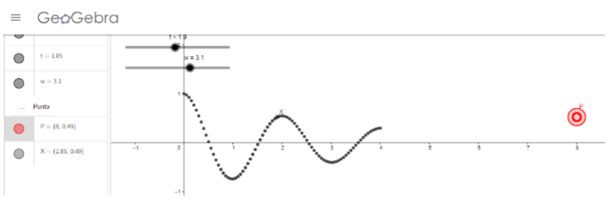

Figura 1. Comparación de resultados entre DTM y el método de Runge-Kutta

Dinámica de poblaciones: GeoGebra puede utilizarse para simular la dinámica de poblaciones en sistemas ecológicos. Por ejemplo, el modelo de depredador-presa de Lotka-Volterra puede mostrar comportamiento caótico cuando se ajustan los parámetros adecuados. Los estudiantes pueden modificar los parámetros y observar cómo las poblaciones de depredadores y presas oscilan y evolucionan en el tiempo, pudiendo visualizar los atractores caóticos y las bifurcaciones que se producen.

La dinámica de poblaciones es el estudio de los cambios que sufren las comunidades biológicas, así como los factores y mecanismos que los regulan. El estudio de las fluctuaciones en el tamaño y/o densidad de las poblaciones naturales se basa en tres pilares fundamentales: una serie de principios teóricos generales que subyacen al cambio poblacional, la formalización e interpretación de estos principios a través de modelos matemáticos, y, por último, la interpretación de estos principios y modelos en términos de mecanismos biológicos. (Vargas y Rodríguez, 2008, p. 99)

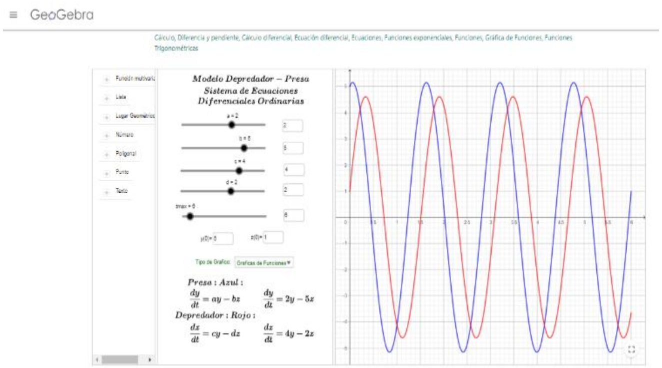

Figura 2. Modelo Depredador-Presa Sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con Gráficas de las Funciones y Fases

Sistemas de partículas en campos magnéticos: GeoGebra puede simular sistemas de partículas cargadas que se mueven en campos magnéticos. Estos sistemas pueden mostrar comportamiento caótico y fractal cuando las condiciones iniciales se ajustan de cierta manera. Los estudiantes pueden ajustar los parámetros y condiciones iniciales, y observar cómo las partículas se mueven en patrones complejos y fractales en presencia del campo magnético.

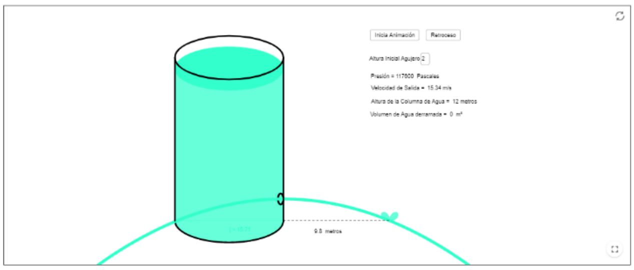

Figura 3. Campo magnético en R2 y R3

Modelado de fluidos caóticos: GeoGebra puede utilizarse para simular el comportamiento de fluidos en un régimen caótico. Los estudiantes pueden modelar el flujo de un fluido en un sistema, como un flujo en un tubo con una geometría compleja, y observar cómo se generan patrones caóticos y turbulencia. Pueden visualizar los campos de velocidad, trayectorias de partículas y estructuras fractales en el flujo del fluido.

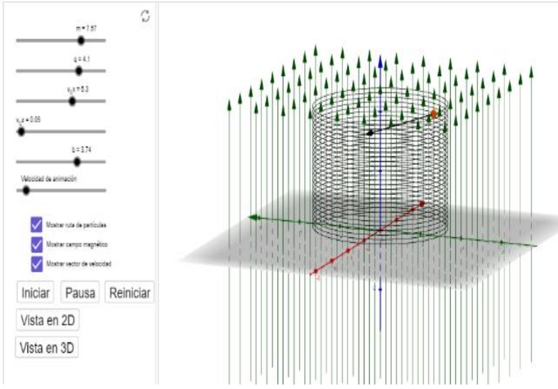

Figura 4. Dinámica de fluidos

Estos son solo algunos ejemplos de fenómenos físicos que se pueden simular utilizando GeoGebra y que involucran sistemas caóticos y fractales. La simulación de estos fenómenos ayuda a los estudiantes a comprender las propiedades y comportamientos complejos de los sistemas físicos, así como a explorar las relaciones entre el caos y los fractales en diferentes contextos.

Para una implementación efectiva del uso de GeoGebra en la enseñanza de fractales y sistemas caóticos, es fundamental definir el público al que estarán dirigidas las actividades. La comprensión de estos conceptos requiere ciertos conocimientos previos en matemáticas. En el caso de los fractales, es esencial que los estudiantes tengan una base en geometría y funciones, mientras que el estudio de los sistemas dinámicos caóticos suele depender de nociones de ecuaciones diferenciales, lo que lo hace más adecuado para niveles universitarios. Dado que estos últimos temas no suelen abordarse en la educación media superior, las actividades deben diseñarse según el perfil del alumnado para evitar confusión y optimizar el aprendizaje.

Además, es importante considerar el entorno en el que se implementarán las actividades. Se debe definir si las sesiones se realizarán en un aula de cómputo con acceso a GeoGebra en cada estación de trabajo, si se permitirán dispositivos móviles o si el profesor únicamente expondrá los temas y los estudiantes realizarán actividades de observación. La manera en que los alumnos interactúan con el software impacta en su aprendizaje, ya que una experiencia práctica facilita la comprensión de los conceptos. También es crucial determinar si los estudiantes desarrollarán las simulaciones desde cero o si se les proporcionará un archivo preconfigurado que les permita enfocarse en la interpretación y análisis de los resultados.

En cuanto a las actividades, para niveles de educación media superior, una de las más efectivas es la construcción del Triángulo de Sierpiński, donde los estudiantes pueden explorar la propiedad de autosimilitud y comprender el concepto de dimensión fractal. Para ello, se les guía en la creación del triángulo mediante iteraciones sucesivas, observando cómo la estructura resultante mantiene patrones repetidos a diferentes escalas. También se puede trabajar con el Conjunto de Cantor, donde los estudiantes eliminan segmentos de una línea de manera iterativa y calculan la cantidad de segmentos restantes en cada paso, lo que les permite entender la noción de dimensión fractal en una estructura matemática.

Para niveles universitarios, es posible abordar sistemas caóticos mediante la simulación del Oscilador de Duffing, que permite visualizar la transición de un sistema oscilatorio regular a un comportamiento caótico según se modifiquen ciertos parámetros. A través de GeoGebra, los estudiantes pueden interactuar con los valores de las condiciones iniciales y observar los atractores caóticos que se forman en la dinámica del sistema. De manera similar, otra actividad relevante es la exploración del Conjunto de Mandelbrot, utilizando números complejos para representar gráficamente un fractal generado mediante iteraciones. Los estudiantes pueden modificar valores y visualizar cómo diferentes regiones del plano complejo divergen o permanecen dentro del conjunto, lo que les ayuda a comprender mejor la relación entre la geometría fractal y los sistemas numéricos.

El impacto de estas actividades dependerá en gran medida de la metodología empleada. Si los estudiantes construyen los fractales desde cero, se fortalecerán sus habilidades en modelado matemático y programación dentro de GeoGebra. En cambio, si trabajan con archivos preconfigurados, podrán concentrarse en la interpretación de los resultados y la aplicación de conceptos matemáticos a problemas reales. En ambos casos, la interactividad que ofrece GeoGebra mejora la comprensión de estructuras complejas y fomenta el pensamiento analítico en el aprendizaje de la geometría fractal y los sistemas caóticos.

El uso de GeoGebra en la enseñanza de fractales y sistemas caóticos representa una herramienta poderosa para la visualización y comprensión de estos temas matemáticos avanzados. Sin embargo, para que su implementación sea efectiva, es fundamental definir el público objetivo, los recursos disponibles y la metodología de enseñanza. Al adaptar las actividades según el nivel de los estudiantes y proporcionar el entorno adecuado para su desarrollo, se logra un aprendizaje más significativo y aplicado, que vincula la teoría matemática con fenómenos observables en la naturaleza y en la ciencia.

5. Claridad Conceptual y Conexión entre Actividades y Temas

Uno de los aspectos esenciales en el desarrollo de cualquier documento académico es la coherencia entre los temas tratados y las actividades propuestas. En este caso, la falta de una discusión clara sobre los conceptos que fundamentan las actividades dificulta la comprensión de su pertinencia y utilidad. Por ejemplo, en el caso del modelo de Lotka-Volterra, aunque se menciona que ciertas elecciones de parámetros permiten observar bifurcaciones, no se especifican cuáles son estos parámetros ni cómo deben modificarse para generar dicho fenómeno. Además, el concepto de bifurcación no se desarrolla de manera explícita, lo que impide que los lectores comprendan plenamente su aplicación dentro de los sistemas dinámicos caóticos.

Esta desconexión entre teoría y práctica también se manifiesta en la ausencia de referencias a trabajos previos que hayan utilizado GeoGebra en enfoques físicos. No se proporciona evidencia sobre cómo esta herramienta contribuye a la enseñanza de los conceptos tratados ni se citan estudios que respalden su efectividad en el aprendizaje de sistemas caóticos y fractales. Para mejorar este aspecto, sería recomendable incluir una breve revisión de literatura sobre la aplicación de GeoGebra en este contexto, resaltando su potencial para la visualización y experimentación en sistemas dinámicos y modelado matemático (Artigue et al., 2021; García Pinilla, 2021).

6. Definición Metodológica en la Implementación de Actividades

Otro punto clave es la falta de información sobre la metodología de implementación de las actividades. En el documento no se menciona si estas forman parte de una secuencia pedagógica estructurada, si han sido aplicadas como una prueba piloto, o si corresponden únicamente a una descripción de actividades teóricas sin implementación previa. Esta falta de precisión impide evaluar la efectividad del enfoque propuesto y su aplicabilidad en diferentes niveles educativos (Martínez et al., 2015).

Si se trata de una propuesta teórica, sería recomendable definir claramente el marco teórico en el que se basa el diseño de las actividades. También se debe especificar la población estudiantil a la que está dirigida la propuesta, detallando los conocimientos previos requeridos y los recursos necesarios para su correcta implementación (Muñoz Vallecillo et al., 2023). Factores como el acceso a un aula de cómputo, la posibilidad de trabajar en dispositivos móviles o la necesidad de guías previas deben ser considerados dentro del diseño didáctico.

En el caso de que las actividades ya hayan sido aplicadas en una prueba piloto, sería importante proporcionar detalles sobre su implementación. Se debe incluir información sobre el grupo de estudiantes en el que se aplicó, los niveles educativos a los que podría dirigirse en futuras aplicaciones y las condiciones óptimas para su desarrollo. Además, sería útil documentar las dificultades encontradas durante la implementación y proponer estrategias para optimizar la experiencia en futuras iteraciones.

Si, por el contrario, el documento presenta resultados de una aplicación previa, entonces es fundamental incluir información más detallada sobre diversos aspectos clave. Entre ellos, se deberían abordar los siguientes puntos:

Dificultades encontradas por los estudiantes: Se debe identificar qué modelos o actividades resultaron más complejos para los alumnos y determinar si dichas dificultades están relacionadas con la falta de conocimientos previos o con problemas en el manejo de la herramienta GeoGebra. Además, es importante analizar si existieron inconvenientes logísticos en la implementación de las actividades y si hay aspectos que deban ajustarse para futuras aplicaciones (Sánchez-Balarezo & Borja-Andrade, 2022).

Impacto en el aprendizaje de los estudiantes: Para evaluar la efectividad de la metodología, es recomendable analizar si hubo una mejora en la comprensión de los conceptos de sistemas caóticos y fractales en comparación con la enseñanza tradicional. Para ello, se podría utilizar un pre-test y post-test, discusiones guiadas o algún otro mecanismo de evaluación que permita medir el progreso de los estudiantes y su nivel de comprensión de los temas tratados.

7. Hacia una Estrategia Didáctica Más Estructurada

Para lograr una enseñanza efectiva de sistemas caóticos y fractales utilizando GeoGebra, es crucial establecer una estructura metodológica clara que contemple desde los fundamentos teóricos hasta los aspectos prácticos de implementación. Definir de manera precisa los conceptos a estudiar, proporcionar referencias que respalden el enfoque y establecer una metodología bien definida permitirá una mejor adaptación de las actividades al nivel de conocimientos previos de los estudiantes. Esto asegurará que los contenidos sean adecuados para el público objetivo y garantizará que los resultados obtenidos puedan ser replicados y mejorados en futuras aplicaciones.

Fortalecer la relación entre los conceptos teóricos y las actividades prácticas, clarificar la metodología y proporcionar evidencia sobre la efectividad del uso de GeoGebra contribuirá significativamente a la calidad y aplicabilidad del documento. Con estas mejoras, será posible diseñar estrategias de enseñanza más efectivas y adaptadas a las necesidades del aprendizaje de los sistemas caóticos y fractales en distintos niveles educativos.

Conclusiones y reflexiones finales

En un mundo cada vez más complejo y diverso, la simulación de fenómenos físicos a través de herramientas como GeoGebra nos brinda la capacidad de explorar y comprender la naturaleza intrincada de los sistemas caóticos, fractales y no lineales. Estas simulaciones nos permiten visualizar y experimentar con fenómenos que, de otra manera, serían difíciles de comprender y predecir.

Los sistemas caóticos y fractales son fundamentales para comprender la complejidad inherente del universo. A través de la simulación, podemos observar cómo pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden generar resultados completamente diferentes y cómo los patrones fractales emergen de procesos dinámicos no lineales. Esto nos enseña que incluso en sistemas aparentemente aleatorios, hay una estructura subyacente y un orden intrínseco.

La capacidad de simular fenómenos físicos complejos no solo nos permite profundizar nuestro conocimiento científico, sino que también tiene aplicaciones prácticas en diversos campos. Desde el diseño de sistemas de energía y transporte hasta la modelización de poblaciones y la predicción del clima, las simulaciones nos brindan herramientas poderosas para comprender y tomar decisiones informadas sobre el mundo que nos rodea.

Las simulaciones también fomentan el pensamiento crítico y la creatividad. Al interactuar con los sistemas caóticos y fractales, nos desafían a buscar patrones, a explorar nuevas configuraciones y a experimentar con diferentes parámetros. Este enfoque experimental nos ayuda a desarrollar habilidades analíticas y a pensar más allá de los límites tradicionales, fomentando la innovación y el descubrimiento.

En resumen, las simulaciones de fenómenos físicos que involucran sistemas caóticos, fractales y no lineales son una herramienta poderosa para comprender y apreciar la complejidad del mundo que nos rodea. Nos invitan a explorar, investigar y desafiar nuestras percepciones, impulsando así el avance científico y el desarrollo de soluciones creativas a los desafíos actuales y futuros.

Referencias

[1] Alligood, K. T., Sauer, T. D., Yorke, J. A., & Crawford, J. D. (1997). Chaos: An Introduction to Dynamical Systems. Physics Today, 50(11), 67-68. https://doi.org/10.1063/1.882006

[2] Artigue, M. V., Fanaro, M. d., & Lacués, E. (2021). Estado del arte sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Fractal en la escuela secundaria.

Pensamiento Matemático, 11(2), 75-92. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8065034

[3] Bendaña, G. (2023). Fractales: La geometría de la naturaleza. *Revista de temas nicaragüenses, 179*, 12-15. https://n9.cl/bliiuw

[4] Bravo Rodríguez, N. A. (2022). Geogebra como recurso interactivo para el logro de desempeños en el desarrollo de dos competencias del área de matemática. *Tesis de Grado.* Universidad Nacional del Santa. https://repositorio.uns.edu.pe/handle/20.500.14278/4137

[5] Fernández Rosales, I. Y. (2009). Fundamentos de sistemas dinámicos oscilatorios. Instituto Politécnico Nacional. XIX Verano de la Investigación Científica, Departamento de Aplicación de Microcomputadoras, Instituto de Ciencias, Universidad Autónoma de Puebla.

[6] García Pinilla, C. A. (2022). Importancia de la súper fórmula en la enseñanza de la geometría fractal. Rastros Y Rostros Del Saber, 6(10), 17–29. Recuperado a partir de https://revistas.uptc.edu.co/index.php/rastrosyrostros/article/view/14598

[7] Herrera Arróliga, J. E., y Herrera Castrillo, C. J. (2023). Bases Orientadoras de la Acción para el desarrollo de temas de Física con enfoque por competencia. *Revista Científica de Estelí, 12*(46), 84–107. https://doi.org/https://doi.org/10.5377/farem.v12i46.16477

[8] Herrera Castrillo, C. J. (2020). Aprendizaje en las asignaturas “Electricidad” y “Termodinámica y Física Estadística” en tiempos de pandemia. *Revista Multi-Ensayos, 7*(13), 14-25. https://doi.org/https://doi.org/10.5377/multiensayos.v7i13.10748

[9] Martínez, I., Mazzieri, G., y Vaira, S. M. (2015). La utilización de las TIC para una introducción al caos y la teoría fractal. *XXVI JJI Jornada de Jóvenes Investigadores AUGM*, 1-15. https://bdigital.uncuyo.edu.ar/objetos_digitales/13285/23-tecnologas-de-la-informacin-y-la-comunicacin-martnez-ignacio-unl.pdf

[10] Muñoz Vallecillo, L. O., Martínez González, Y. Y., Medina Martínez, W. I., y Herrera Castrillo, C. J. (2023). Uso de simuladores y asistente matemático en la demostración del principio de Pascal al aplicarse integrales y vectores. *Revista Científica Tecnológica, 2*(6), 48-60. https://revistarecientec.unan.edu.ni/index.php/recientec/article/view/214

[11] Sánchez-Balarezo, R. W., y Borja-Andrade, A. M. (2022). Geogebra en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Dominio De Las Ciencias, 8*(2), 33-52. https://doi.org/https://doi.org/10.23857/dc.v8i2.2737

[12] Torres Ampuero, N. D., y Quispe Aparicio, Y. L. (2020). Software geogebra y construcción de fractales con estudiantes de tercer grado de secundaria de la Institución Educativa Mixta Fortunato Luciano Herrera Garmendia Cusco – 2019. *Tesis de Grado.* Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco | Facultad de Educación y Ciencias de la Comunicación. https://repositorio.unsaac.edu.pe/handle/20.500.12918/5485

[13] Vacca González, H., Barajas Sotelo, J. D., y Delgado Almendrales, J. S. (2015). Modelamiento, Simulación e Implementación Del Oscilador Por Medio De La Ecuación De Duffing. *Artículo.* Universidad Francisco José de Caldas RIUD. https://repository.udistrital.edu.co/handle/11349/13477

[14] Vargas, R., y Rodríguez, S. (2008). Dinámica de poblaciones. Colección Libros INIA. http://avocadosource.com/books/ripa2008/ripa_chapter_07.pdf