https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/investigium/issue/archive

Boletín Científico INVESTIGIUM de la Escuela Superior de Tizayuca

Publicación semestral, Vol. 11, No. 22 (2026) 33-38

InvESTigium

ISSN: 2448-4830

Algoritmo de Buchberger en el cálculo de bases de Gröbner

Buchberger's algorithm in Gröbner basis calculation

Dariela L. Benavides Mendoza [a], Maryleth del Rosario Rugama Hernández [b], Cliffor J. Herrera Castrillo

Abstract:

This paper addresses Buchberger's algorithm in the calculation of Gröbner bases, highlighting mainly its applications in the computational field. This algorithm constitutes a systematic method for generating a Gröbner basis of an ideal in the polynomial ring and is widely used in computational algebra systems to solve problems of membership in ideals and polynomial systems. Although Gröbner bases have applications in areas such as algebraic geometry, code theory, and cryptography, this paper emphasizes the computational perspective. It also discusses aspects related to the complexity of the algorithm, such as the order of the problem, execution time, and memory resources, factors that condition its viability in practice.

Keywords:

Algorithm, Buchberger, Set, Generators, Tool.

Resumen:

El presente ensayo aborda el algoritmo de Buchberger en el cálculo de bases de Gröbner, destacando principalmente sus aplicaciones en el ámbito computacional. Este algoritmo constituye un método sistemático para generar una base de Gröbner de un ideal en el anillo de polinomios, y es ampliamente utilizado en sistemas de álgebra computacional para resolver problemas de pertenencia a ideales y sistemas polinomiales. Si bien las bases de Gröbner tienen aplicaciones en áreas como la geometría algebraica, la teoría de códigos o la criptografía, en este trabajo se enfatiza la perspectiva computacional. Asimismo, se discuten aspectos relacionados con la complejidad del algoritmo, como el orden del problema, el tiempo de ejecución y los recursos de memoria, factores que condicionan su viabilidad en la práctica.

***Palabras Clave**:*

Algoritmo, Buchberger, Conjunto, Generadores, Herramienta.

Introducción

El presente ensayo elaborado sobre el algoritmo de Buchberger en el cálculo de bases de Gröbner contiene la siguiente información. El algoritmo nos permite hacer cálculos sobre el anillo de polinomios, es una manera sistemática de producir un conjunto de generadores (una base de Gröbner) para un ideal (1).

El mismo B. Buchberger dio un criterio para eliminar términos redundantes dentro del algoritmo y así obtener un proceso mejorado (2). La base de esta optimización es saber qué se debe agregar al conjunto de generadores del ideal en cuestión para obtener de ahí una base de Gröbner.

Las bases de Gröbner, nos permiten resolver problemas sobre ideales polinomiales, de una manera algorítmica o computacional. Las bases de Gröbner se usan en muchos sistemas algebraicos computacionales poderosos para estudiar ideas específicas ideas polinomiales que aterrizan en diversas aplicaciones.

Notación y convenciones

En este apartado se definen los símbolos y términos usados de manera recurrente en el ensayo:

- $\mathbb{K}$: campo base (ej. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$).
- $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$: anillo de polinomios en n variables con coeficientes en $\mathbb{K}$.

[a] Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua (UNAN-Managua) | Centro Universitario Regional Estelí (CUR-Estelí) | Estelí-Estelí | Nicaragua, https://orcid.org/0009-0002-9752-7599, Email: lismend@gmail.com; [b] https://orcid.org/0009-0002-2356-4346, Email: marylethrugama@gmail.com; [c] Autor de Correspondencia, https://orcid.org/0000-0002-7663-2499, Email: cliffor.herrera@unan.edu.ni

Fecha de recepción: 03/08/2025, Fecha de aceptación: 29/09/2025, Fecha de publicación: 05/01/2026

DOI: https://doi.org/10.29057/est.v11i21.15595

- $I \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$: ideal generado por un conjunto de polinomios.
- $G = \{g_1, \ldots, g_t\}$: conjunto de polinomios, posible base de Gröbner de I.
- LT(f): término líder (Leading Term) de un polinomio f.
- LM(f): monomio líder (Leading Monomial) de f.
- LC(f): coeficiente líder (Leading Coefficient) de f.
- S(f, g): S-polinomio de f y g.
- ≤: orden monomial elegido (ej. lexicográfico, graduado lexicográfico, lexicográfico reverso).
- $\langle f_1, \ldots, f_s \rangle$: ideal generado por los polinomios $f_1, \ldots, f_s$.
- $\sum_i x$: sumatoria
- $\in$: pertenece a
- $\succ$ Orden monomial

Nota: Todas las demostraciones y cálculos se desarrollan con respecto a un orden monomial admisible previamente fijado, salvo indicación contraria.

Desarrollo

Algoritmo de Buchberger en el cálculo de bases de Gröbner

"Las matemáticas puras son, en su forma, la poesía de las ideas lógicas"

Las bases de Gröbner fueron introducidas por Bruno Buchberger en su tesis doctoral en 1965, realizada bajo la dirección de Wolfgang Gröbner. Los principios básicos subyacentes a la noción de bases de Gröbner se remontan al fin del siglo XIX, pero la contribución principal de Buchberger ha sido la de idear un algoritmo finito que transforma un sistema de generadores dados de un ideal en una base de Gröbner del ideal. Este algoritmo está actualmente implementado en muchos sistemas de álgebra computacional (3), (4).

El algoritmo de Buchberger para el cálculo de Bases de Gröbner se ha convertido en una poderosa herramienta para la solución de aquellos problemas que se pueden expresar en términos de la teoría de ideales de polinomios con coeficientes en un cuerpo; en esta teoría los ideales son finitamente generados como consecuencia del Teorema de la Base de Hilbert.

El algoritmo de Buchberger permite hacer cálculos sobre el anillo de polinomios. Para poder trabajar con polinomios se necesita poder saber cuándo un polinomio dado pertenece o no a un ideal fijo. En el caso de k[x] el problema es resuelto fácilmente por el algoritmo de la división que se tiene gracias a que k[x] es un anillo Euclidiano. Lo que hace que en el caso de una variable las cosas funcionen, es que se tiene un invariante (el grado) y un proceso que reduce el invariante (5).

En este algoritmo de la división para una variable, lo que se hace es dividir el polinomio entre el término inicial, por lo que, para el caso de varias variables, lo que se necesita es una noción de término inicial, por ejemplo, ¿cuál es el término inicial de x 2y +y 2x? Resulta que esto significa que se debe ordenar los monomios de k $[x_1, \ldots, x_n]$, esto es casi inmediato. Desafortunadamente se encuentra que, aunque se haya encontrado un algoritmo de la división aún no se puede resolver el problema de pertenencia planteado previamente. La pieza faltante es un análogo al algoritmo Euclidiano para el caso de varias variables que nos produzca un buen conjunto de generadores (uno en el caso de una variable) (6). Pero hay una simple y bella solución para el obstáculo; el algoritmo de Buchberger es una manera sistemática de producir un conjunto de generadores (una base de Gröbner) para un ideal de tal manera que el algoritmo de la división funcione.

El algoritmo de Buchberger [Buc85] para el cálculo de una base de Gröbner de un ideal dado por un sistema de generadores. La herramienta fundamental son los S-polinomios que esencialmente son la combinación más simple de dos polinomios que cancela sus términos líderes (7).

(S-polinomio). Sean f, g ∈ R dos polinomios no nulos y $\succ$ un orden monomial. El S-polinomio de f y g es:

$$S(f,g) = \frac{x^\gamma}{lt_\succ(f)} \cdot f - \frac{x^\gamma}{lt_\succ(g)} \cdot g,$$

Donde x^γ = mcm{lm≻(f),lm≻(g).

Notar que el S-polinomio depende del orden monomial $\succ$ elegido, aunque para aliviar la notación no utilizaremos S(f, g) $\succ$ más que cuando sea estrictamente necesario. El siguiente resultado muestra que cualquier cancelación de términos líderes entre polinomios con el mismo multigrado es producto de una cancelación de S-polinomios (8).

Teorema de Buchberger

Demostración. Asumiendo que el algoritmo termina, G siempre es generador de I, pues siempre contiene a f_1 , …, f_s , y, a partir de ahí, en el algoritmo solo se le añaden elementos de I, i.e., restos de dividir sizigias de elementos de I por elementos de I.

Por otra parte, si el algoritmo termina, todos los restos de las sizigias por la división por G son 0, luego $G \in$ Gröbner (I).

Por último, veamos que el algoritmo termina, ya que, si G' y G'' se corresponden a estados sucesivos del conjunto G, tenemos $G' \subseteq G''$, y por tanto ⟨LT (G')⟩ ⊆ ⟨LT (G'')⟩. Es decir, los estados sucesivos de G inducen una cadena ascendente de ideales ⟨LT (G)⟩ de $\mathbb{K}$ [x], que se estabiliza como consecuencia del Teorema de la Base de Hilbert, luego en alguna repetición del bucle se tiene que ⟨LT (G')⟩ = ⟨LT (G'')⟩.

Queremos ver entonces que $G' = G''$, i.e., $S = G'' \setminus G' = \emptyset$. Suponemos por reducción al absurdo que $r \in S$, i.e., r es el resto de dividir alguna sizigia por G' . Como $r \in G''$, o

bien $r = 0$ o LT $(r) \in \langle$LT $(G'')\rangle$. Sin embargo, como $\langle$LT $(G'')\rangle = \langle$LT $(G')\rangle$, y r es resto de dividir por G', necesariamente $r = 0$. No obstante, es imposible que $r = 0 \in S$, por construcción del algoritmo.

Como consecuencia, los siguientes problemas son decidibles para ideales de $\mathbb{K}$ [x], usando bases de Gröbner:

1. Pertenencia a un ideal
2. Contención en un ideal
3. Igualdad entre ideales (7)

En general, las bases de Gröbner obtenidas por el algoritmo de Buchberger no son únicas para un ideal, ya que dependen de los generadores usados. Sin embargo, existe una forma de reducir bases de Gröbner con clausura única.

Sea G = {$g_1, \ldots, g_t$} ⊂ K[$x_1, \ldots, x_n$] con gi no nulo para i ∈ {1, . . . , t}. Entonces, G es una base de Gröbner del ideal $I = \langle g_1, \ldots, g_t \rangle$ si y solo si $S(g_i, g_j)^G = 0$, ∀1 ≤ i < j ≤ t.

Demostración

Supongamos que G = {$g_1, \ldots, g_t$} es una base de Gröbner del ideal $I = \langle g_1, \ldots, g_t \rangle$. Se tiene

$$S(g_i, g_j) = \frac{\mathbf{x}^\gamma}{\mathrm{tl}(g_i)} g_i - \frac{\mathbf{x}^\gamma}{\mathrm{tl}(g_j)} g_j$$

donde $\mathbf{x}^\gamma = mcm(\mathrm{ml}(g_i), \mathrm{ml}(g_j))$. Entonces

$$\Rightarrow \; S(g_i, g_j) \in I \; \Rightarrow \; \overline{S(g_i, g_j)}^G = 0$$

(9), (10)

Por ser G una base de Gröbner y por el teorema sea I ⊂ K[$x_1, \ldots, x_n$] un ideal distinto de cero y sea G = {$g_1, \ldots, g_t$} ⊂ I. Son equivalentes:

i) G es una base de Gröbner de I.

ii) $\forall f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, *f ∈ I si y solo si* $\overline{f}^G = 0$.

iii) $\forall f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, *f ∈ I si y solo si* $\exists h_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n], i = 1, \ldots, t$ *tal que* $f = \sum_{i=1}^{t} h_i g_i$ *con* $\mathrm{ml}(f) = \max_{1 \le i \le t}\{\mathrm{ml}(h_i)\mathrm{ml}(g_i)\}$.

iv) $\mathrm{TL}(G) = \mathrm{TL}(I)$.

Bases de Gröbner

Denotamos por K[$X_1, \ldots, X_n$] el anillo de polinomios en las indeterminadas $X_1, \ldots, X_n$ con coeficientes en K, y por ≤ un orden admisible sobre N^n.

Si I es un ideal de K[$X_1, \ldots, X_n$], una base de Gröbner de I es un conjunto finito de elementos no nulos, G = {$G_1, \ldots, G_t$} ⊆ I, verificando que

Exp(I) = {exp(G_1), . . ., exp(G_t)} + N^n = Exp(G) + N^n. respecto de un orden monomial admisible.

i. Cada ideal no nulo de K[$X_1, \ldots, X_n$] tiene una base de Gröbner.
ii. Toda base de Gröbner de un ideal no nulo es un sistema de generadores.
iii. Teorema de la base de Hilbert. Todo ideal de K[$X_1, \ldots, X_n$] es finitamente generado.

Demostración. Supongamos que exp(F_1) = β(i), entonces α(i) + β(i) = δ. Hacemos el siguiente desarrollo:

$$\sum_i Ci \cdot x^{a(i)} F_i = \sum_i c_i lc(F_i) \frac{x^{a(i)} F_i}{lc(F_i)} = \sum_i c_i lc(F_i) H_i$$

Donde $\frac{x^{a(i)} F_i}{lc(F_i)} = H_i$. Podemos completar este desarrollo de la siguiente forma (1):

$$\sum_i Ci \cdot x^{a(i)} F_i = \sum_i c_i lc(F_i) H_i$$

= $c_1lc(F_1)(H_1 - H_2) + (c_1lc(F_1) + c_2lc(F_2))(H_2 - H_3) + \cdots + (c_1lc(F_1) + \cdots c_{t-1}lc(F_{t-1}))(H_{t-1} - H_t) + + (c_1lc(F_1) + \cdots + c_t lc(F_t))H_t$.

Base de Gröbner G minimal:

Una base de Gröbner G es minimal si se cumplen las siguientes condiciones:

1) para todo g ∈ G se tiene LC(g) = 1;
2) para todo g ∈ G se tiene LT (g) ∉ (LT (G \ {g })).

Se dice que G es reducida si se cumple la condición 1) y en lugar de 2) se cumple la condición más fuerte: 2´) para todo g ∈ G ningún monomio de g pertenece al ideal (LT (G \ {g })).

Notamos que toda base reducida es automáticamente minimal. Está claro que todo ideal no nulo I ⊆ k[$x_1,\ldots,x_n$] posee una base de Gröbner minimal: hay que tomar cualquier base de Gröbner G, normalizar sus elementos para que se cumpla la condición 1), y luego quitar uno por uno todos los polinomios innecesarios hasta que se cumpla la condición 2). Es un poco más difícil construir una base reducida (7).

Propiedades de las bases de Gröbner:

Una de las propiedades más importantes de las bases de Gröbner, y que de hecho motivó su definición, es la siguiente proposición, que establece que usando como divisores los elementos de una base de Gröbner de un ideal, el resto del algoritmo de la división de un polinomio dado no depende del orden elegido para los divisores.

Fijemos un orden monomial. Sea G = {$g_1, \ldots, g_t$} una base de Gröbner de un ideal I ⊂ K[x] y sea f ∈ K[x] un polinomio. Entonces existen un único par de polinomios r, g ∈ K[x] que verifican las siguientes propiedades:

(1) g ∈ I, y es tal que f = g + r, y

(2) si r 6= 0, ningún monomio de r es divisible por ninguno de los LT(g_i), i ∈ {1, . . . , t}.

Siendo $\beta(i)$:= MGRAD(g_i), LT(g_i)= $d_i x^{\beta(i)}$, para cada i. Por hipótesis, tenemos que $\alpha(i) + \beta(i) = \delta$, y entonces el monomio LM(g_i) = $x^{\beta(i)}$ divide a x^δ. Consecuentemente, $x^{\gamma(jk)}$=lcm(LM(g_j), LM(g_k)) también divide a x^δ. Por tanto, podemos escribir:

$$x^{\delta-\gamma(jk)}.S(g_j,g_k) = x^{\delta-\gamma(jk)}.\left(\frac{x^{\gamma(jk)}}{LT(g_j)}g_j - \frac{x^{\gamma(jk)}}{LT(g_k)}g_k\right)$$

$$= \frac{x^{\delta}}{d_j x^{\beta(j)}}g_j - \frac{x^{\delta}}{d_k x^{\beta(k)}}g_k = \frac{x^{\alpha(j)}g_j}{d_j} - \frac{x^{\alpha(k)}g_k}{d_k} = p_j - p_k;\ (6)$$

Usando esta relación, y que $\sum_i^t 1^{c_i d_i} = 0$, la suma telescópica anterior se escribe:

$$\sum_{i=1}^{t} c_i.x^{\alpha(i)}.g_i = c_1 d_1.x^{\delta-\gamma(12)}.S(g_1,g_2) + (c_1 d_1 + c_2 d_2).x^{\delta-\gamma(23)}.S(g_2,g_3) + \cdots$$
$$\ldots + (c_1 d_1 + \ldots + c_{t-1} d_{t-1}).x^{\delta-\gamma(t-1,t)}.S(g_{t-1},g_t),$$

Que es una suma de la forma deseada. Como p_j y p_k tienen multigrado **δ** y coeficiente principal 1. La diferencia $p_j - p_k$ tiene multigrado menor que **δ**. Esto permite concluir que $x^{\delta-\gamma(jk)}S(g_j.g_k)$ también tiene multigrado menor que **δ**.

Este lema demuestra que toda cancelación puede llevarse a cabo utilizando sizigias (10).

Problemas fundamentales de la teoría de las bases de Gröbner (4).

A continuación, se presenta una introducción al concepto de variedad sobre un anillo de polinomios, el cual es fundamental para establecer un puente entre el concepto algebraico y la interpretación geométrica de conjuntos de polinomios. A partir de ahora K denotará un campo.

Para un entero positivo n, se define el n-espacio afín como $K^n = \{(a_1,\ldots,a_n): a_i \in K\ para\ todo\ 1 \le i \le n\}$.

Ejemplo: Cuando K = $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ Se conoce como el espacio euclídeo n-dimensional.

Órdenes monomiales

Sea I ⊂ k[x] un ideal y < un orden monomial. Un conjunto finito {g_1, . . . , g_s} de elementos en I se llama una base de Gröbner de I con respeto a < si

$$in_<(I) = (in_<(g_1),\ldots,in_<(g_s)).$$

Ejemplo:

Sea <=<$_{lex}$ el orden lexicográfico en $S = k[x_1,\ldots,x_7]$ con respecto a $x_1 > \cdots > x_7$ y sean $f = x_1x_4 - x_2x_3$ y $g = x_4x_7 - x_5x_6$. Entonces, $in_<(f) = x_1x_4\ y\ in_<(g) = x_4x_7$. El conjunto {f, g} no es una base de Gröbner para el ideal I = (f, g):

$toma\ h = x_7 f - x_1 g, pues\ in_<(h) = x_1x_5x_6 \notin (in_<(f), in_<(g))$. (5)

Para poder definir apropiadamente un orden en el proceso de división, se necesita definir algunas ideas. Sea $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, definimos su monomio asociado como

$$x^{\alpha} = x_1^{a_1}, \ldots, x_n^{a_n} \in \mathbb{K}\ [x].$$

Esta asociación establece una correspondencia entre el conjunto de monomios de $\mathbb{K}$ [x] y $\mathbb{N}^n$ n, por lo que, para ordenar monomios nos basta con tener una forma de ordenar $\mathbb{N}^n$. En primer lugar, tenemos que definir lo que es un orden.

Un orden ≤ sobre un conjunto S es una relación reflexiva, transitiva y antisimétrica, i.e., para todos $\alpha, \beta, \gamma \in S$:

$$\alpha \le \alpha,\ \alpha \le \beta \le \gamma \Longrightarrow \alpha \le \gamma,\ \alpha \ne \beta \wedge \alpha \le \beta \Longrightarrow \beta \not\ge \alpha.$$

Diremos que el orden es total si relaciona a todos los elementos, i.e., para todos $\alpha, \beta \in S$ se tiene $\alpha \le \beta$ o $\beta \le \alpha$, y en caso contrario diremos que es parcial. Otra propiedad importante de un orden es que nos proporcione un criterio para elegir elementos. Si para todo subconjunto no vacío de S, este subconjunto tiene mínimo, decimos que el orden es un buen orden. (7)

Vamos a definir un orden en los monomios del anillo de polinomios K[x_1, ..., x_n] ya que ello es necesario para definir posteriormente un algoritmo de división.

Si nos fijamos en casos particulares ya conocidos como el algoritmo de división de polinomios en K[x] o la eliminación Gaussiana para polinomios lineales en K[x_1, . . . , x_n] implícitamente estamos utilizando un orden en los monomios. Para dividir polinomios de una variable, usamos el grado de los monomios, de modo que . . . > x^{n+1} > x^n > . . . > x^2 > x > 1, mientras que cuando hacemos el método de Gauss seguimos usualmente el orden de las variables x_1 > x_2 > . . . > x_n. Ahora pretendemos ampliar este concepto al anillo de polinomios K[x_1, . . . , x_n].

Sea f ∈ K[x_1, . . . , x_n], entonces f es una suma finita de la forma:

$$f = \sum_{\alpha} a_\alpha\, x^\alpha = \sum_{\alpha} a_\alpha\ x_1^{\alpha 1} \ldots x_n^{\alpha n}$$

con $a_\alpha \in K, \alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in N^n$

Podemos establecer una correspondencia biunívoca entre los monomios mónicos de K[x_1, . . . , x_n] y N^n , de modo que si tenemos un orden establecido en N^n , tendremos un orden en los monomios.

Definamos $T^n = \{X^\alpha = x_1^{\alpha 1}\ldots x_n^{\alpha n} \mid \alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in N^n\}$

De todas las formas existentes de ordenar T^n, nosotros tenemos que considerar aquellas que sean consistentes con el algoritmo de división en K[x] y de eliminación Gaussiana en K[x_1, . . . , x_n].

Para ordenar los términos de un polinomio necesitamos una relación de orden total (es decir, donde dos elementos cualesquiera se pueden comparar). Y por ´ultimo, cuando usemos un algoritmo de división, queremos acabar en un número finito de pasos, lo que nos lleva a la noción de un buen orden. (8)

El orden lexicográfico y lexicográfico reverso

El orden lexicográfico $<_{lex}$ es el orden monomial definido como $x^a <_{lex} x^b$ si y solo si $a_j - b_j < 0\ para\ j = min\{i: a_i - b_i \ne 0\}$.

El orden lexicográfico graduado $<_{deglex}$ es el orden monomial definido como $x^a <_{deglex} x^b$ si y solo si

1. $\sum_{i=1}^n a_i < \sum_{i=1}^n b_i, o$
2. $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i\ y\ a_j - b_j < 0\ para\ j = min\{i: a_i - b_i \ne 0\}$

El orden lexicográfico reverso $<_{revlex}$ es el orden monomial definido como $x^a <_{deglex} x^b$ si y solo si $a_j - b_j < 0\ para\ j = max\{i: a_i - b_i \neq 0\}$.

Algoritmo de la división

Para conseguir un algoritmo para dividir $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ entre $f_1, \ldots, f_n \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Esto es, conseguir una expresión de la forma

$f = a_1f_1 + \cdots + a_sf_s + r$, (9)

Donde los "cocientes" $a_1, \ldots, a_s$ y el resto r pertenecen a $K[x_1, \ldots, x_n]$. La idea básica del algoritmo es cancelar el término principal de f usando el término principal de algún f_i, y repetir este proceso hasta que no se pueda hacer.

Consideraciones computacionales

Aunque el algoritmo de Buchberger es fundamental en álgebra computacional, su aplicación práctica enfrenta retos asociados a la complejidad algorítmica. En general, el tiempo de ejecución puede crecer de manera exponencial con respecto al número de variables y al grado de los polinomios considerados, lo que implica que problemas aparentemente simples se vuelvan intratables en la práctica. Además, la memoria requerida aumenta de forma significativa a medida que se generan nuevos polinomios durante el proceso de reducción (Aráuz et al., 2024).

Estas limitaciones hacen necesario analizar la factibilidad de implementación en sistemas de cómputo, considerando los recursos disponibles. Por ello, en contextos computacionales es habitual complementar el algoritmo con optimizaciones, como criterios de Buchberger para descartar cálculos redundantes o variantes mejoradas (F4, F5, entre otras) que permiten estimar de manera más eficiente los tiempos de ejecución y el consumo de memoria.

Conclusiones

Para concluir se puede decir que el algoritmo de Buchberger es muy importante para hacer cálculos sobre anillos de polinomios. Se puede decir que En el caso de k[x] el problema es resuelto fácilmente por el algoritmo de la división que se tiene gracias a que k[x] es un anillo Euclidiano. Lo que hace que en el caso de una variable las cosas funcionen.

También se puede decir que este algoritmo es muy importante en el álgebra computacional ya que se pueden resolver o calcular anillos de polinomios en diferentes softwares matemáticos, así como diferentes ejercicios derivados del álgebra, sabemos que para poder trabajar con polinomios necesitamos poder saber cuándo un polinomio dado pertenece o no a un ideal fijo.

Este algoritmo de Buchberger en el cálculo de las bases de Gröbner fue diseñado para dar solución a anillos de polinomios algebraicos lo cual permite resolver con facilidad distintos problemas ya sea en álgebra computacional o álgebra.

De esta manera concluimos que el algoritmo de Buchberger en las bases de Gröbner es de suma importancia para el álgebra y matemática en general.

Referencias

[1] Alcántara García, D. I. (2006). Bases de Gröbner. *tesis de grado.* Universidad de Cantabria, Cantabria. https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/29856/AlcantaraGarciaDavidIgnacio.pdf?sequence=1&isAllowed=y

[2] Aráuz, J. J. M., Fuentes, I. L. H., & Herrera-Castrillo, C. J. (2024). Teorema de los ceros de Hilbert: aplicaciones de sus versiones débil y fuerte. *Ciencias Matemáticas*, *37*(1), 85-95. https://revistas.uh.cu/rcm/article/view/9954

[3] Beshenov, A. (s.f.). Introducción al álgebra conmutativa computacional. *tesis de grado.* Universidad de El Salvador, El Salvador. https://cadadr.org/teaching/san-salvador/2019-Gröbner/algebra-computacional.pdf

[4] Bossinger, L. (2021). Bases y Abanicos de Gröbner. *tesis de grado.* Universidad Nacional Autónoma de México, Unidad Oaxaca, Oaxaca, México. https://www.matem.unam.mx/~lara/Videos/Slides1-5.pdf

[5] Del Campo Sánchez, A. M. (2007). Optimización del Algoritmo de Buchberger por medio de Resoluciones Planas. *Tesis de grado* . http://personal.cimat.mx:8181/~abraham.mc/Files/Tesis_mast_amcs.pdf

[6] Fernández Criado, M. (2010). Bases de Gröbner: Una Introducción a la Geometría Algebraica. *tesis de grado.* Universidad de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela . https://minerva.usc.es/xmlui/bitstream/handle/10347/26315/Fernandez_Criado_Marcos.pdf;jsessionid=7977290F0C04286C474B9417608226FA?sequence=1

[7] García Martínez, X. (2012). Bases de Gröbner. *tesis de grado.* Universidad de Santiago de Compostela, Santiago. http://xabier.garcia.martinez.webs.uvigo.gal/Bachelor_Thesis_Garcia_Martinez.pdf

[8] González Parra, A. (2015). Bases de Gröbner: Eliminación y programación lineal entera. *Tesis de grado.* Universidad de Sevilla, Sevilla. https://idus.us.es/bitstream/handle/11441/40802/Gonz%C3%A1lez%20Parra%20Alba%20TFG.pdf?sequence=1&isAllowed=y

[9] Martínez Moro, E., Munuera Gómez, C., & Ruano Benito, D. (2007). *Bases De Gröbner: Aplicaciones A La Codificación Algebraica.* Mérida, Venezuela: Editorial Texto. http://www.singacom.uva.es/~ruano/Libro.pdf

[10] Oviedo Melo, J. S. (s.f.). Aplicación de la teoría de las bases de Gröbner. *Tesis de grado.* Universidad de Nariño San Juan de

Pasto, San juan de Pasto. https://sired.udenar.edu.co/781/1/90900.pdf

[11] Romero Camacho, F. M. (2012). Aplicaciones de las bases de Gröbner a interpolación y teoría de grafos. *tesis de grado.* Universidad de Granada, Granada. https://www.ugr.es/~anillos/textos/pdf/2012/Flavia-TFM.pdf