

Educación matemática realista

Realistic mathematics education

Luis J. Vega-Mondragón^a, Nadia I. Rosas-Pérez^{b*}, Aarón Reyes-Rodríguez^c

Abstract:

In this article we describe the characteristics of the realistic mathematics education didactical approach. Also, we characterize this perspective in terms of the tasks it proposes, as well as the structure of the didactic scenario, including the functions performed by the teacher during the instructional process. The ontological, epistemological, and didactic foundations underlying the theory are explained. In addition, some practical principles oriented to the design of tasks and the instructional scenario are stated. Finally, some advantages and disadvantages of the theory are identified.

Keywords:

Realistic Mathematics Education, instructional tasks, teaching scenario, learning.

Resumen:

En este artículo se describen las características y fundamentos de la aproximación didáctica denominada teoría de la Educación Matemática Realista. En particular, caracterizamos esta perspectiva en términos del tipo de tareas que propone, así como de la estructura del escenario didáctico, incluyendo las funciones desempeñadas por el docente durante el proceso de instrucción. Se explicitan los fundamentos ontológicos, epistemológicos y didácticos subyacentes en la teoría. Además, se enuncian algunos principios prácticos orientados al diseño de tareas y del escenario instruccional. Finalmente, se identifican algunas ventajas y desventajas de la teoría.

Palabras Clave:

Educación Matemática Realista, tareas de instrucción, escenario didáctico, aprendizaje.

Introducción

La aproximación didáctica y marco de investigación de la Educación Matemática Realista (EMR en lo subsecuente) fue desarrollada por el matemático y educador matemático neerlandés Hans Freudenthal, alrededor de 1970. La EMR es un enfoque didáctico que busca fomentar el aprendizaje de las matemáticas a través de tareas enmarcadas en situaciones y contextos *reales*, fomentando de esta forma la comprensión profunda y significativa de los conceptos. 5, 14

Este enfoque se centra en brindar a los estudiantes experiencias instruccionales prácticas y contextualizadas mediante las cuales se favorezca el entendimiento de los conceptos matemáticos. Se busca que los estudiantes no solo memoricen hechos o

desarrollen fluidez para ejecutar algoritmos o procedimientos rutinarios, sino que comprendan la utilidad y aplicabilidad de las matemáticas para dar sentido a fenómenos o situaciones de su entorno, promoviendo así una comprensión sólida y duradera de las ideas matemáticas.

El enfoque EMR suele incluir como tareas, problemas cercanos a las experiencias de los estudiantes, promueve el trabajo con datos y aplicaciones de herramientas matemáticas, el uso de herramientas tecnológicas, así como el fomento de la resolución de problemas, la reflexión, el razonamiento y la comunicación de ideas.

Las aproximaciones instruccionales basadas en la EMR comienzan promoviendo los métodos de trabajo

^aLuis J. Vega-Mondragón, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México. <https://orcid.org/0009-0007-4609-3176>, Email: ve477760@uaeh.edu.mx

^b Nadia I. Rosas-Pérez, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México. <https://orcid.org/0009-0000-7434-3450>, Email: ro477759@uaeh.edu.mx *

^c Aarón Reyes-Rodríguez, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México. <https://orcid.org/0000-0001-8294-9022>, Email: aaronr@uaeh.edu.mx

informales de los estudiantes, vinculados al contexto, ensu realidad personal. A partir de ahí, con apoyo del docente, se les apoya para que desarrollen modelos, esquemas y simbolizaciones que sirven como intermediarios para las situaciones iniciales y las operaciones y conceptos institucionalizados. 12

Los principios teóricos y prácticos que ofrecen las teorías o aproximaciones didácticas son importantes para los docentes, ya que estos permiten fundamentar la toma de decisiones en las fases de diseño, implementación y evaluación de los procesos de enseñanza y aprendizaje. 8

Es importante tener en cuenta que diferentes autores pueden tener distintas formas de conceptualizar la EMR, pero concuerdan en señalar que las matemáticas deben ser accesibles y relevantes para los estudiantes. Lo anterior se puede lograr al conectar los contenidos con aplicaciones prácticas y situaciones cotidianas tales como viajar en autobús, ir de compras, construir un huerto o administrar el dinero. 1

Características de la EMR

Entre las principales características de la EMR se encuentran las siguientes: (a) contextos y situaciones problemáticas realistas como generadores de la actividad matematizadora de los alumnos; (b) uso de modelos, esquemas, diagramas y símbolos como herramientas para representar y organizar los contextos y situaciones; (c) centralidad de las construcciones y producciones de los alumnos en el proceso de enseñanza/ aprendizaje; (d) papel clave del docente como guía; (e) importancia de la interacción grupal y (f) fuerte interrelación e integración de los ejes curriculares de la matemática.

Principios fundamentales

Uno de los principios claves para la educación matemática es que las tareas y el escenario instruccional deben brindar a los estudiantes una oportunidad "guiada" para "reinventar" las ideas matemáticas.

De acuerdo con Freudenthal, un currículo científicamente estructurado, en el que los estudiantes son confrontados con unas matemáticas elaboradas, se basa en la falsa hipótesis de que los resultados del pensamiento matemático, colocados en el marco de una asignatura, se pueden transferir directamente a los estudiantes. 6, 9

La elaboración de tareas con base en la EMR se orienta a partir de seis principios:

1. *Actividad.* Las matemáticas se consideran una actividad humana. Así, el proceso instruccional se orienta hacia la matematización (organización) del mundo que nos rodea. En lugar de solo internalizar ideas matemáticas ya elaboradas, los estudiantes son participantes activos en el proceso educativo, al *reinventar*, con el apoyo del docente, todo tipo de herramientas matemáticas, comprensiones y entendimientos. Existen dos tipos de matematización, la horizontal y la vertical. La *matematización horizontal* se enfoca en hacer un campo de problemas accesible al tratamiento matemático formal, mientras que la *matematización vertical* se orienta al procesamiento matemático. La matematización horizontal conduce el *mundo de la vida* (lo que experimentamos como la realidad) al mundo de los símbolos. La matematización vertical se refiere al procesamiento u operación de los símbolos matemáticos. 6

2. *Realidad.* Las matemáticas se aprenden haciendo matemáticas en contextos reales. Hacer matemáticas (matematizar) es más importante que aprender la disciplina como un producto terminado. 3 Cabe señalar que no todo problema contextualizado es un *problema realista*. El criterio para que un problema se considere realista es que el alumno pueda percibirlo como parte de sus experiencias y lo conceptualice como personalmente interesante. En otras palabras, un problema es realista si los estudiantes pueden imaginarse el contexto en relación con ellos mismos. Los problemas en la EMR pueden venir del mundo real, pero también del mundo de la fantasía, como los cuentos de hadas, o ser problemas en contexto puramente matemático, en la medida que tales problemas sean experiencialmente reales en la mente de los estudiantes. La EMR pretende que, usen sus recursos y comprensiones personales para dar sentido a tales problemas realistas. En lugar de comenzar con abstracciones que se aplicarán posteriormente, se debe comenzar con contextos ricos que demanden el uso y diseño de herramientas matemáticas. Es decir, el aprendizaje debe estar inmerso en contextos que puedan ser matematizados. La realidad no es una sola cosa, son tantas cosas como personas, y para una sola persona puede ser tantas cosas como entendimientos y circunstancias externas. 5, 6, 14, 16

3. *Niveles.* El proceso de aprendizaje se estructura a través de diversos niveles, los cuales inician con soluciones informales ancladas al contexto, transitando por diversos tipos de atajos y esquematizaciones, hasta desarrollar un entendimiento profundo de cómo se relacionan los conceptos y estrategias. Al respecto, los modelos constituyen un punto entre las estrategias informales, los conceptos y procedimientos matemáticos

formales. La actividad organizadora de un nivel inferior se convierte en objeto de análisis del nivel superior. La cuestión operativa de un nivel inferior se transforma en el tema del siguiente nivel. Lo anterior significa que los estudiantes reflexionan, en un nivel superior, respecto de lo que hicieron en el nivel inferior. En un nivel inferior los estudiantes operan los conceptos sin que sepan lo que están haciendo. Los niveles propuestos por la EMR son análogos a los estadios de desarrollo cognitivo propuestos por Piaget (sensoriomotor, preoperatorio, operaciones concretas, operaciones formales) o los niveles de pensamiento geométrico de van Hiele. Los niveles propuestos en la EMR son: (i) situacional, en el cual las ideas se encuentran ancladas al contexto; (ii) referencial, donde se realizan esquematizaciones a través de modelos y descripciones; (iii) general, que involucra procesos de exploración, reflexión y generalización; y (iv) formal, en donde se usa notación convencional y se llevan a cabo procedimientos estándares. 4, 7, 10, 14

4. *Reinvención guiada.* Los docentes animan a los estudiantes para que desarrollen y expresen sus propias estrategias informales y, paulatinamente, con el apoyo adecuado del docente, las transforman en estrategias congruentes con el saber institucionalizado, las cuales pueden utilizar en otras situaciones. Así, desde el punto de vista de la EMR los profesores tienen un papel proactivo en el aprendizaje de los estudiantes. Además, los objetivos instruccionales deben considerar trayectorias didácticas a largo plazo. 14, 16

5. *Interacción.* La enseñanza de las matemáticas no es una actividad individual, sino una actividad social. Las interacciones alumno-alumno y alumnos-profesor favorecen la reflexión a partir de escuchar las ideas de los demás y por este medio se alcanzan niveles superiores de comprensión. Así, la EMR promueve las discusiones plenas y el trabajo en grupo, los cuales ofrecen a los estudiantes oportunidades para compartir sus estrategias e invenciones con sus compañeros. 14, 15

6. *Interconexión.* Los bloques de contenidos matemáticos (números y operaciones, álgebra, geometría, medida y manejo de datos) no son entidades separadas, sino elementos de un todo altamente estructurado. Los problemas son el medio para que los estudiantes integren todos esos contenidos, así como los procesos de razonamiento y justificación subyacentes.

Entre algunas propuestas instruccionales basadas en los principios anteriores podemos mencionar el trabajo de Van den Brink enfocado en el aprendizaje de la suma

y resta de números menores que 20, con base en el contexto de pasajeros que abordan y descienden del transporte público, la fábrica de caramelos o el tesoro del sultán para introducir conceptos del sistema decimal de Gravemeijer, un prototipo para la enseñanza interrelacionadas de fracciones, razones y proporciones elaborado por Streefland; una nueva aproximación para la enseñanza de matrices y cálculo discreto, de Lange; o las propuestas de Drijvers, Bakker o Doorman basadas en el uso de tecnologías digitales. 3, 14



Figura 1. Principios fundamentales de la EMR, Autoría propia

Características de las tareas en la EMR

Las tareas que se proponen en la EMR valoran el aprendizaje de las matemáticas no como un producto terminado, sino como el resultado de un proceso donde las matemáticas resultan prácticas y útiles.

No necesariamente hace referencia a situaciones que tienen un vínculo con el mundo real, sino a aquellas que pueden ser imaginadas, visualizadas, recreadas o representadas en la mente del estudiante, ante las cuales se pone en juego el sentido común y se vinculan las matemáticas. 13

Ubican al estudiante en situaciones interesantes en las cuales se circunscribe la actividad; estas no sólo se presentan verbalmente a partir de enunciados, sino también a partir de figuras, dibujos, fotografías, diagramas y otras visualizaciones.

Fundamentos de la EMR

Fundamentos ontológicos

Freudenthal argumenta que la matemática es una actividad humana y, por tanto, ésta debe enseñarse en conexión con la realidad de los estudiantes. La concepción de las matemáticas desde la perspectiva de la EMR es dinámica, en el sentido de que las acciones y procesos encaminados al desarrollo de estrategias matemáticas son el eje del proceso de instrucción. La matemática se concibe, entonces, como una herramienta que posibilita a los seres humanos organizar y comprender la realidad. La EMR comparte con la resolución de problemas la visión de que las matemáticas son la ciencia de los patrones. 6, 16

Fundamentos epistemológicos

La epistemología es una disciplina interesada en cuestiones relativas al conocimiento. Busca responder preguntas tales como: ¿Qué es el conocimiento? ¿Cómo llegamos a conocer algo? La EMR toma algunos elementos del constructivismo cognitivo, del constructivismo sociocultural y el aprendizaje reflexivo 9, debido a que considera relevantes las interacciones entre el sujeto y el objeto en la generación de nuevo conocimiento. El sujeto y objeto se modifican dialécticamente mediante diversas interacciones. Durante tales interacciones cada uno influye sobre el otro y se transforman como resultado de dicha interacción. Además, las producciones culturales (herramientas físicas y simbólicas) moldean las características del conocimiento que se construye a través de ellas. 15, 17

Fundamentos didácticos

La didáctica se interesa por la organización de los procesos de aprendizaje y enseñanza. En lo que refiere al fundamento didáctico, en la EMR se asumen principios que claramente corresponden con presupuestos de un aprendizaje basado en el descubrimiento. Así, los estudiantes en lugar de ser receptores de contenidos matemáticos se convierten en participantes activos en el proceso educativo, de forma que ellos mismos desarrollan todo tipo de herramientas y comprensiones matemáticas. 2, 8

En lugar de comenzar con abstracciones o definiciones que deben ser aplicadas después, es importante partir de contextos ricos que demanden una organización matemática. En otras palabras, contextos que puedan ser comprendidos e interpretados mediante herramientas matemáticas. De esta manera, mientras trabajan con problemas contextualizados, los estudiantes pueden desarrollar herramientas y comprensión matemáticas. Por lo tanto, la EMR

pretende capacitar a los estudiantes para que usen su comprensión y herramientas matemáticas para resolver problemas, es decir, se aprende matemáticas haciendo matemáticas.

En cuanto al escenario instruccional, se promueve que los estudiantes trabajen en pequeños grupos, dentro de los cuales discuten problemas contextualizados. El docente los estimula para que desarrollen sus propias herramientas informales para resolver las problemáticas planteadas. 16

Ventajas y desventajas de la EMR

Algunas ventajas de las tareas y escenarios de instrucción diseñados con base en el EMR son:

- El proceso de descubrimiento y refinamiento de los conceptos matemáticos permite que haya una integración sólida de tales conocimientos en su estructura mental, por lo que pueden recuperar dicho conocimiento cuando sea necesario.
- Al utilizar situaciones reales o que los estudiantes pueden imaginar, estos podrán mantener una motivación para aprender.
- Se fomenta el trabajo cooperativo y colaborativo.
- Los estudiantes aprenden a explicar sus ideas con claridad ya que deben exponer y explicar sus respuestas.

De igual manera las desventajas de la EMR incluyen las siguientes:

- Debido a la costumbre de recibir información por adelantado, los estudiantes tienen dificultades para encontrar respuestas por sí mismos.
- La diferencia de conocimientos previos.
- Requiere actividades que sean apropiadas para la situación de aprendizaje actual.
- Aún no se cuenta con propuestas de evaluación.

Conclusiones

La EMR sostiene que la matemática posee valor educativo, siempre que el alumno comprenda, participe y critique los modos en que esta disciplina organiza diversas esferas del entorno social y natural. 8

Esta perspectiva educativa reconoce la importancia de vincular las matemáticas con la vida real, fomentando una comprensión más profunda y práctica de la disciplina. Al conectar los conceptos matemáticos con situaciones cotidianas y problemas del mundo real, se estimula la capacidad de los estudiantes para aplicar sus conocimientos en contextos auténticos.

Además, esta aproximación promueve la exploración, la indagación y el pensamiento crítico, alentando a los estudiantes a cuestionar, descubrir y construir significados matemáticos en colaboración con sus pares.

En última instancia, la educación matemática realista no solo busca el dominio de conceptos numéricos o geométricos, sino que aspira a desarrollar personas con capacidad crítica, competentes y con habilidades matemáticas sólidas con las que puedan enfrentar los desafíos de un mundo en constante cambio.

Agradecimientos

Los autores agradecemos al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por el apoyo otorgado para la realización de este trabajo, a través de las becas de posgrado número 1235767 y 1228366.

Referencias

- [1] Arenas, R. D. M., Fernández, V. E. R., Rivadeneira, R. O. A., García, J. F., Cueto, B. A. L., & Isusqui, J. C. P. La educación matemática realista y su aplicación en el aula de clases. Lima: Editorial Mar Caribe; 2023.
- [2] Ausubel, D. P. The facilitation of meaningful verbal learning in the classroom. *Educational Psychologist* 1977; 12(2): 162-178.
- [3] Bressan, A., Zolkower, B., & Gallego, M. F. Los principios de la educación matemática realista. En: Alagia, H., Bressan, A., & Sadowsky, P., editores. Reflexiones teóricas para la educación matemática. Buenos Aires: Libros del Zorzal; 2005: 69-96.
- [4] Burger, W. F. & Shaughnessy, J. M. Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education* 1986; 17(1): 31-48.
- [5] Doorman, M., Drijvers, P., Dekker, T., van den Heuvel-Panhuizen, M., de Lange, J., & Wijers, M. Problem solving as a challenge for mathematics education in The Netherlands. *ZDM* 2007; 39: 405-418.
- [6] Freudenthal, H. *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers; 1991.
- [7] Freudenthal, H. *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing; 1972.
- [8] Godino, J. D. Bases epistemológicas e instruccionales del Enfoque Ontosemiótico en Educación Matemática. 2018. Recuperado el 18 de noviembre de <https://bit.ly/3sPci5E>
- [9] Parra S., H. Claves para la contextualización de la matemática en la acción docente. *Omnia* 2013; 19(3): 74-85.
- [10] Piaget, J. *Epistemología genética*. Buenos Aires: Solpus; 1977.
- [11] Schön, D. *The reflective practitioner: how professionals think in action*. New York: Basic Books; 1983.
- [12] Treffers, A. Whiskobas and Freudenthal realistic mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* 1991; 25: 89-103.
- [13] Van Den Heuvel-Panhuizen, M. Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. *Freudenthal Institute CD-rom for ICME9*; 2000: 1-32.
- [14] Van Den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. Realistic mathematics education. En: Lerman, S., editor. *Encyclopedia of mathematics education*. Dordrecht: Springer; 2020: 713-717.
- [15] Vygotsky, L. S. *Mind in society: The development of higher mental processes*. Cambridge: Harvard University Press; 1978.
- [16] Wubbels, T., Korthagen, F., & Broekman, H. Preparing teachers for realistic mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* 1997; 32: 1-28.
- [17] Zolkower, B., Bressan, A. M., Pérez, S., & Gallego, M. F. From the bottom up—Reinventing realistic mathematics education in Southern Argentina. *International Reflection in the Netherlands Didactics of Mathematics: Vision on and Experiences with Realistic Mathematics Education* 2020, 133-166.