

Resolución de problemas como modelo didáctico

Problem solving as a didactic model.

Laura I. Badillo-Hernández^a, Sergio Caballero-Barrera^b

Abstract:

The purpose of this article is to generate an approach of teachers to the didactic model of Problem Solving, which affirms that mathematics is learned by solving problems, where the teacher seeks to create a mathematical microcosm in the classroom guided not by the content but by the learning processes that will help the student to develop fundamental elements of mathematical thinking. It also details the characteristics of what is considered a problem, the role of the teacher, the application environment and what is sought to be evaluated from this perspective. Problem Solving allows students to experiment with mathematical objects, formulate and justify conjectures, favoring better learning in students by promoting critical and reflective thinking.

Keywords:

Problem solving, math education, didactic model, learning.

Resumen:

El propósito de este artículo es generar un acercamiento de los docentes a la resolución de problemas como modelo didáctico. En esta perspectiva se afirma que se aprende matemáticas al resolver problemas; es decir, tareas para las cuales no se conoce un procedimiento o ruta para obtener la solución de forma inmediata. Desde el punto de vista de la resolución de problemas, la función del docente es crear un microcosmos matemático en el salón de clase, orientado por el objetivo instruccional de promover habilidades subyacentes en los elementos fundamentales del pensamiento matemático. Se explican las características de las tareas que se consideran como problemas. También se describe el papel del docente en el proceso de instrucción, el entorno de aplicación y lo que se busca evaluar bajo esta perspectiva. La resolución de problemas permite experimentar con objetos matemáticos, formular y justificar conjeturas favoreciendo un mejor aprendizaje en los estudiantes al promover el pensamiento crítico y reflexivo.

Palabras Clave:

Resolución de problemas, educación matemática, modelo didáctico, aprendizaje, enseñanza.

Introducción

En la docencia de matemáticas, cualquier profesor, independientemente del nivel en el que enseñe, en algún momento de su vida profesional puede plantearse las siguientes preguntas: ¿Mis alumnos comprenden los temas que explico?, ¿Qué puedo hacer para que mis alumnos aprendan matemáticas? Es aquí cuando la pasión y dedicación por su labor juegan un papel importante en su desempeño, y comienza la búsqueda por herramientas e información para mejorar nuestras clases. Sin embargo, surge una interrogante mayor ¿Que busco y donde lo encuentro?

Al mismo tiempo, estamos conscientes del desafío que enfrenta cualquier docente de matemáticas al intentar enseñar esta materia, no solo buscando una que el alumno obtenga buena calificación, sino también la

comprensión real de lo que implica saber matemáticas. Es por esto que surge la didáctica de las matemáticas, educación matemática, o también llamada matemática educativa, es una disciplina que se enfoca en los fenómenos y problemáticas que surgen en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas (Waldegg, 1998). Esta tiene diferentes objetivos, como son los pragmáticos que buscan la mejora en la práctica de enseñanza y desempeño de los estudiantes (Sierpinski y Kilpatrick, 1998), mientras que los objetivos de carácter científico se enfocan en la creación de teorías o modelos asociados con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Entre las contribuciones de la matemática educativa incluyen experiencias de aprendizaje y propuestas de mejora tanto para estudiantes como para la formación de docentes en el área, fundamentadas en diversas teorías y propuestas metodológicas.

^aLaura I. Badillo-Hernández, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, <https://orcid.org/0009-0008-9057-461X>

^bSergio Caballero Barrera, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, <https://orcid.org/0009-0008-4147-8808>, Email: ca477756@uaeh.edu.mx

Existen varias aproximaciones didácticas que podrían ayudar a guiar al docente en algunas de sus clases, todas tienen diferentes enfoques, como la forma de presentar un tema; por ejemplo, la Teoría de situaciones didácticas de Guy Brousseau donde por medio de situaciones llamadas adidácticas (juegos) se espera que el alumno aprenda (Castillo y Popayán, 2017). La teoría de variación se refiere a cómo el profesor presenta las secuencia de ejercicios y cómo el alumno aprende (Ling, 2012). También existen otras aproximaciones que se enfocan en lo que se espera que realice los alumnos como es la teoría de la Educación Matemática Realista (EMR) por Hans Freudenthal donde supone que la matemática debe ser sencilla, se pretende que los estudiantes entiendan, reflexionen y conceptualicen los algoritmos (López et al., 2023) o la teoría de Models and Modeling de Richard Lesh, donde se busca que el alumno diseñe y perfeccione modelos en una situación contextualizada (Lesh, 2010).

Algunos de los precursores de la resolución de problemas han sido destacados matemáticos como George Polya, Paul Halmos, Jaques Hadamard, y personas que iniciaron su actividad como matemáticos y posteriormente se interesaron en la educación matemática como Alan Schoenfeld, Jeremy Kilpatrick, James Hiebert, Richard Lesh o Manuel Santos, por mencionar solo algunos de ellos.

Resolución de problemas como modelo didáctico

La resolución de problemas no es la creación de una sola persona, sino que es producto de las ideas aportadas por diversos matemáticos y educadores matemáticos.

Ahora bien, hablemos de las generalidades más relevantes de Resolución de Problemas que en adelante nos referiremos a ello como PS por sus siglas en inglés, para esto es necesario comprender la diferencia entre lo que es un problema y un ejercicio matemático. Para Schoenfeld (1983) un problema es solo un problema si no se tiene idea de cómo resolverlo. Si un problema no tiene "sorpresas" y puede ser resuelto por medio de rutinas o procedimientos familiares, sin importar la dificultad, entonces se trata de un ejercicio. Aquí surge entonces una pregunta que podría inquietar a cualquiera, si estoy ante un problema, ¿cómo hago para resolverlo? En PS no hay rutas directas, pero sí hay un pensamiento que rige la forma de resolverlos, según sus autores, el fundamento ontológico de las matemáticas, es que son la ciencia de los patrones; es decir, debemos buscar siempre un patrón, algo que nos indique como es el comportamiento de las variables en cuestión y eso nos dará la solución. Esto es muy abstracto y posiblemente puede generar algo de confusión, así que, permítanos explicar un poco sobre el panorama de lo que, según los

diferentes autores, ocurre en el alumno al momento de resolver un problema matemático.

Polya quien en su libro *How to solve it?* (1965) refiere que se transita por cuatro etapas o fases al momento de buscar una solución a una problemática matemática, he aquí una explicación de Meneses y Peñaloza (2019) sobre estas fases:

1. Entender el problema. Es necesario identificar qué es lo que nos solicita el enunciado, para esto se pueden plantear preguntas como ¿Entiendes todo lo que dice? ¿Sabes a qué quiere llegar? ¿Hay suficiente información?
2. Diseñar un plan. Utilizando sus conocimientos, creatividad e imaginación el estudiante deberá diseñar una estrategia. Algunas de las preguntas que presentan son ¿Habías visto un problema similar? ¿Puedes replantearlo en tus propias palabras?
3. Ejecutar el plan. Se pone en práctica las estrategias tomando su tiempo en esto, el mismo autor recomienda que si no se alcanza el éxito, se tome un respiro y continúe más tarde.
4. Mirar hacia atrás. Este paso es de suma importancia pues es el momento de revisar el trabajo realizado para evitar errores y en caso de haberlo realizar las correcciones pertinentes.

Otro aporte de Polya es la propuesta del uso de heurísticas, que podríamos definir como sugerencias que nos permiten encontrar directa o indirectamente la solución. Algunas de ellas son: reformular el problema en términos más sencillos, hacer representaciones gráficas y/o simbólicas (ecuaciones), estudiar las posibles soluciones, etc.

Otro autor de interés es Alan Schoenfeld quien propone que el procesos de resolución de problemas está definido con base a cuatro variables: (1) los recursos o conocimientos previos, integrado por todo lo que el estudiante conoce de matemáticas sean correctos o no, (2) las heurísticas, retomadas de Polya, (3) el control, es decir, la capacidad del estudiante de visualizar si la ruta tomada es correcta debe replantearse y (4) los sistemas de creencias, el cómo entiende y afronta las matemáticas el alumno (Patiño et al., 2021) y (Barrera et al, 2021).

Algo que cabe resaltar es que RP no está centrado en la solución correcta del problema, muchas veces no es tan interesante para quien lo aplica. Resolver un problema en esta perspectiva, lleva aparejado el formular y extender a nuevos problemas, con la finalidad de establecer conexiones para estructurar un entendimiento más robusto. Las imágenes mentales que los estudiantes elaboran permiten dar sentido a los conceptos o ideas, al permitirles organizar y reflexionar sobre sus conocimientos previos y ligarlos con los nuevos conocimientos. (Barrera et al., 2021)

El desarrollo de entendimiento es un proceso gradual y dinámico que se va robusteciendo en función de la necesidad de responder y resolver cuestionamientos que emerjan dentro y fuera de una comunidad de aprendizaje en la que, a través de la reflexión y comunicación de ideas, se construyen significados compartidos por los integrantes de ésta (Santos, 2014, p. 23).

Es decir, lo que realmente orienta a esta aproximación es que el alumno ponga en práctica los elementos esenciales del pensamiento matemático, entre los que se encuentra operar con los objetos matemáticos, con la finalidad de identificar patrones y regularidades, realizar observaciones, formular conjeturas y demostrarlas, así como comunicar resultados y formular preguntas (Barrera et al., 2021) también se busca que los estudiantes desarrollen un aprendizaje con entendimiento de las ideas matemáticas, lo cual involucra reflexionar sobre las conexiones entre objetos, ideas o procedimientos propios de la actividad matemática. Este modelo didáctico, tiene una perspectiva constructivista, tanto cognitiva como social, el primero porque supone que cada persona construye su propio conocimiento activamente cuando se abordan problemas que desequilibran sus estructuras cognitivas (Simon, 1994), y el segundo porque el aprendizaje es un proceso que se lleva a cabo en una comunidad, donde se construyen significados o entendimientos considerados compartidos (Cobb et al., 1991)

Aplicación de PS en el aula

Ahora bien ¿Cuál es el papel del docente en todo esto? primero que nada debe proponer el problema recordando que existen diferentes tipos: 1) rutinarios, el énfasis está en aprender la matemática para aplicarla cuando se resuelven problemas, después del aprendizaje de un tema específico y 2) no rutinarios, o problemas de proceso, que ponen énfasis en la utilización de estrategias heurísticas para trabajar problemas no conocidos. Generalmente no son específicos a un dominio o tema específico (Piñeiro et al., 2015). En los últimos años son más adecuados para aplicar bajo el enfoque de resolución de problemas y es recomendable que el profesor resuelva por todas las rutas posibles el problema, esto nos asegura que puede predecir algunas de las soluciones de los estudiantes.

Otro aspecto a tener en cuenta es la cantidad de alumnos participantes. De acuerdo con Santos-Trigo (2014), resolver problemas en grupos pequeños es lo ideal, ya que el trabajar en equipo favorece la discusión matemática permitiendo a los estudiantes la oportunidad de colaborar y desarrollar estrategias para defender sus ideas matemáticas, además de evaluar el potencial del procedimiento de solución tomado.

Cabe resaltar que durante la resolución del problema, el docente no debe dar la solución correcta directamente al estudiante, sino que necesita mantenerse al margen, observando parte de las discusiones de los equipos, la única intervención que puede realizar será en forma de heurísticas para guiar al grupo sobre las rutas decididas. Aquí un ejemplo de esto:

Si el docente ve que los alumnos no comprenden del todo el problema, puede realizar preguntas como ¿De qué trata el problema?, ¿Hay datos que se conocen?, ¿Pueden representar la información de otra forma (tablas, gráficas, ecuaciones, etcétera)?, ¿Podrían calcular algún dato a partir de los que ya tienen? Cuando el equipo elija una estrategia y comience a trabajar en ella, si el docente nota que se han estancado en un punto sin salida, puede preguntar ¿Lo que plantearon, les ayuda a ver la solución?, ¿Habría otra forma de resolverlo? Incluso a veces los estudiantes van por un buen camino pero ya no son capaces de identificar cuales son las dificultades que se presentan en su procedimiento, es aquí donde el profesor puede pedir que le expliquen paso a paso lo realizado, justificando el porqué de sus acciones y recordándoles que es lo que solicita el problema.

Desde el punto de vista de Polya (1963, 1973) citado en Barrera et al. (2021), el rol del profesor es orientar y apoyar la actividad del estudiante a través de preguntas que lo ayuden a avanzar en el proceso de resolución de problemas. El punto anterior es esencial para fomentar un proceso fundamental en cualquier aproximación didáctica basada en la resolución de problemas: el método inquisitivo (Santos-Trigo, 2014).

¿Cómo evaluar resolución de problemas? Es importante analizar el significado de la solución, verificar las operaciones y pensar en conexiones o extensiones del problema. De acuerdo con Santos-Trigo (2014) el proceso de evaluación consta de tres componentes: 1) Entendimiento, el estudiante demuestra que ha entendido el problema, 2) Inspección, está relacionada con la habilidad de seleccionar y usar estrategias de resolución, presentar un plan y llevarlo a cabo y, 3) Revisión, de los aspectos relacionados con lo razonable de la solución y la extensión del problema.

Ventajas y desventajas de resolución de problemas

Todo modelo didáctico tendrá sus ventajas y desventajas que el docente necesita considerar antes de aplicarlo en el aula. Empecemos primero con sus ventajas:

- Atribuye mayor importancia a los procedimientos que a los resultados, recordemos que PS se enfoca en el desarrollo y práctica de los

elementos fundamentales del pensamiento matemático.

- Es desafiante para los estudiantes, ya que puede generar el interés y emoción en el alumno al resolver o acercarse a la solución.
- Es una herramienta útil para repasar temas previos, como Shoenfeld indica en sus cuatro variables, los conocimientos matemáticos correctos o no jugarán un papel importante durante la resolución del problema. El docente podrá identificar si existen fallas en los conceptos matemáticos del alumno, permitiendo aclararlos.

Entre las desventajas de resolución de problemas:

- Su uso está planteado para grupos pequeños, puesto que el docente debe poder percibir todos los procesos que realiza cada uno de los estudiantes.
- El tiempo de resolución para un problema es un factor a considerar, ya que si es realmente un problema matemático el alumno tardará horas o días en formular una ruta que considere correcta.
- Requiere que el docente analice cuidadosamente el problema a plantear, resolverlo por diferentes caminos, e incluso estar preparado para alguna nueva ruta propuesta por los estudiantes.

Conclusiones

Si bien estas son algunas de las aproximaciones didácticas que se ocupan en la enseñanza de las matemáticas, no son las únicas y cabe resaltar que un docente no está obligado a orientar su curso o carrera profesional a una en específico, la didáctica de las matemáticas se encuentra en constante cambio puesto que las condiciones de enseñanza y aprendizaje están sujetas a un sin fin de variables, así que los métodos y prácticas siempre cambiarán. La resolución de problemas es una opción que consideramos útil en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, desde su diseño, aplicación y evaluación. Invitamos al lector a explorar más detalle sobre este tema y sus beneficios que se pueden obtener al ponerlo en práctica, tanto como para los alumnos como para el docente.

Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por el apoyo otorgado a 1235094 y 1220652 para la realización de este trabajo.

Referencias

[1] Barrera, F., Reyes, A., Campos, M. y Álvarez, C. (2021). Resolución de problemas en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. *Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*. 9. 10-17.

[2] Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 33-115.

[3] Castillo, V. A., y Popayán, Y. (2017). Aplicación de la teoría de las situaciones didácticas a las Ciencias Sociales. *Educere*, 21(70), 539-555.

[4] Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., Nicholls, J., Wheatley, G., Trigatti, B., & Perlwitz, M. (1991). Assessment of a Problem-Centered Second-Grade Mathematics Project. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(1), 3-29. <https://doi.org/10.2307/749551>

[5] Lesh, R. (2010). Tools, Researchable Issues and Conjectures for Investigating what it Means to Understand Statistics (or other Topics) Meaningfully. *Journal of Mathematical Modeling and Application*, 1(2), pp. 16-48.

[6] Ling Lo, M. (2012). Variation theory and the improvement of teaching and learning. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

[7] López P et al. (2023). Secuencia Didáctica para la comprensión inicial de Función Derivada bajo la perspectiva de la Educación Matemática Realista.

[8] Marton, F., & Booth, S. (1997). Learning and awareness. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

[9] Meneses, M. & Peñaloza, D. (2019). Método de Pólya como estrategia pedagógica para fortalecer la competencia resolución de problemas matemáticos con operaciones básicas. *Zona Próxima*, 31, 7-25.

[10] Patiño, K. et al. (2021). La resolución de problemas matemáticos y los factores que intervienen en su enseñanza y aprendizaje. *Revista Boletín Redipe*. 10. 3.

[11] Piñeiro, J. et al. (2015). ¿Qué es la resolución de problemas?. *Boletín REDIPE*. 4. 6-14.

[12] Polya, G. (1963). On learning, teaching and learning teaching. *The American Mathematical Monthly* 70, 605-619.

[13] Polya G. (1973). How to solve it: A new aspect of mathematical method. Princeton University Press, Princeton.

[14] Santos, L. M. (2014). La resolución de problemas Matemáticos Fundamentos Cognitivos. Trillas.

[15] Schoenfeld A. (1983) The wild, wild, wild, wild, wild world of problem solving: A review of sorts, *For the Learning of Mathematics*, 3, 40-47.

[16] Sierpinski, A., & Kilpatrick, J. (Eds.) (1998). Mathematics education as a research domain: A search for identity. Dordrecht: Kluwer Academic.

[17] Waldegg, G. (1998). La educación matemática ¿una disciplina científica? *Colección Pedagógica Universitaria* 29, 13-44.