https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/prepa1/issue/archive

UNO Sapiens Boletín Científico de la Escuela Preparatoria No. 1

Publicación semestral, Vol. 7, No. 13 (2024) 1-11

ISSN: 2683-2054

Aplicación de integrales dobles y vectores en el cálculo de la densidad de circulación de fluidos.

Application of double integrals and vectors in the calculation of the density of fluid circulation.

Jonny E. Rodríguez-Diaz [a], Elmer M. Rivera-González [b], Freddy J. Altamirano-Vásquez [c], Cliffor J. Herrera-Castrillo [d]*

Abstract:

Understanding the applications of double integrals in the calculation of fluid flow density is crucial for the design and optimization of fluid flow related systems and devices in various fields of engineering and physics. This paper aims to analyze the applications of double integrals in the calculation of fluid circulating density in a vector field. A qualitative approach was employed, and documentary design was used as a descriptive study method. Fundamental concepts such as integrals, vector fields, fluids, volume of solids and volumetric flow, as well as properties and types of educational evaluations relevant to this research are examined in this study. Data collection was conducted by observing YouTube videos, interviewing university professors, and reviewing textbooks and journal articles related to double integrals, vector fields, and fluids. In addition, an analysis of the information was performed using the triangulation of theories, considering different perspectives of researchers on the subject to reach conclusions and provide solutions to two unpublished problems posed, involving physical and mathematical variables related to the interdisciplinarity of integral calculus, vector calculus and fluid mechanics. For the analysis of the results, two problems were solved to put into practice the theoretical knowledge described in the frame of reference and meet the objectives of the study.

Keywords:

Double integrals, density, fluid, volumetric flow, vector field, educational evaluation.

Resumen:

La comprensión de las aplicaciones de las integrales dobles en el cálculo de la densidad de circulación de fluidos es crucial para el diseño y la optimización de sistemas y dispositivos relacionados con el flujo de fluidos en diversos campos de la ingeniería y la física. Este artículo tiene como objetivo analizar las aplicaciones de integrales dobles en el cálculo de la densidad de circulación de fluidos en un campo vectorial. Se empleó un enfoque cualitativo y se utilizó el diseño documental como método de estudio descriptivo. En este estudio se examinan conceptos fundamentales como integrales, campos vectoriales, fluidos, volumen de sólidos y caudal volumétrico, así como propiedades y tipos de evaluaciones educativas relevantes para esta investigación. La recolección de datos se llevó a cabo mediante la observación de videos en YouTube, entrevistas a profesores universitarios y la revisión de libros de texto y artículos de revistas relacionados con las integrales dobles, los campos vectoriales y los fluidos. Además, se realizó un análisis de la información utilizando la triangulación de teorías, considerando diferentes perspectivas de investigadores sobre el tema para llegar a conclusiones y dar solución a dos problemas inéditos planteados, que involucran variables físicas y matemáticas relacionadas con la interdisciplinariedad del cálculo integral, el cálculo vectorial y la mecánica de fluidos. Para el análisis de los resultados, se resolvieron dos problemas con el fin de poner en práctica los conocimientos teóricos descritos en el marco de referencia y cumplir los objetivos del estudio.

Palabras Clave:

Integrales dobles, densidad, fluido, caudal volumétrico, campo vectorial, evaluación educativa

[a] Jonny E. Rodríguez Diaz, Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua, https://orcid.org/0000-0003-3448-1335, Email: jonny.rodriguez20503173@estu.unan.edu.ni

[b] Elmer M. Rivera González, Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua, https://orcid.org/0000-0002-8664-4493, Email: elmer.rivera20502975@estu.unan.edu.ni

[c] Freddy J. Altamirano Vásquez, Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua, https://orcid.org/0000-0001-9039-1647, Email: freddy.altamirano20502964@estu.unan.edu.ni

[d] Cliffor J. Herrera-Castrillo, Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua, https://orcid.org/0000-0002-7663-2499, Email: cliffor.herrera@unan.edu.ni

Fecha de publicación: 05/07/2024

Introducción

La presente investigación tiene como objetivo proporcionar información sobre las integrales dobles en el cálculo de la densidad de circulación de fluidos en un campo vectorial, así como plantear problemas que apliquen los conceptos y fórmulas pertinentes para abordar el tema y cumplir los objetivos establecidos. Esta investigación será de gran utilidad tanto para estudiantes universitarios como para profesores interesados en esta temática. La complejidad de este contenido dificulta su comprensión, debido a la falta de documentos o libros que lo aborden de manera clara y sencilla. Por lo tanto, se ha llevado a cabo un análisis científico para lograr una comprensión adecuada de la temática.

Uno de los desafíos principales que surgen al desarrollar contenidos de Física es la falta de recursos, especialmente de materiales prácticos y documentos interactivos que faciliten el aprendizaje. En la cultura actual, es común que los estudiantes prescindan del uso de libros de texto y recurran principalmente a Internet como fuente de información. Sin embargo, esto plantea el problema de asegurar la confiabilidad de la selección de información disponible en línea [1].

La falta de recursos en la enseñanza de la Física puede tener un impacto significativo en el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Los recursos juegan un papel fundamental en la comprensión de conceptos físicos complejos y en la aplicación práctica de teorías y principios. Veamos algunas formas en las que la falta de recursos puede afectar la enseñanza de la Física:

- Limitaciones en la experimentación: La Física es una disciplina experimental, y la falta de recursos dificulta la realización de experimentos en el aula. La experimentación es crucial para que los estudiantes comprendan los principios físicos y desarrollen habilidades de pensamiento crítico y resolución de problemas. Sin acceso a equipos de laboratorio, materiales y herramientas, los estudiantes pueden perder la oportunidad de explorar y experimentar con fenómenos físicos de manera práctica [17] [18].
- Dificultad para visualizar conceptos abstractos: La Física implica la comprensión de conceptos abstractos, como fuerza, movimiento, electricidad y magnetismo. Los recursos visuales, como animaciones, simulaciones y gráficos interactivos, desempeñan un papel crucial en la visualización de estos conceptos. La falta de recursos visuales puede dificultar el proceso de aprendizaje, ya que los estudiantes pueden tener dificultades para imaginar y comprender los fenómenos físicos abstractos [19] [20].
- Escasez de materiales de apoyo: Los materiales de apoyo, como libros de texto, guías de estudio y ejercicios prácticos, son fundamentales para el aprendizaje autodirigido y la práctica de los conceptos físicos [1]. La falta de recursos puede limitar el acceso de los estudiantes a estos materiales, lo que dificulta su capacidad para estudiar de manera independiente y adquirir un conocimiento sólido de la Física.
- Dependencia de fuentes de información no confiables: En la actualidad, los estudiantes tienden a recurrir a Internet como fuente principal de información. Sin embargo, la abundancia de información en línea plantea el desafío de evaluar la confiabilidad y la precisión de los recursos disponibles [21]. La falta de recursos en el aula lleva a una mayor dependencia de fuentes de información no confiables, lo que genera conceptos erróneos y una comprensión deficiente de los principios físicos.

Para abordar estos desafíos, es esencial que los educadores busquen alternativas y soluciones creativas. Esto puede incluir la búsqueda de recursos en línea gratuitos, la colaboración con otras instituciones educativas para compartir materiales y el desarrollo de estrategias de enseñanza que fomenten la experimentación y la visualización de conceptos. Asimismo, es importante abogar por una mayor inversión en recursos educativos y promover la conciencia sobre la importancia de proporcionar a los estudiantes las herramientas necesarias para un aprendizaje efectivo en el campo de la Física.

Se ha propuesto describir conceptos y propiedades fundamentales de disciplinas interrelacionadas, como cálculo, álgebra, estructura de la materia y evaluación educativa, que servirán como componentes teóricos para analizar y aplicarlos en la resolución de problemas mediante el estudio de estas aplicaciones. De esta manera, se iniciará la explicación del tema abordando los aspectos teóricos. Una vez que se haya comprendido toda la teoría, se podrá pasar a la práctica a través de la resolución de problemas que involucren varias asignaturas.

Para aplicar los conceptos teóricos en la resolución de problemas prácticos, se utilizan herramientas matemáticas como las integrales dobles y los vectores en el cálculo de la densidad de circulación de fluidos.

En primer lugar, las integrales dobles son una extensión de las integrales simples y se emplean para calcular áreas y volúmenes en dos dimensiones [22]. En el contexto de la densidad de circulación de fluidos, las integrales dobles permiten determinar la masa o el flujo de un fluido a través de una región bidimensional.

Para calcular la densidad de circulación de fluidos, se traza una curva cerrada dentro de la región y se realiza la integral de línea del campo vectorial a lo largo de esa curva. Esta integral de línea se descompone en una integral doble utilizando el teorema de Green, que establece una relación entre la integral de línea y la integral doble de la divergencia del campo vectorial sobre la región encerrada por la curva [23].

La divergencia de un campo vectorial proporciona información sobre cómo el flujo se expande o se concentra en cada punto [13]. En el caso de la densidad de circulación de fluidos, la divergencia permite comprender cómo el fluido se acumula o se dispersa en la región.

Por lo tanto, al calcular la integral doble de la divergencia del campo vectorial sobre la región encerrada por la curva, se obtiene la densidad de circulación de fluidos. Este valor representa la cantidad de fluido que circula alrededor de la curva cerrada en la región.

La integral doble de f sobre D se define como la integral de f sobre R:

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_R f(x,y)dA$$

Se dice que f es integrable sobre D si la integral de f sobre R existe. El valor de la integral no depende de la elección concreta de R pues f es cero fuera de D [2].

La fórmula antes mencionada se refiere a la relación entre la integral doble de una función $f(x,y)$ sobre un dominio D y la integral doble de la misma función sobre una región R que contiene a D. A continuación, se presentan algunos ejemplos para ilustrar el uso de esta fórmula:

Ejemplo: Calcular el área de un círculo de radio

$$A = \iint_D 1\, dA$$

Donde la función $f(x,y) = 1$ representa una función constante igual a 1 en todo el dominio D, que en este caso es el círculo. La integral doble calcula la suma infinitesimal de los valores de la función constante 1 sobre el círculo.

Utilizando coordenadas polares, se puede transformar la integral doble en:

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^r 1\,.\, r\, dr\, d\theta$$

Integrando con respecto a r primero y luego con respecto a θ, se obtiene:

$$A = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}\, r^2\right]_0^r d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\, r^2\, d\theta = \frac{1}{2} r^2 \int_0^{2\pi} d\theta$$

La integral de $d\theta$ sobre el intervalo $[0, 2\pi]$ es simplemente 2π, por lo que se obtiene:

$$A = \frac{1}{2}\, r^2 . 2\pi = \pi r^2$$

Por lo tanto, el área del círculo de radio r es πr^2.

En resumen, la integral doble de una función $f(x,y)$ sobre un dominio D se calcula sumando infinitesimalmente los valores de la función sobre el dominio. Esta herramienta matemática es útil para calcular áreas, volúmenes y otros conceptos relacionados con funciones de dos variables.

En el ámbito de la física, se hace referencia a un vector como un segmento de línea en el espacio que se extiende desde un punto hacia otro, lo cual implica que tiene dirección y sentido. Los vectores se utilizan en física para representar magnitudes vectoriales [3].

Los vectores están relacionados con el cálculo de la densidad en el sentido de que pueden utilizarse para representar y describir magnitudes vectoriales, como la velocidad y la velocidad del flujo de un fluido. En el contexto del cálculo de la densidad de un fluido, se utilizan vectores para representar la velocidad y la dirección del flujo en cada punto.

Cuando se trata de determinar la densidad de un fluido en un campo vectorial, se aplica el concepto de integral de línea. Esta integral de línea se utiliza para calcular la circulación del campo vectorial a lo largo de una trayectoria cerrada. En el caso de un fluido en movimiento, la circulación del campo vectorial está relacionada con la densidad del fluido.

Al calcular la densidad de circulación de un fluido en un campo vectorial, se aplican integrales dobles. Estas integrales permiten evaluar y sumar las contribuciones de la velocidad del flujo en cada punto de una región determinada. Al integrar la velocidad del flujo en el plano, se obtiene la densidad de circulación, que representa la cantidad de flujo que atraviesa una superficie en una unidad de tiempo.

La densidad de circulación de fluidos se refiere a una magnitud física que describe la intensidad de la circulación de un fluido en un campo vectorial. Es una medida de la cantidad de flujo que atraviesa una superficie dada por unidad de área en un intervalo de tiempo determinado. La densidad de circulación se expresa típicamente en unidades de masa o volumen por unidad de área por unidad de tiempo. Esta cantidad es importante en el estudio de la dinámica de fluidos, ya que proporciona información sobre los patrones de flujo y las propiedades del fluido en un sistema dado [4] [7] [8].

Algunas aplicaciones de lo anterior:

- Aerodinámica: En el campo de la aerodinámica, la densidad de circulación de fluidos es utilizada para estudiar el flujo de aire alrededor de diferentes objetos, como alas de aviones o perfiles aerodinámicos. Al calcular la densidad de circulación, los ingenieros pueden evaluar la eficiencia de los diseños aerodinámicos y optimizar la sustentación y resistencia del objeto en movimiento [24].

- Hidrodinámica: La densidad de circulación también se aplica en el estudio de los fluidos en movimiento, como el agua en ríos o canales. En este caso, se utiliza para analizar la circulación del agua y comprender cómo se distribuye la velocidad y la presión en el flujo. Esto resulta útil para el diseño de estructuras hidráulicas, como presas, diques o sistemas de drenaje, y para la gestión adecuada de recursos hídricos [25].

La densidad de circulación de fluidos tiene diversas aplicaciones prácticas, desde la aerodinámica en el diseño de aviones hasta la hidrodinámica en el estudio de corrientes de agua. Permite comprender y analizar el flujo de fluidos alrededor de objetos o en sistemas naturales, lo que contribuye al desarrollo de mejores diseños y a una gestión más eficiente de los recursos.

El propósito de este documento es analizar, describir y aplicar conceptos, propiedades y principios relacionados con las integrales dobles en el cálculo de la densidad de circulación de un fluido en un campo vectorial. Este tema presenta desafíos y oportunidades, requiriendo un análisis científico de las variables involucradas y su aplicación práctica a través de la resolución de problemas. Dado que no existe una fuente clara y sencilla que aborde este tema, este trabajo será un valioso aporte para la comunidad científica y educativa, beneficiando a estudiantes universitarios y profesores que deseen ampliar sus conocimientos sobre el tema y utilizarlos en diversos campos de estudio y enseñanza de manera precisa y confiable.

La comunidad científica y educativa se beneficiará de este documento de varias maneras. En primer lugar, proporcionará una fuente clara y completa de información sobre el tema de las integrales dobles y su aplicación en el cálculo de la densidad de circulación de un fluido en un campo vectorial. Esto permitirá a los investigadores y académicos tener acceso a un recurso confiable que les ayudará a comprender y profundizar en este tema específico.

Además, este documento será de gran utilidad para los estudiantes universitarios que estén estudiando disciplinas científicas y técnicas relacionadas, ya que les proporcionará una explicación clara y concisa de los conceptos y principios fundamentales. Esto les permitirá adquirir una comprensión sólida de las integrales dobles y su aplicación en el cálculo de la densidad de circulación de un fluido, lo cual es esencial para su formación académica y su futura práctica profesional.

Asimismo, los profesores se beneficiarán al contar con un recurso confiable y completo que podrán utilizar como referencia en sus clases. Esto les permitirá enseñar de manera más efectiva y precisa, proporcionando a sus estudiantes una base sólida en el tema y fomentando un aprendizaje más profundo y significativo.

La fiabilidad de los resultados se garantizará a través de varias medidas:

- Fuentes confiables: La investigación se basará en contribuciones de profesores universitarios, quienes son expertos en el campo del cálculo integral. Además, se utilizarán libros de cálculo integral reconocidos y proyectos de investigación relacionados con el tema. Estas fuentes aportan autoridad y experiencia, lo que contribuye a la fiabilidad de los resultados.
- Revisión por pares: Antes de ser publicado, el documento será sometido a un proceso de revisión por pares, en el cual expertos en el campo evaluarán su calidad y rigor científico. Esta revisión garantiza la precisión y la confiabilidad de los resultados presentados.
- Metodología rigurosa: El enfoque principal de este estudio se centra en la solución de problemas de cálculo de densidad de circulación de fluidos en campos vectoriales mediante el uso de integrales dobles. Se seguirá una metodología rigurosa, basada en principios matemáticos sólidos y fundamentada en teorías y conceptos bien establecidos. Esto asegura la validez de los resultados obtenidos.
- Validación experimental: Donde sea posible y apropiado, se buscará la validación experimental de los resultados teóricos obtenidos. Esto implica realizar experimentos o comparar los resultados con datos experimentales existentes para confirmar su veracidad y confiabilidad.

En conjunto, estas medidas garantizan la fiabilidad de los resultados presentados en el documento. Se busca asegurar que la investigación esté fundamentada en conocimientos sólidos, revisada por expertos y respaldada por la literatura académica existente, lo que brinda seguridad, viabilidad y confiabilidad en los resultados obtenidos..

La importancia de esta investigación científica radica en enriquecer el conocimiento de aquellos interesados en comprender más sobre la circulación de fluidos, sus características, campos vectoriales y propiedades fundamentales de integración. Estos conocimientos son útiles para abordar problemas de la vida cotidiana de manera práctica y aplicada.

Por ejemplo, el cálculo de la densidad de un fluido utilizando integrales dobles puede ser utilizado para determinar el tipo de fluido presente en un sistema, como el agua en una piscina o el aceite en una máquina. Esto es especialmente relevante en áreas como la industria alimentaria, donde es necesario asegurar la calidad y la

composición adecuada de los líquidos utilizados en la producción de alimentos.
Además, estas técnicas de cálculo también pueden aplicarse para determinar si un objeto flotará en un líquido en función de su densidad. Por ejemplo, al calcular la densidad de un barco y compararla con la densidad del agua, es posible determinar si el barco flotará o se hundirá. Esta aplicación es esencial en la ingeniería naval y en la construcción de embarcaciones seguras y estables.
Este trabajo de investigación servirá como punto de partida para futuras investigaciones en el campo de la circulación de fluidos y como complemento de conocimientos existentes. Al proporcionar ejemplos específicos y aplicaciones prácticas, se facilita la comprensión y la aplicación de estos conceptos en situaciones reales, lo que permite abordar problemas cotidianos relacionados con los fluidos de manera más precisa y efectiva.
Es importante comprender que las aplicaciones del Cálculo Integral en relación con las propiedades de los fluidos desempeñan un papel destacado en la sociedad, dado que se encuentran presentes en la mayoría de las disciplinas de ingeniería. El cálculo integral permite calcular áreas, volúmenes, velocidades, caudales y otros conceptos relacionados con el comportamiento de los fluidos. Por ejemplo, en la ingeniería civil, se utiliza el cálculo integral para determinar el flujo de agua en canales y tuberías, el diseño de presas y sistemas de drenaje. En la ingeniería aeroespacial, el cálculo integral se aplica para analizar la aerodinámica de los aviones y cohetes, y para predecir las fuerzas de sustentación y arrastre. En resumen, el cálculo integral es una herramienta fundamental para comprender y resolver problemas relacionados con los fluidos en diversas áreas de la ingeniería [4] [5] [6].
El principal beneficio de adquirir conocimientos en el campo del cálculo integral es la capacidad de aplicarlos en situaciones reales para mejorar la comprensión y resolver problemas concretos. Este documento proporciona información clara y concisa que resulta especialmente útil en disciplinas como la Ingeniería Civil, la Ingeniería Eléctrica y la Estructura de la Materia, entre otras. Por ejemplo, en la Ingeniería Civil, el conocimiento de cálculo integral es fundamental para calcular volúmenes de sólidos y diseñar estructuras que sean seguras y eficientes. En la Ingeniería Eléctrica, se aplica el cálculo integral para analizar circuitos eléctricos y calcular corrientes y cargas. Además, el cálculo integral es utilizado en la resolución de problemas relacionados con la densidad de materiales y la distribución de cargas en diversos sistemas. En síntesis, el dominio del cálculo integral permite a los profesionales abordar de manera efectiva y precisa una amplia gama de situaciones y desafíos en distintas áreas, lo cual contribuye al progreso y desarrollo de la comunidad educativa y la sociedad en general.

Materiales y Métodos

Tipo de Estudio

El enfoque cualitativo adoptado en esta investigación se considera adecuado para abordar el estudio debido a sus características y ventajas particulares. Este enfoque se basa en la recopilación de información confiable y de calidad, lo que garantiza la validez y la precisión de los datos obtenidos [9].
El enfoque cualitativo permite realizar un análisis detallado del contenido y comprender la realidad en su contexto natural. Esto es especialmente relevante al investigar fenómenos complejos y multifacéticos, como la circulación de fluidos y los campos vectoriales. Al utilizar este enfoque, se pueden capturar las sutilezas y los matices de estos fenómenos, lo que facilita una comprensión más profunda y completa.
Además, el enfoque cualitativo se enfoca en la solución de problemas y en la generación de conocimiento práctico. Al utilizar métodos de inducción, se desarrollan criterios que determinan la validez de los diferentes conocimientos. Esto permite obtener conclusiones más sólidas y aplicables en el mundo real, lo que es especialmente importante en el campo de la circulación de fluidos, donde los resultados deben ser confiables y utilizables en situaciones prácticas.
En este trabajo se realizó una investigación cualitativa, que es un diseño flexible que se basa en información cualitativa y no requiere un riguroso manejo estadístico, ya que su estructura se enfoca más en el proceso que en la obtención de resultados [10]. Además, se utilizó un enfoque documental como diseño de investigación descriptivo, con el propósito de obtener, analizar, interpretar y comparar información relacionada con el tema de estudio, con el fin de ampliar y profundizar el conocimiento desde su esencia primordial.
En cuanto al paradigma, se refiere a las acciones que se llevan a cabo de manera establecida para obtener conclusiones individuales o colectivas [11]. Representa creencias y costumbres que guían la forma de actuar, aunque no representa una verdad absoluta.

Recolección de la Información

El proceso de selección de las fuentes de información se llevó a cabo con el objetivo de garantizar la fiabilidad y la calidad de los datos recopilados. Se siguieron los siguientes criterios:

- Plataforma de YouTube: Se realizaron búsquedas exhaustivas en la plataforma de YouTube para identificar videos de conferencias o tutoriales impartidos por profesores universitarios especializados en el campo del cálculo integral. Se seleccionaron aquellos videos que presentaban una sólida fundamentación teórica, estaban respaldados por la reputación y las credenciales del profesor, y proporcionaban información confiable y precisa sobre el tema de estudio.

- Conversaciones con profesores universitarios: Se establecieron conversaciones con profesores universitarios que imparten cursos de cálculo integral. Estos profesores fueron seleccionados en función de su experiencia y conocimientos en el tema de las integrales dobles y su aplicación en el cálculo de la densidad de circulación de fluidos en campos vectoriales. Durante las conversaciones, se obtuvieron conocimientos especializados y se aclararon dudas específicas, lo que contribuyó a la fiabilidad de la información recopilada.
- Libros de texto reconocidos: Se analizaron diversos libros de texto digitales de reconocidos autores en el campo del cálculo integral, como Tom Apóstol [12], James Stewart [13] [14] y Louis Leithold [15], entre otros. Estos libros fueron seleccionados por su reputación y su enfoque riguroso y didáctico. Se consultaron los capítulos y secciones relevantes relacionados con las integrales dobles y su aplicación en el cálculo de la densidad de circulación de fluidos en campos vectoriales.
- Artículos de revistas previamente elaborados: Se revisaron artículos científicos previamente elaborados por universidades internacionales de España y México. Estos artículos se seleccionaron en función de su relevancia y su enfoque en el tema de las integrales dobles y la circulación de fluidos en campos vectoriales. Se consideraron fuentes confiables y revisadas por pares, lo que garantiza la calidad y la fiabilidad de la información recopilada.

En conjunto, el proceso de selección de fuentes de información se llevó a cabo de manera rigurosa y se basó en criterios de reputación, experiencia y calidad científica. Esto garantizó la fiabilidad de los datos recopilados y la validez de la información utilizada en la investigación.

Análisis de la Información

Para el análisis de la información, se empleó la técnica de "triangulación de teorías" con el objetivo de considerar diferentes puntos de vista de los investigadores en relación con el tema y llegar a una conclusión concreta. La triangulación de teorías implica utilizar diferentes teorías para observar un fenómeno con el propósito de comprender cómo diferentes suposiciones afectan los hallazgos e interpretaciones de un mismo conjunto de datos o información. [16].

Se seleccionaron videos de conferencias sobre integrales dobles y circulación de fluidos en campos vectoriales impartidos por diferentes profesores universitarios. Estos videos presentaban enfoques teóricos y metodológicos variados. Al analizar los diferentes enfoques y teorías presentadas en los videos, se pudo identificar puntos de convergencia y divergencia en cuanto a la aplicación de las integrales dobles en el cálculo de la densidad de circulación de fluidos. Esto permitió obtener una visión más completa y enriquecedora del tema.

Se examinaron capítulos y secciones relevantes de diversos libros de texto reconocidos en el campo del cálculo integral. Cada libro presentaba su propio enfoque y teorías sobre las integrales dobles y su aplicación en la circulación de fluidos. Al comparar los diferentes enfoques y teorías presentes en los libros, se pudo evaluar la consistencia y la robustez de los conceptos abordados. Esto permitió identificar convergencias y divergencias entre las teorías y enriqueció el análisis de los datos recopilados.

Se revisaron artículos científicos previamente elaborados por universidades internacionales y se compararon los hallazgos y las conclusiones obtenidas en relación con el cálculo de la densidad de circulación de fluidos en campos vectoriales. Al integrar estos resultados, se pudo evaluar la consistencia y la aplicabilidad de las teorías en diferentes contextos y situaciones.

La triangulación de teorías permitió evaluar y contrastar diferentes suposiciones, enfoques y teorías relacionadas con el tema investigado. Esta técnica ayudó a identificar convergencias, divergencias y puntos de acuerdo entre los diferentes investigadores y fuentes consultadas, lo que enriqueció el análisis de los datos recopilados y condujo a conclusiones más sólidas y confiables.

Análisis y discusión de Resultados

En la investigación, se planteó la necesidad de resolver problemas inéditos relacionados con la densidad de circulación de fluidos utilizando integrales dobles. Estos problemas fueron seleccionados con el objetivo de confirmar la viabilidad de resolver situaciones prácticas mediante el uso de conceptos teóricos estudiados, como las integrales dobles, los campos vectoriales y los fluidos. Para seleccionar los problemas específicos, se consideraron los siguientes criterios:

- Relevancia: Se buscó que los problemas estuvieran relacionados con situaciones de la vida cotidiana que involucraran el flujo de fluidos en distintos contextos, como el llenado de tanques o recipientes. Esto permitió establecer una conexión directa entre la teoría y su aplicación práctica.

- Interdisciplinariedad: Se tomó en cuenta la interrelación entre diferentes disciplinas, como la física, las matemáticas y la ingeniería, para abordar problemas complejos que requirieran un enfoque integrado. Esto permitió una perspectiva más amplia y completa en la resolución de los problemas.
- Utilización de integrales dobles: Se buscó que los problemas requirieran el uso de integrales dobles como herramienta principal para su resolución. Esto permitió poner en práctica los conocimientos teóricos adquiridos y evaluar la eficiencia y eficacia de su aplicación en situaciones reales.

Una vez seleccionados los problemas, se procedió a su resolución utilizando los conceptos teóricos y las fórmulas de integrales dobles, campos vectoriales y fluidos estudiados en el marco teórico. Se aplicaron los principios y las técnicas correspondientes para calcular el volumen de un sólido y determinar la densidad del fluido en un tanque. Esto permitió demostrar la aplicabilidad de los conocimientos teóricos en la solución de problemas concretos y validar la importancia de la investigación realizada.

A continuación, se muestra una representación gráfica de la estructura de un tanque en forma de un paraboloide elíptico, que está siendo llenado por un líquido (agua) que circula a través de una tubería. Esta situación se observa comúnmente en la vida diaria de las personas al llenar pilas, tanques u otros recipientes. Surge la incógnita sobre la velocidad del agua y cuánto tiempo tardará en llenarse un envase, entre otros aspectos.

Resolución de problemas

Problema 1. Un tanque en forma de paraboloide elíptico tiene ecuación $x^2+y^2=z$ y se encuentra dentro de un cilindro que tiene como ecuación $x^2+y^2=3$, si este es llenado por un fluido(agua) en 50 minutos a través de una tubería de 10 cm de diámetro, determinar:

Volumen (v) del tanque en (m^3)

Caudal (Q) del agua en la tubería en m^3/s

Velocidad del agua de la tubería en (m/s)

Densidad (ρ) del agua contenida en el tanque en kg/m^3

Guiarse en este problema de la figura 1 y 2.

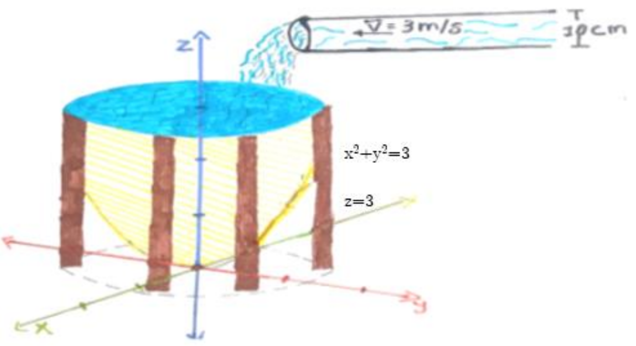

Figura 1. Representación gráfica del tanque de agua

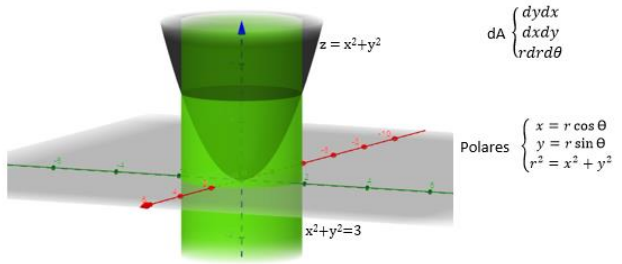

Figura 2. Simulación del tanque de agua en el plano tridimensional

Siendo $x^2+y^2=3$ la ecuación del cilindro con base inferior sobre el eje XY y base superior en el borde del tanque se obtiene el **radio** de este transformando la ecuación cartesiana a ecuación polar:

Si, $x^2+y^2=3$ ecuación cartesiana y

$x^2+y^2=r^2$, ecuación polar

Entonces, $x^2+y^2 = x^2+y^2$, y

$r^2 = 3$, por tanto

$r = \sqrt{3}$, esto corresponde al radio de la base del cilindro que se encuentra sobre el eje xy como se muestra en la figura 3.

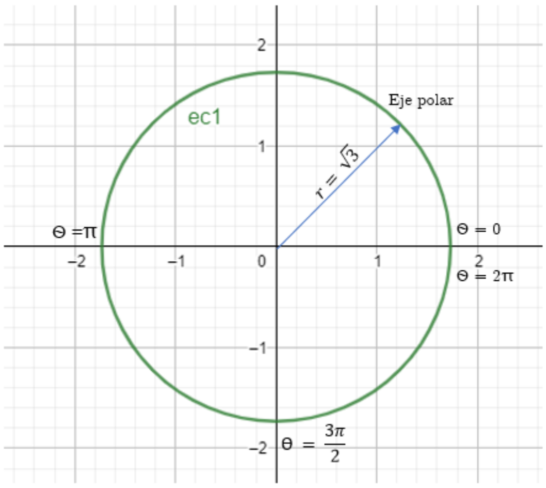

Figura 3. Proyección de la base del cilindro en el plano xy

Paso 1.

Cálculo del volumen que está entre el paraboloide y el cilindro:

Antes de resolver las integrales dobles para el cálculo del volumen de un sólido es necesario conocer las variables necesarias para su desarrollo las cuales son: los límites de integración, una función y el diferencial de área en coordenadas polares.

1) Cálculo de los límites de integración utilizando coordenadas polares, tomando en cuenta que el diferencial de área es: $\boldsymbol{Da} = \boldsymbol{rdrd\theta}$, apoyados con la figura número (3).

Límite de integración para $\mathbf{dr}$: Dimensión del Radio $0 \leq r \leq \sqrt{3}$

Límite de integración para $\boldsymbol{d\theta}$**:** Ángulo barrido por el eje polar $0 \leq \theta \leq 2\pi$

2) Al convertir la ecuación del paraboloide elíptico $z = x^2+y^2$ a una función con respecto a la variable $\boldsymbol{z}$ quedaría:

Si $z = f(x, y)$, entonces $f(x, y) = x^2+y^2$

3) $dA = rdrd\theta$

Sustituir los datos en la integral doble para volumen:

$$V = \iint_b^a f(x,y)\ dA$$

$$V = \iint_b^a (x^2+y^2)\ dA$$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} r^2.\, rdrd\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} r^3.\, drd\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right|\begin{matrix}\sqrt{3}\\0\end{matrix}\ d\theta$$

$$V = \left[\frac{(\sqrt{3})^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right]\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$V = \frac{9}{4}[\theta]|\begin{matrix}2\pi\\0\end{matrix}$$

$$V = \frac{9}{4}[2\pi - 0]$$

$$V = \frac{9}{2}\pi\ m^3$$

Paso 2.

- El volumen del cilindro con ecuación $x^2+y^2=3$ y su base inferior sobre el plano $\boldsymbol{XY}$ es:

Si $\mathbf{x^2+y^2=3}$ y $\mathbf{z = x^2+y^2}$, entonces z = 3, esto corresponde a la altura del cilindro.

$h = 3$ y $r = \sqrt{3}$

Volumen del cilindro ($V = \pi r^2 h$)

$V = \pi(\sqrt{3}m)^2(3m) = \pi(3m^2)\ (3m) = 9m^3$

Paso 3.

El volumen del cilindro menos el volumen de la sección atrapada entre el cilindro y el paraboloide es igual al volumen del tanque**,** es decir:

Volumen del tanque es: $9\pi m^3 - \frac{9}{2}\pi\ m^3 = \frac{9}{2}\pi\ m^3$

Paso 4.

- Cálculo del caudal volumétrico de la tubería y velocidad del agua:

Datos	Ecuación	Solución
Volumen= $\frac{9}{2}\pi\ m^3$ Tiempo= 50min= 3000seg Caudal =?	Caudal Q= $\frac{\text{volumen}}{\text{tiempo}}$	Q= $\frac{9}{2}\pi\ m^3$ ÷ 3000seg Q= $\frac{3\pi}{2000}$m³/s
Radio= 5cm = 0.05mts A = πr^2= π $(0.05)^2$= $\pi/400m^2$ Velocidad= ¿?	Q= (Área)(velocidad) Velocidad= Q/A	$\vec{V}$= ($\frac{3\pi}{2000}$m²) ÷ ($\frac{\pi}{400}$ m^3/s) = $\vec{V}$= 0.6m/s

Tabla 1. Cálculo del caudal volumétrico y velocidad de circulación del fluido en la tubería

Paso 5.

- Cálculo de la masa del agua contenida en el tanque:

Si un metro cúbico contiene 1000 litros de agua, entonces, ($\frac{9}{2}\pi\ m^3$) son:

($\frac{9}{2}\pi\ m^3$) (1000 litros) = 14137.67 litros

Tomando en cuenta que un litro de agua equivale a 1 kg de masa, entonces, el agua del tanque contiene una masa de 14137.67 kilogramos.

Paso 6.

- Cálculo de la densidad del tanque de agua:

$\rho = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}}$

$\rho = \frac{14137{,}67\text{kg}}{\frac{9}{2}\pi\ m^3}$

$\rho = 1000\text{kg/m}^3$

"Por tanto, la densidad del agua contenida en el tanque es de 1000 kg/m³"

Problema 2. A continuación, la siguiente representación gráfica de la estructura de un recipiente en forma de un paraboloide elíptico que abre hacia abajo, el cual está lleno por un fluido (aceite vegetal), el objetivo es calcular su densidad, el volumen y en cuanto tiempo se vaciaría si se le hace un agujero de 4 centímetros de diámetros como se muestra en la figura 4.

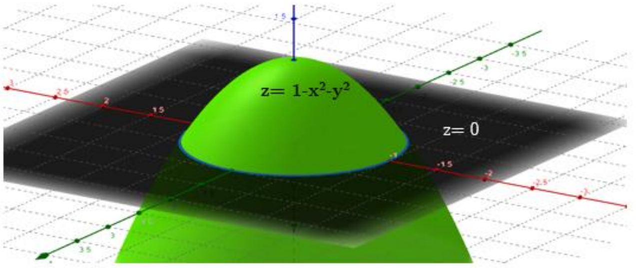

Figura 4. Representación del recipiente en el plano tridimensional

Paso 1

"Encontrar el radio de la circunferencia formado entre la intersección del paraboloide y el plano xy"

Siendo z= $1-x^2-y^2$ la ecuación del recipiente y z= 0 la del plano que corta el paraboloide en el plano xy, es necesario igualar las ecuaciones para encontrar el radio de dicha región de intersección

Si, z= $1-x^2-y^2$, y

$z = 0$, entonces,

$0 = 1-x^2-y^2$ (despejar x e y)

$-x^2-y^2= -1$ (multiplicar toda la expresión por -1)

$x^2+y^2= 1$ (convertir la ecuación cartesiana a ecuación polar para encontrar el radio tomando en cuenta las equivalencias polares)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ r^2 = x^2+y^2 \end{cases}$$

Si $x^2+y^2 = 1$ y $x^2+y^2= r^2$, entonces:

$R^2= 1$ (despejando r)

R= 1 (radio de la base del paraboloide sobre el plano xy)

Si $x^2+y^2 = 1$ y $x^2+y^2= r^2$, entonces:

$R^2= 1$ (despejando r)

R= 1 (radio de la base del paraboloide sobre el plano xy)

Pasó 2

Encontrar los límites de integración para calcular el volumen del recipiente por medio de las integrales dobles para volúmenes, como se muestra en la figura 5:

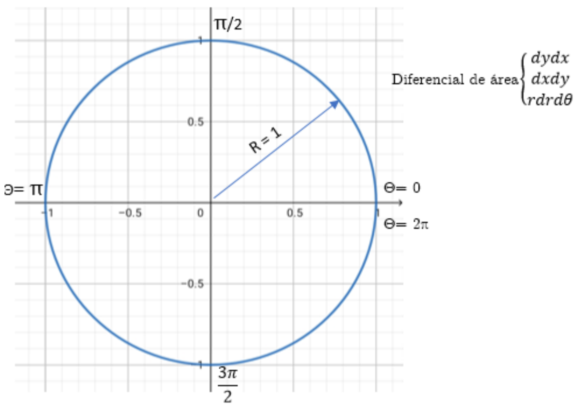

Figura 5. Proyección del corte del paraboloide sobre el plano xy

Cálculo de los límites de integración utilizando coordenadas polares, tomando en cuenta que el diferencial de área es: $\boldsymbol{Da = rdrd\theta}$, apoyados con la figura número (15).

Límite de integración para **dr**: Dimensión del Radio $0 \le r \le 1$

Límite de integración para $\boldsymbol{d\theta}$**:** Ángulo barrido por el eje polar $0 \le \theta \le 2\pi$

Pasó 3

"Convertir las formula del paraboloide elíptico a una función $f(x,y)$ con respecto a z para aplicarla en la fórmula de la integral"

Al convertir la ecuación del paraboloide elíptico z = $1-x^2-y^2$ a una función con respecto a la variable $\boldsymbol{z}$ quedaría:

Si $z = f(x,y)$, entonces:

f (x, y) = $\mathbf{1-x^2-y^2}$ (Convertir la función a polar)

$f(r, \theta) = 1- (r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2$ (Resolver las potencias)

$f(r, \theta) = 1- r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta$ (Sacando $\mathbf{r^2}$ como factor común)

$f(r, \theta) = 1- r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$ (Aplicando la identidad pitagórica, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$)

$f(r, \theta) = 1- r^2$

-Resolver las integrales dobles para volumen

$$V= \iint f(r, \theta)\, dA$$

$$V= \iint (1-r^2) r dr d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r - r^3) dr d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\Big|_0^1 d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi} \left[\frac{(1)^2}{2} - \frac{1^2}{4}\right] - 0\ d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\, d\theta$$

$$V = \frac{1}{4}\theta\Big|_0^{2\pi}$$

$$V = \frac{1}{4} * 2\pi$$

$$V = \frac{1}{2}\pi\, m^3$$

"Por tanto, el volumen del recipiente es $\frac{1}{2}\pi\, m^3$, aproximadamente 1. 57 metros cúbicos de aceite vegetal"

Pasó 4

"Cálculo de la densidad del aceite"

$$\rho = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}}$$

$$\rho = \frac{1444\ kg}{1.57\ m^3}$$

$$\rho = 919.74\ \frac{kg}{m^3}$$

Pasó 5

"Cálculo del tiempo que tardaría el recipiente en vaciarse si se le sale el aceite por un orificio de 4 centímetros de radio a una velocidad de 2 m/s." como se indica en la tabla 2.

Datos	Ecuaciones	Soluciones
Radio = 4cm = 0.04m	$A = \pi r^2$	A= π (0.04m)^2 = $\frac{\pi}{625}$m^2
Volumen de aceite = π/2m^3		
Velocidad = $2m/s$	Caudal $Q = (\text{área})(\text{velocidad})$	Q = $(\frac{\pi}{625} m^2)$(2m/s) = $\frac{2\pi}{625}$m/s
Área del orificio por donde sale el aceite = ¿?		
Caudal volumétrico Q = ¿?	$Tiempo = volumen / caudal$	T = $\frac{\pi/2\text{m3}}{\frac{2\pi}{625}\text{m/s}}$ = 155.5 segundos
Tiempo de vaciado = ¿?		

Tabla 2. Cálculo del caudal volumétrico y el tiempo de vaciado del recipiente

Los dos problemas inéditos resueltos en las páginas anteriores se refieren a fluidos contenidos en recipientes grandes en forma de paraboloides elípticos, de estos era necesario calcular su densidad, pero para ello antes fue necesario calcular otras variantes (área del tubo por donde salía el fluido, volumen del tanque, caudal volumétrico y la masa del líquido). Estas variantes se calculan con ecuaciones que se encuentran en el referente teórico y otras fórmulas que son muy utilizadas comúnmente como: (volumen del cilindro y área del círculo) seguidamente se llegó a la conclusión del problema calculando la densidad y así dar solución al objetivo dos (aplicar conceptos y fórmulas en problemas inéditos).

Conclusiones

Los conceptos y fórmulas descritas son de calidad y sobre todo de fuentes confiables y que pueden ser utilizadas por los lectores para fortalecer su conocimiento. Además, han sido de gran utilidad al grupo investigador para resolver problemas matemáticos.

Aplicar los conceptos, fórmulas de integrales y propiedades de fluidos, apoyados con un buen análisis matemático, ayudan a resolver problemas relacionados el cálculo de la densidad de circulación de un fluido en un campo vectorial. Además, el uso de herramientas tecnología (GeoGebra 3D), son claves para tener una mejor perspectiva de las diferentes gráficas tridimensionales y así poder hacer un buen análisis del problema que se pretenda resolver aplicando también todo lo teórico incluido en este documento.

El contenido de este documento a cerca de integrales dobles es para ser aplicado a estudiantes universitarios, debido al nivel de complejidad que presenta. Por otra parte, se finaliza que los objetivos planificados los cuales, se cumplieron a cabalidad debido a la solución correcta de los problemas inéditos propuestos.

La evaluación es fundamental para determinar la calidad de los conceptos teóricos desarrollados, por tanto, se presentan aplicaciones de estos conceptos para así obtener una excelente consolidación de los aprendizajes en los estudiantes o la sociedad en general que se han tomado el reto de conocer más acerca del tema plasmado en este trabajo de investigación. "El secreto del éxito está en la persistencia de los individuos y en el amor al conocimiento".

Recomendaciones específicas para investigaciones futuras

Explorar aplicaciones en diferentes campos: Realizar investigaciones que apliquen los conceptos de integrales dobles y circulación de fluidos en campos específicos, como la ingeniería civil, la ingeniería ambiental o la medicina. Por ejemplo, se puede investigar cómo se puede utilizar la circulación de fluidos en el diseño de sistemas de ventilación eficientes o en la modelización del flujo sanguíneo en el cuerpo humano.

Estudio de casos reales: Realizar investigaciones que se enfoquen en casos reales y prácticos donde se requiera el cálculo de la densidad de circulación de fluidos. Esto puede incluir el análisis de sistemas de tuberías, el flujo de líquidos en estructuras específicas o la circulación de fluidos en el transporte marítimo. Estudiar casos concretos proporcionará una comprensión más profunda de las aplicaciones prácticas de las integrales dobles.

Investigación experimental: Complementar los estudios teóricos con investigaciones experimentales. Esto puede implicar la realización de pruebas y mediciones en laboratorios para validar los modelos teóricos y las predicciones realizadas mediante integrales dobles. Por ejemplo, se pueden realizar experimentos para medir la circulación de fluidos en diferentes configuraciones de tuberías y comparar los resultados con los cálculos teóricos.

Desarrollo de métodos numéricos: Investigar y desarrollar métodos numéricos eficientes para aproximar integrales dobles en situaciones complejas. Esto puede incluir el uso de técnicas de discretización, métodos de Monte Carlo o métodos de elementos finitos. Estos enfoques numéricos pueden ayudar a obtener soluciones aproximadas en casos donde las integrales dobles no tienen soluciones analíticas.

Investigación interdisciplinaria: Fomentar la colaboración entre diferentes disciplinas, como las matemáticas, la física, la informática y la ingeniería, para abordar problemas complejos de manera integral. La investigación interdisciplinaria puede proporcionar nuevas perspectivas y enfoques innovadores en el estudio de las integrales dobles y la circulación de fluidos. Estas recomendaciones sirven como punto de partida para futuras investigaciones en el campo de las integrales dobles y la circulación de fluidos. Al abordar estas áreas, se puede ampliar el conocimiento y la aplicación práctica de estos conceptos en diversos contextos.

Referencias

[1] Herrera Arróliga, J. E., Herrera Castrillo, C. J. (2023). Bases Orientadoras de la Acción para el desarrollo de temas de Física con enfoque por competencia. Revista Científica De FAREM-Estelí, 12(46), 84–107. https://doi.org/10.5377/farem.v12i46.16477

[2] Rogawski, J. (2012). *Cálculo de varias variables segunda edición.* Barcelona, España : Editorial Reverte, S. A. Obtenido de https://es.scribd.com/document/501849039/calculo-de-varias-variables-Rogawski

[3] Ortega Ibarra, J. J. (2020). *http://gmc.geofisica.unam.m*. Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE101019: http://gmc.geofisica.unam.mx/papime2020/index.php/articulos/19-vectores

[4] López López, L. J., Rivera Díaz, R. E., Carrasco Sánchez, S. d., Medina Martínez, W. I., Herrera Castrillo, C. J. (2023). Aplicaciones del cálculo integral en la compresibilidad de fluidos en un campo vectorial. *Revista Ciencia E Interculturalidad, 32*(1), 23-42. https://doi.org/10.5377/rci.v32i01.16232

[5] Ortuño Blandón, A. I., Ferrufino Amador, E. A., Pérez Ruíz, G. E., Herrera Castrillo, C. J. (2023). Análisis de la integral definida para el cálculo de las magnitudes, fuerza y presión de un fluido en reposo. *Revista Torreón Universitario, 12*(34), 79–89. https://doi.org/10.5377/rtu.v12i34.16342

[6] Ponce Herrera, G., López Valdivia, F. S., Canales Urrutia, C. I., Medina Martínez, W. I., Herrera Castrillo, C. J. (2023). Implementación de la integral definida para el análisis de la viscosidad de fluidos. *Wani, 39*(79), 62-77. https://doi.org/10.5377/wani.v39i79.16921

[7] Wiliamson, D. (2013). Fundamento de los fluidos de perforación. *Oilfield Review*, *25*(1), 67-69. Obtenido de https://n9.cl/hw637

[8] Martín, I., Salcedo, R., Font, R. (2011). Mecánica de Fluidos Tema 5. Operaciones separación sólido-fluido. *Universidad de Alicante*, 15-27. Obtenido de https://n9.cl/ykbv3

[9] Bejarano, M. A. G. (2016). La investigación cualitativa. *INNOVA Research Journal*, *1*(2), 1-9. Obtenido de http://201.159.222.115/index.php/innova/article/view/7

[10] Álvarez, C. A. (2011). Metodología de la investigación cuantitativa y cualitativa. *Guía didáctica, 217*. Obtenido de

[11] León, R. d. (2016). Tipos de paradigmas. Obtenido de Cursos online web: https;//cursosonlineweb.com/paradigmas.html

[12] Apostol, T. M. (1998). Calculus: Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal.

[13] Stewart, J. (2018). Cálculo de una variable: trascendentes tesmpranas.

[14] Stewart, J. (2008). Cálculo de varias variables. *Trascendentes tempranas*, *6*.

[15] Leithold, L. (1998). El cálculo (Vol. 343). México: Oxford University Press.

[16] Okuda Benavides, M., Gómez-Restrepo, C. (2005). Métodos en investigación cualitativa: triangulación. *Rev. colomb. psiquiatr*, 118-124. http://www.scielo.org.co/scielo.php?pid=s0034-74502005000100008&script=sci_arttext

[17] Pilco Sucuy, J. A. (2024). *Guías de laboratorio experimental para la enseñanza de Mecánica Clásica dirigido a estudiantes de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física*. Obtenido de http://dspace.unach.edu.ec/handle/51000/12317

[18] Cantero Lorenzo, J. Un laboratorio en el bolsillo: Uso del smartphone como instrumento de medición en el contexto de la física. Obtenido de https://dspace.uib.es/xmlui/handle/11201/161702

[19] Padilla Berdugo, R. (2020). Efectos de las imágenes representadas según distintas escalas de iconicidad de Abraham Moles sobre la comprensión de textos expositivos relacionados con el electromagnetismo. Obtenido de https://manglar.uninorte.edu.co/handle/10584/9650

[20] Acevedo Montenegro, R. S., Blandón Vindell, C. J., Picado Castillo, C. D., Triminio-Zavala, C. M., y Herrera-Castrillo, C. J. (2024). Resolución de problemas con integrales para el estudio del principio de Arquímedes en física vectorial. *Wani*, (80). https://doi.org/10.5377/wani.v40i80.17643

[21] Rodríguez, M. A. M., Rubio, A. M. A., Lingán, A. M. A., Rubio, D. E. P., Bocanegra, J. C. S., y Flores, J. W. C. (2023). Inteligencia Artificial en la educación digital y los resultados de la valoración del aprendizaje. https://osf.io/preprints/c3pmd

[22] Martínez Redondo, A. (2023). Métodos numéricos aplicados a la ingeniería naval. Énfasis en los módulos de integración numérica. https://repositorio.upct.es/handle/10317/12645

[23] Herrera Castrillo, C. J. Aprendizaje de ecuaciones diferenciales aplicadas en física utilizando tecnología Learning applied differential equations in physics using technology. https://camjol.info/index.php/torreon/article/download/14223/16621/51536

[24] Jiménez García, M. (2020). Análisis de un perfil aerodinámico para generar sustentación en la atmósfera de Marte. https://repository.unimilitar.edu.co/handle/10654/35775

[25] Bolívar Carbonell, M. (2019). Lineamientos metodológicos para la ubicación de un parque eólico offshore asociados al clima marítimo y condiciones hidrodinámicas en el departamento del Atlántico. https://manglar.uninorte.edu.co/handle/10584/10084