

El manejo de la información y los fenómenos aleatorios: Aplicaciones de la Ley de Benford (Ley del primer dígito).

Information management and random phenomena: Applications of Benford's Law (Law of the first digit).

Gabriel Jiménez Zerón ^a

Abstract:

For many years, Benford's Law was a statistical curiosity, mathematics with some real applications. Today, the Law of the First Digit (LFD), as it is also known, is firmly based on the Theory of Probability, enjoys great public interest and presents important applications in the view of statistics.

This research compiles the experimentation and analysis of results obtained by students who took the subject of information management and random phenomena in the sixth semester of the Garza High School in the semester January - June 2024

Keywords:

Probability, Statistics, Digits.

Resumen:

Durante muchos años la Ley de Benford fue una curiosidad estadística con algunas aplicaciones reales. Hoy en día, la también conocida como Ley del primer dígito (LPD), está basada en estudios avanzados del campo de la probabilidad y goza de un gran interés por parte de los estudiosos de la estadística.

La presente investigación recopila la experimentación y el análisis de resultados obtenidos por alumnos que cursaron la asignatura el manejo de la información y los fenómenos aleatorios del sexto semestre del Bachillerato Garza en el semestre enero – junio de 2024

Palabras Clave:

Probabilidad, Estadística, Dígitos.

Introducción

Los seres humanos somos individuos orales, nos gusta contar historias y también somos seres matemáticos, siempre estamos midiendo y procesando datos del mundo. La asignatura “*el manejo de la información y los fenómenos aleatorios*” que se imparte en el sexto semestre del bachillerato garza nos brinda una excelente oportunidad de realizar experimentos matemáticos que ayuden al estudiante a comprender de mejor manera las temáticas abordadas en el curso.

Al inicio de los temas de probabilidad (parte final del curso correspondiente al semestre enero – junio 2024) sugerí que cada estudiante propusiera un experimento matemático para realizar cálculos aproximados a situaciones reales, el presente documento da cuenta de la propuesta aceptada y los resultados obtenidos.

Si tenemos que adivinar la longitud del terreno que ocupa la escuela o la altura del edificio de posgrado de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH), cualquier número que arriesguemos tendrá las mismas probabilidades de ser el correcto, la medición en la vida real y las matemáticas pueden unirse en el estudio de diversas situaciones. Bajo esta premisa los estudiantes

^aUniversidad Autónoma del Estado de Hidalgo | Escuela Preparatoria Número Uno | Pachuca de Soto, Hidalgo | México, email: gzeron@uaeh.edu.mx, <https://orcid.org/0000-0001-6664-7120>

eligieron conocer la Ley de Benford (LPD) que ofrece resultados que pueden sorprendernos, además de la oportunidad de descubrir cuáles son sus aplicaciones prácticas.

La ley del primer dígito.

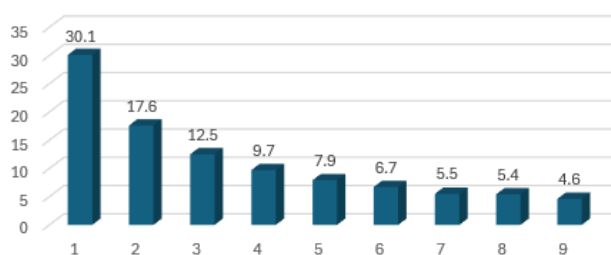
En nuestra vida cotidiana estamos rodeados de números: precios de los bienes y servicios, páginas de libros, cantidad de visitas en un video y aunque parezca extraño todos esos números se encuentran alcanzados por una misma regla, nos referimos a la Ley de Benford que es también conocida como la Ley del Primer Dígito (LPD) que establece que en muchos conjuntos de datos numéricos de la vida real, la distribución del primer dígito significativo (es decir, el primer número distinto de cero) no es uniforme. En lugar de que todos los dígitos (1-9) tengan la misma probabilidad de aparecer, los números más pequeños ocurren con mayor frecuencia.

De la teoría a la práctica

Inicialmente seleccionamos de manera aleatoria 10 videos de la plataforma "YouTube" por cada estudiante, lo que nos dio una muestra total de 300 videos, observamos su cantidad de reproducciones, sólo nos importaba el primer dígito de ese número el cual podría ser cualquiera del 1 al 9 (no se considera al cero debido a que se trata de un número entero positivo). La primera aproximación establecida por los alumnos menciona que todos esos números serán igualmente probables de encontrar, sin embargo, Benford nos enseña que es mucho más probable que ese número comience con 1, con una probabilidad del 30,1% lo que representa que 3 de cada 10 videos observados por los estudiantes comienzan su número de visitas con el 1.

La Ley del primer dígito predice la probabilidad para todos los números del 1 al 9 y está lejos de ser una probabilidad equitativa, por ejemplo, para el 2 habrá un 17,6%, para el 3 un 12,5%, para el cuatro un 9,7% y así continúa la curva hasta solo el 4,6%. Lo cual mostramos en la siguiente gráfica.

Probabilidad porcentual de cada número según la Ley de Benford

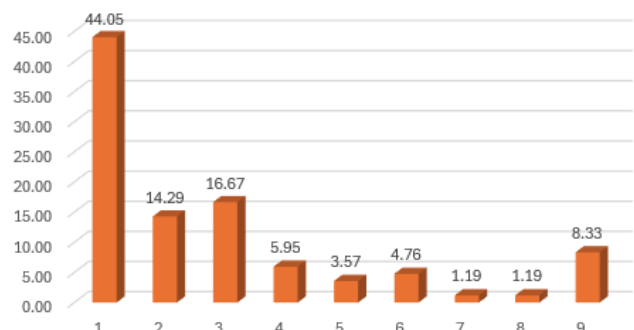


Gráfica. 1_Distribución porcentual de probabilidad de cada uno de los valores del primer dígito en una cantidad según la Ley del Primer Dígito.

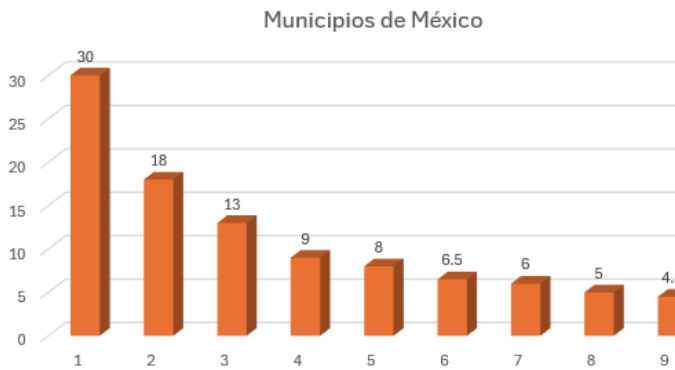
Antes de continuar debemos aclarar que esta Ley no se cumple en cuestiones que son realmente azarosas por ejemplo en la lotería donde todos los números tienen exactamente las mismas probabilidades de ser elegidos, para este estudio se establece que nos referimos a cifras propias de la vida cotidiana ya sea cuestiones sociales o de la naturaleza, también se considera que no sirve para cuestiones en donde los intervalos son muy estrechos, por ejemplo si tomamos la estatura de todos alumnos de la Preparatoria No. 1 (medida en centímetros) seguramente el porcentaje del número uno será mucho más alto al que predice la Ley de Benford.

Una vez establecidas las dos excepciones mencionadas decidimos realizar una serie de observaciones para comprobar su aplicabilidad por nuestros propios medios, partiendo de que una idea clave: utilizar una base realmente grande de datos, entonces recurrimos al último censo de población y vivienda de México con datos publicados por el "INEGI" en el año 2020, observamos primero la población de los 84 municipios del estado de Hidalgo (base de datos corta) [1] y la comparamos con la población de los 2476 municipios del país (base de datos más extensa) [2], extrajimos el primer dígito y el resultado fue el siguiente:

Municipios del Estado de Hidalgo



Gráfica. 2_Distribución porcentual de cada uno de los valores del primer dígito en la cantidad de población por municipio del Estado de Hidalgo. Información INEGI (2020)



Gráfica. 3_Distribución porcentual de cada uno de los valores del primer dígito en la cantidad de población por municipio de la República Mexicana. Información INEGI 2020.

Como podemos apreciar en las anteriores gráficas, para el estado de Hidalgo no se cumple, debido a que es una base de datos muy corta (sólo 84 municipios) en cambio para el número total de municipios del país (2476 municipios en total) si se cumple la LPD.

Nuestro propio experimento

Posteriormente surgió la idea de hacer una investigación con la colaboración de los estudiantes matriculados en la Preparatoria No. 1, mediante un cuestionario en *Google forms* les pedimos que nos compartieran el numero exterior de su domicilio, aclarando que no queríamos saber la calle, colonia o población donde viven, sólo el número exterior del domicilio para ver si se comprobaba la Ley, por lo antes mencionado agradecemos a todos los estudiantes que participaron de este experimento colectivo durante el periodo del 1 al 15 de mayo de 2024 donde obtuvimos más de 3000 respuestas cuyo resultado fue que una vez más la Ley se cumple.



Figura 1_Captura de pantalla de la encuesta compartida con la comunidad educativa de la Preparatoria No. 1 Mayo de 2024.

En la siguiente gráfica compartimos los resultados obtenidos.



Gráfica. 4_Distribución porcentual de cada uno de los valores del primer dígito en domicilios de la comunidad de la Preparatoria No. 1 Mayo 2024 comprobación de la Ley del Primer Dígito.

Una vez realizado el experimento y demostrada su validez, nos dedicamos a investigar sobre las aplicaciones que tiene la Ley de Benford cuyos resultados presentamos en el siguiente listado:

1. **1881: Simon Newcomb** observa que los números en las tablas astronómicas se comportan de manera que los dígitos menores aparecen con más frecuencia como primer dígito. Publica sus hallazgos, pero la teoría no recibe mucha atención.
2. **1938: Frank Benford** [3], en un artículo titulado "The Law of Anomalous Numbers", revalida la observación de Newcomb y expande la teoría, proporcionando una fórmula matemática que describe cómo los dígitos aparecen en los primeros lugares de los números.
3. **1961: Howard S. Friedman y J. P. H. Morris** aplican la Ley de Benford en el campo de la estadística y la economía, mostrando que la ley puede aplicarse a una amplia gama de datos naturales. [4]
4. **1977: Philip G. Mayes** [5] publica un estudio que demuestra la aplicabilidad de la Ley de Benford en datos fiscales y financieros, señalando su utilidad en la detección de fraude.
5. **1990s - 2000s:** Se populariza el uso de la Ley de Benford en la detección de fraude y anomalías financieras. La tecnología informática permite analizar grandes volúmenes de datos para aplicar la ley en auditorías y estudios económicos.
6. **2010s - 2020s:** La Ley de Benford se utiliza en una variedad de campos, desde el análisis de datos electorales hasta el estudio de fenómenos naturales. La accesibilidad de software estadístico permite una mayor aplicación práctica y desarrollo teórico de la ley.

Nos llamó mucho la atención la demostración de que la Ley del Primer Dígito sirve para detectar estafas al fisco; cuando se realizan declaraciones apócrifas para evadir impuestos, las personas tienden a incluir números de

forma más azarosa, por lo que, la distribución límite de esta Ley muestra que los valores declarados pudieron haber sido manipulados.

Valladolid, Facultad de Ciencias España consultado en Septiembre de 2024. Páginas 1 a 20.

<https://uvadoc.uva.es/bitstream/handle/10324/63154/TF-G-G6616.pdf?sequence=1>


$$P = [\text{Log}(n+1) - \text{Log}(n)] / (\text{Log } 10 - \text{Log } 1) = \text{Log}(1 + 1/n)$$

Figura 2: Fórmula matemática de la Ley del Primer Dígito.[5]

Conclusiones

La presente investigación nos ofrece una visión general sobre la Ley de Benford, su evolución a lo largo del tiempo, sus aplicaciones prácticas y la posibilidad de desarrollar experimentos propios para poder comprobarla, como docentes debemos comprender que el desarrollo de los aprendizajes debe incluir la participación activa de nuestros alumnos, que se sientan parte del proceso y que sean capaces de proponer experimentos los cuales pueden dar resultados alejados, cercanos o adecuados pero siempre bajo la perspectiva de comprobar las ideas y analizar lo aprendido en clase.

Referencias

- [1] Datos demográficos del Estado de Hidalgo recopilado del INEGI agosto de 2024
<https://cuentame.inegi.org.mx/monografias/informacion/hgo/poblacion/default.aspx?tema=me&e=13>
- [2] Datos demográficos de los Municipios de México obtenido de Banco de Información Económica (BIE) en la pagina oficial del Instituto Nacional de Estadística Geografía e Informática. Agosto 2024
https://www.inegi.org.mx/app/indicadores/?tm=0&ind=743522#D743522_1020012700100070002000200040
- [3] Frank Benford. The law of anomalous numbers. Proceedings of the American philosophical society, pages 551–572, 1938.
- [4] Mayes, P. G. (1977). "The Benford Law of Anomalous Numbers: Applications to Business and Fraud." *Journal of Accounting Research*, 15(1), 25-40.
- [5] Trabajo fin de grado en Matemáticas LA LEY DE BENFORD, DEL PRIMER DÍGITO SIGNIFICATIVO
Autor: Álvaro Villameriel Cuenca Universidad de