https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/prepa2/issue/archive
Logos Boletín Científico de la Escuela Preparatoria No. 2
Publicación semestral, Vol. 11, No. 22 (2024) 15-19
LOGOS
ISSN: 2007-7637

Ecuaciones en fenómenos físicos
Equations in physical phenomena

Cliffor Jerry Herrera-Castrillo [a]

Abstract:

Equations in physical phenomena are fundamental tools for describing and predicting the behavior of various natural processes. These equations are based on fundamental principles of physics, such as the conservation of energy, mass, and momentum. Through the mathematical formulation of these relationships, it is possible to establish quantitative connections between the variables involved in a physical phenomenon, thus allowing its study and analysis. These equations can address a wide range of phenomena, from the motion of particles in space to wave propagation and heat transfer. By solving these equations, solutions can be obtained that provide valuable information about the behavior and properties of physical systems, contributing to our understanding and application of natural phenomena in the world around us.

Keywords:

Equations, physical phenomena, describing, predicting

Resumen:

Las ecuaciones en fenómenos físicos son herramientas fundamentales para describir y predecir el comportamiento de diversos procesos naturales. Estas ecuaciones se basan en principios fundamentales de la física, como la conservación de la energía, la masa y el momento. A través de la formulación matemática de estas relaciones, es posible establecer conexiones cuantitativas entre las variables involucradas en un fenómeno físico, permitiendo así su estudio y análisis. Estas ecuaciones pueden abordar una amplia gama de fenómenos, desde el movimiento de partículas en el espacio hasta la propagación de ondas y la transferencia de calor. Al resolver estas ecuaciones, se pueden obtener soluciones que proporcionan información valiosa sobre el comportamiento y las propiedades de los sistemas físicos, lo que contribuye a nuestro entendimiento y aplicación de los fenómenos naturales en el mundo que nos rodea.

***Palabras Clave**:*

Ecuaciones, fenómenos físicos, describir, predecir

Introducción

La física es una ciencia que busca explicar las leyes y principios que rigen el universo. Desde la mecánica clásica hasta la física cuántica, esta disciplina utiliza modelos matemáticos para describir y predecir el comportamiento de los fenómenos físicos [1]. En el corazón de estas descripciones matemáticas se encuentran las ecuaciones, que establecen relaciones cuantitativas entre las diferentes variables involucradas en un fenómeno.

Las ecuaciones en fenómenos físicos son esenciales para entender y analizar los eventos que ocurren en el mundo natural [2]. Estas ecuaciones se basan en principios fundamentales como la conservación de la energía, la masa y el momento, entre otros. Al establecer estas relaciones matemáticas, podemos traducir los conceptos físicos en un lenguaje cuantitativo, lo que nos permite realizar cálculos y obtener resultados numéricos que son fundamentales para el estudio científico [3].

Las ecuaciones en fenómenos físicos abarcan una amplia gama de áreas de estudio. En la mecánica, por ejemplo, las ecuaciones de movimiento de Newton describen cómo los objetos se mueven en respuesta a las fuerzas aplicadas sobre ellos. En la termodinámica, las ecuaciones de estado permiten comprender cómo los sistemas físicos transfieren y transforman la energía térmica. En electromagnetismo, las ecuaciones de Maxwell describen la interacción entre los campos eléctricos y magnéticos [4].

Además de describir el comportamiento de los sistemas físicos, las ecuaciones también nos permiten predecir su evolución en diferentes condiciones. A través de la resolución de estas ecuaciones, podemos obtener soluciones que nos brindan información valiosa sobre el comportamiento futuro de los fenómenos físicos. Esto es

[a] Autor de Correspondencia, Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua | Centro Universitario Regional de Estelí | Estelí. Estelí | Nicaragua, https://orcid.org/0000-0002-7663-2499, Email: cliffor.herrera@unan.edu.ni

Fecha de publicación: 05/07/2024

crucial en numerosos campos de la ciencia y la ingeniería, donde la capacidad de predecir el comportamiento de los sistemas es fundamental para el diseño y la toma de decisiones.

Desarrollo

Una gran cantidad de fenómenos físicos se pueden describir usando ecuaciones diferenciales parciales, porque involucran variables continuas que dependen de la ubicación y el tiempo. Estas variables son campos de espacio-tiempo, amplitudes de campos de ondas, temperatura y presión atmosférica, campos electromagnéticos y amplitudes probabilísticas en mecánica cuántica son algunos ejemplos.

A continuación, se proporciona una visión general de las nociones necesarias para comprender el concepto de ecuaciones matemáticas y sus diversas aplicaciones en física. Para ello, se han utilizado como principales fuentes de referencia los libros:

- Lecciones de Física-Matemática [5]
- Ecuaciones Diferenciales II Manual [6]
- Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado [7], así como artículos y sitios web científicos relevantes que proporcionan los fundamentos necesarios para comprender las ecuaciones de la física matemática [8] [9] [10].

Estas referencias han sido seleccionadas debido a su rigurosidad teórica y su presentación de aplicaciones de las ecuaciones de la física matemática, lo que permite llevar a cabo un razonamiento amplio y sólido en el ámbito físico matemático.

La Física está repleta de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) lineales y no lineales. Tanto en electromagnetismo como en mecánica cuántica las ecuaciones básicas son lineales, pero en otras áreas, como la dinámica de medios continuos o la relatividad general, las ecuaciones fundamentales son no lineales [6].

A continuación, se mostrará a construcción de algunas de las ecuaciones diferenciales básicas de la Física y Matemática:

1. La ecuación de Poisson

Es una las ecuaciones típicas y más antiguas de la Física Matemática. Es la base de la descripción de la electrostática y la gravitación. De acuerdo con la ley de Coulomb (1785), la fuerza eléctrica que una distribución de carga eléctrica Q ejerce sobre una partícula de prueba q localizada en el punto r [5] [10], dada por:

$$F(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{(r-r')}{|r-r'|^3}\, dQ$$

Teniendo en cuenta:

$$\frac{(r-r')}{|r-r'|^3} = -\nabla\left(\frac{1}{|r-r'|}\right)$$

Se puede escribir:

$$F(r) = -\nabla\left[\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dQ(r')}{|r-r'|}\right] = -q\nabla\phi(x)$$

La función ϕ aquí definida es el potencial electrostático [5] [6].

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dQ(r')}{|r-r'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(r')}{|r-r'|}\, dV'$$

Siendo $\rho(r')$ la densidad volumétrica de carga. Se sigue tomando el Laplaciano:

$$\nabla^2\phi(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla^2\int \frac{\rho(r')\, dV'}{|r-r'|}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(r')\nabla^2\left(\frac{1}{|r-r'|}\right) dV'$$

Y como:

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|r-r'|}\right) = -4\pi\delta(r-r')$$

Se tiene:

$$\nabla^2\phi(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times(-4\pi)\int \rho(r')\delta(r-r')\, dV'$$

En consecuencia, en el interior de una distribución de cargas, el potencial electrostático satisface la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2\phi(x) = \frac{-\rho(r)}{\varepsilon_0}$$

El potencial gravitacional $G(r)$ debido a una distribución de masa con densidad volumétrica $\rho(r)$satisface también una ecuación de Poisson [5].

$$\nabla^2 G(r) = 4\pi G\rho(r)$$

Esta ecuación fue propuesta por Poisson en 1801. El nombre potencial fue dado por Green en 1828 a una función de la posición que había sido introducida por Laplace en 1770.

Esta ecuación se puede simplificar de la siguiente manera:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f$$

Siendo $f = f(x, y, z)$ una función dada. Si $f \equiv 0$ la EDP se conoce como ecuación de Laplace. Ambas EDP aparecen a menudo en electrostática y en mecánica de fluidos [6] [8].

2. Ecuación de ondas en cuerdas, membranas y sólidos

La ecuación de ondas:

$$u_{tt} = c^2\left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right)$$

Donde c es un número real positivo que representa la velocidad de propagación de las ondas [6] [9].

Ondas en Cuerda:

la aceleración se escribe $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ indicándose con la derivada parcial que cada punto de la cuerda (x constante) experimenta aceleración. También, $\Delta m = \lambda\Delta x$ [5]. Entonces, en direcciones horizontal y vertical:

$$T''\, cos\, cos\, (\square + \Delta\varphi) = T'\, cos\, cos\, \square$$

$$f\Delta l + T''sen(\varphi + \Delta\varphi) - T'\, sen\, \varphi = \lambda\Delta l\, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

De modo que, la componente horizontal de la tensión es constante. Se llamará T_0, dividiendo la última ecuación por T_0 se puede escribir:

$$\frac{f\Delta l}{T_0}+\frac{T''sen(\varphi+\Delta\varphi)}{T''\cos\cos(\varphi+\Delta\varphi)}-\frac{T'\,sen\,\varphi}{T'\cos\cos\square}=\frac{\lambda\Delta l}{T_0}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{f\Delta l}{T_0}+\tan\tan(\varphi+\Delta\varphi)\,|x+\Delta x-\tan\tan\square\,|_x=\frac{\lambda}{T_0}\Delta l\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Teniendo en cuenta que $\tan\tan\square=\frac{\partial y}{\partial x}$ y la $\Delta l=\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\Delta l$ se obtiene la ecuación:

$$\frac{1}{T_0}\left(f-\lambda\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$$

La cuerda tiene una longitud que no se altera apreciablemente como resultado de la oscilación, lo que es básicamente cierto para pequeñas oscilaciones. [5] [9].
En este caso, la ecuación de movimiento de una cuerda oscilante sometida a fuerzas externas es:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{1}{\left(\frac{T}{\lambda}\right)}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-\frac{f}{T}$$

Ondas en membranas
Como extensión al caso bidimensional se puede proponer la ecuación que describe la oscilación de una membrana. En el caso de pequeñas oscilaciones, el área de la membrana no cambia sensiblemente, como tampoco la tensión (fuerza/unidad de longitud=F/l) [5].
Las vibraciones son perpendiculares a la superficie de equilibrio. Si x y y son las coordenadas (horizontales) de la membrana, la ecuación resultante es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{-Z}{\sigma}$$

Donde $u(x,y,t)$ es la amplitud de la oscilación, $v=\sqrt{T/\sigma}$ es la velocidad de las ondas, σ es la densidad superficial de masa de la membrana y Z es la fuerza externa por unidad de área [5] [8] [10].
Ondas longitudinales en sólidos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{\left(\frac{E}{\rho}\right)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

La velocidad de la onda longitudinal en la varilla es:

$$v=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

La forma general 3-dimensional de la ecuación de ondas es:

$$\nabla^2 u(r,t)-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial t^2}=0$$

Ondas elásticas en solidos
La ecuación que describe las oscilaciones de un medio isotrópico elástico [5] tiene la forma:

$$(a^2-b^2)\nabla(\nabla\cdot u)+b^2\nabla^2 u-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

donde u describe la deformación del sólido que se pequeña. Los movimientos considerados corresponden a ondas elásticas. Los coeficientes a y b están dados por:

$$a=\sqrt{\frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}}\;,b=\sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\sigma)}}$$

E es el módulo de extensión o módulo de Young, ρ es la densidad del sólido y σ es el coeficiente de Poisson que expresa el cociente entre la contracción transversal y la extensión longitudinal. σ Varía entre 0 y ½ [7] [9].

3. Ondas sonoras

Los experimentos permiten asegurar que el sonido en el aire corresponde a oscilaciones de la presión y la densidad del aire respecto a sus valores promedios P_0 y ρ_0. Estos cambios están asociados al movimiento colectivo de las moléculas del aire [4] [5].
La segunda ley de Newton para un medio continuo tiene la forma:

$$\frac{d}{dt}(\rho v)=\frac{\partial}{\partial t}(\rho v)+v\cdot\nabla(\rho v)=-\nabla P$$

Además, de acuerdo con la ley de conservación de la masa:

$$\nabla\cdot(\rho v)+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

La presión y la densidad están relacionadas por una ecuación de estado. Para oscilaciones como las sonoras, cuyas frecuencias van de 20 a 20000 Hertz, las oscilaciones tienen lugar tan rápidamente que no hay intercambio de calor entre elementos diferenciales de volumen de aire durante una oscilación, por lo cual, la expansión y contracción del aire es adiabática [5].
Esto significa que:

$$\frac{P}{P_0}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}\;,\gamma=\frac{c_p}{c_v}$$

Donde c_p y c_v son los calores específicos a presión y volumen constante. La propagación del sonido puede describirse con las ecuaciones anteriores. Ahora bien, los cambios en la presión y la densidad son pequeñas perturbaciones de los valores de equilibrio P_0 y ρ_0, por lo cual, se define el cambio de densidad relativo como: $\delta=\frac{(\rho-\rho_0)}{\rho_0}$.

4. Fluidos de Flujos

De acuerdo con la segunda ley de Newton, el movimiento del elemento de masa dm de un fluido se describe como:

$$dm\,\frac{dv}{dt}=dF$$

Donde dF incluye la presión y las fuerzas externas. La componente i de la fuerza dF_P debida a la presión se escribe:

$$(dF_P)_i=-(P\,dS_i)_{u_i+du_i}+(P\,dS_i)_{u_i}$$
$$=-\frac{\partial P}{\partial u_i}du_i dS_i=-\frac{\partial P}{\partial u_i}\,\frac{1}{h_i}\,dV$$

Es decir: $dF_P=-\nabla P\,dV$. De modo que, definiendo: $f_e=\frac{d\,F_e}{dV}$ = densidad volumétrica de las fuerzas externas.

Tomando en consideración solo fuerzas externas derivables de un potencial ($f_e = -\rho\nabla G$) se, tiene:

$$\rho\ \frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}\rho\nabla v^2 - pv \times (\nabla \times v) + \nabla P + \rho\nabla G = 0$$

5. Ecuaciones de Maxwell

En el sistema internacional de unidades (MKSC), las ecuaciones propuestas por Maxwell en 1864, para el campo electromagnético generado por cargas y corrientes en el vacío [5] [9].

Las ecuaciones de Maxwell tienen la forma:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \varepsilon_0\ \frac{\partial E}{\partial t}$$

Donde E, B, J y ρ son en general funciones de la posición y del tiempo y representan, el campo eléctrico, el campo de inducción magnética, la densidad de corriente eléctrica y la densidad volumétrica de carga eléctrica respectivamente [5] [8].

6. Ecuación de Schrödinger

La expresión más general, a nivel no relativista del comportamiento cuántico de las partículas, incluida la cuantización de la energía, está dada por la ecuación de Schrödinger. Sin invocar las ideas de dualidad onda-partícula de Einstein y De Broglie [5].

En la expresión mecánico-clásica de la energía mecánica: $E = \frac{p^2}{2m} + V$, donde p es el momento lineal de una partícula puntual de masa m y V su energía potencial, la energía y el momento lineal han de ser reemplazados por operadores de acuerdo con la siguiente regla:

$$E \to -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\ , p \to \frac{\hbar}{i}\nabla$$

La conservación de la energía toma la forma del operador:

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\ \nabla^2 + V$$

Una ecuación de este tipo no tiene sentido físico alguno si no hay alguna función sobre la que actúen los operadores. Y ha de ser una función continua, $\Psi(r,t)$ a la se conoce, después de la interpretación propuesta por Born, como amplitud de probabilidad. Esta función describe propiedades de campo de las partículas y da cuenta de la dualidad onda partícula propuesta por De Broglie [5].

El reemplazo formal de variables dinámica por operadores conduce a la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar u_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right) + q(x,y,z)u$$

Que describe la dinámica de una partícula de masa m en un campo de fuerzas con función potencial $q = q(x,y,z)$. El símbolo $\hbar$ representa la constante de Planck normalizada. Es de observar la presencia del número imaginario i en el coeficiente de u_t [6].

7. Ecuaciones del Calor

$$u_t = a^2\left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right)$$

Es relevante en procesos de difusión térmica y de difusión de fluidos en general. El símbolo a^2 representa el coeficiente de difusión [6].

8. Ecuación de Klein-Gordon

La ecuación de Schrödinger fue presentada anteriormente, al transformar en operadores el momento lineal y la energía que aparecen en la expresión $E = \frac{p^2}{2m+V}$, esta ecuación es válida solo en mecánica newtoniana, no en relatividad especial, por lo cual la ecuación de Schrödinger no es relativistamente correcta [5].

Con el propósito de subsanar esta dificultad, el propio Schrödinger propuso una nueva ecuación, esta vez relativista, cuya versión para partícula libre está basada en la expresión: $-p^2 + \frac{E^2}{c^2} = m^2c^2$. El cambio de p y E por los operadores $-i\hbar\nabla$, $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ permite escribir:

$$-\hbar^2\left(\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) = m^2c^2$$

Al operar esta expresión sobre la función escalar $\psi(r,t)$, se obtiene la ecuación de Klein-Gordon:

$$\left[-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\psi(r,t) = 0$$

Esta ecuación, generalizada para incluir potenciales, fue abandonada por su autor al observar que no permitía una descripción correcta de los niveles del átomo de hidrógeno. Más tarde, fue retomada por O. Klein y W. Gordon y utilizada para describir partículas de spin cero.

9. Ecuación de Dirac

La ecuación relativista que describe partículas de spin 1/2, entre ellas el electrón, fue descubierta por Paul Dirac en 1928. Es una ecuación diferencial parcial de primer orden, de un tipo bastante peculiar, pues es a la vez una ecuación matricial [5] [6] [7]. La idea de Dirac es tomar la raíz cuadrada del operador, en la forma:

$$i\sqrt{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2}\ = \frac{mc}{\hbar}$$

Luego que el radical tiene la forma:

$$\sqrt{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2}\ = \frac{\gamma_0}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \gamma \cdot \nabla$$

Finalmente, al introducir una función de onda $\psi(r,t)$ se obtiene la ecuación de Dirac:

$$\left[i\left(\frac{\gamma_0}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \gamma \cdot \nabla\right) - \frac{mc}{\hbar}\right]\psi(r,t) = 0$$

γ_0 y γ son 4 matrices de dimensión 4×4; en consecuencia, $\frac{mc}{\hbar}$ debe estar multiplicada por la matriz identidad 4×4 y ψ. Para escribir de forma abreviada algunas de las ecuaciones anteriores es conveniente usar la notación del operador Laplaciano

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

Así se obtiene:

Ecuación de Poisson en 3 dimensiones:

$$\Delta u = f$$

Ecuación de ondas en $1 + 3$ dimensiones:

$$u_{tt} = c^2 \Delta u$$

Ecuación de Schrödinger en 1+3 dimensiones:

$$i\hbar u_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u + qu$$

La ecuación del calor en 1+3 dimensiones:

$$u_t = a^2 \Delta u$$

En ocasiones se consideran versiones simplificadas de las ecuaciones anteriores en las que u no depende de algunas de las variables (x, y, z). Así, una versión en $1 + 2$ dimensiones de las ecuaciones de ondas, Schrödinger o del calor es una EDP en que se supone que u depende de (t, x, y) solamente, hay muchos ejemplos de EDP no lineales de gran importancia por sus aplicaciones en la Física. Los métodos que se emplean en su estudio son muy diferentes de los desarrollados para las EDP lineales [6] [10].

Conclusiones

En conclusión, las ecuaciones en fenómenos físicos desempeñan un papel fundamental en la descripción, análisis y predicción de los eventos naturales. Estas ecuaciones matemáticas establecen relaciones cuantitativas entre las variables involucradas en un fenómeno físico, lo que permite a los científicos y los investigadores comprender y modelar su comportamiento.

Las ecuaciones en fenómenos físicos abarcan una amplia gama de disciplinas, desde la mecánica clásica hasta la física cuántica, pasando por la termodinámica, el electromagnetismo y la relatividad. En cada una de estas ramas de la física, existen ecuaciones fundamentales que describen los principios y leyes que rigen los sistemas físicos.

Estas ecuaciones brindan una descripción precisa y cuantitativa de los eventos naturales, así como la capacidad de predecir y comprender cómo evolucionarán los sistemas físicos en diferentes condiciones y escenarios. Además, son herramientas poderosas para resolver problemas complejos y desarrollar tecnologías innovadoras en una amplia gama de campos, desde la ingeniería hasta la medicina y la astrofísica.

Las ecuaciones en fenómenos físicos son la base matemática que impulsa el avance científico y tecnológico. Permiten a los investigadores avanzar en el conocimiento científico y aplicarlo en diversas áreas, fomentando el desarrollo de nuevas teorías y la creación de tecnologías vanguardistas.

Referencias

[1] Navarro C. M., López, J. R. D., Enrique, C. M. (2021). Ventajas del empleo de la dinámica de sistemas en el proceso de enseñanza–aprendizaje de los fenómenos físicos. *MIKARIMIN Revista Multidisciplinaria*, *7*(2), 81-98.

[2] Moreira M. A., Greca, I. M., Rodríguez M. L. (2002). Modelos mentales y modelos conceptuales en la enseñanza & aprendizaje de las ciencias. *Revista brasileira de pesquisa em educação em ciências. Porto Alegre. Vol. 2, n. 3 (set./dez. 2002), p. 36-56*.

[3] Dieterich H. (2021). Nueva guía para la investigación científica. Grupo Editor Orfila Valentini.

[4] Herrera C. J. Aprendizaje de ecuaciones diferenciales aplicadas en física utilizando tecnología Learning applied differential equations in physics using technology.

[5] Sepúlveda A. (2004). *Lecciones de Física Matemática.* Medellín: Instituto de Física | Universidad de Antioquia.

[6] Mañas M. y Martínez L. (2015). *Ecuaciones Diferenciales II.* Manual, Universidad Complutense de Madrid, Departamento de Física Teórica II (Métodos Matemáticos de la Física).

[7] Zill D. G. (2018). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado* (11 ed.). (A. E. García Hernández, Trad.) Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.

[8] Edwards C. H. y Penney, D. E. (2009). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de la frontera*. Pearson Educación.

[9] Pérez Á. M. S. (2000). Física general I. Sección de Publicaciones de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, Universidad Polictécnica de Madrid.

[10] Castrillo C. J. H. (2022). Metodologías para el aprendizaje por competencias de Ecuaciones Diferenciales aplicadas en Física al utilizar tecnología en la carrera Física Matemática. *Revista Torreón Universitario*, *11*(32).