https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/prepa2/issue/archive

Logos Boletín Científico de la Escuela Preparatoria No. 2

Publicación semestral, Vol. 12, No. 24 (2025) 22-31

LOGOS
ISSN: 2007-7637

Modelación de un péndulo simple usando análisis dimensional

Modeling of a simple pendulum using dimensional analysis

Oswaldo Sánchez-Huautla [a]

Abstract:

One of the unknowns that may arise for a student interested in science when studying physics at a high school level is where the formulas given to solve problems come from. Given that many of them come from complex calculations that require mathematical tools for which they are not yet prepared, the question arises of an alternative within your reach and with more digestible mathematics that can help you deduce some of them and verify them with your own means, without the need to resort to advanced measuring equipment or mathematics beyond what is taught in high school.

The purpose of this article is to demonstrate through simple experiments and tools that you can analyze that it is possible to determine; using only experimentation, dimensional analysis and statistics; a mathematical model that describes the time period behavior of a simple pendulum in real life.

Keywords:

Simple pendulum, time period, dimensional analysis, least squares method, gravity.

Resumen:

Uno de las incógnitas que puede surgir, a un estudiante interesado en la ciencia al estudiar física a un nivel medio superior es el de dónde salen las fórmulas que se le dan para resolver problemas. Dado que muchas de ellas vienen de cálculos complejos que requieren de herramientas matemáticas para las cuáles no está todavía preparado, surge la interrogante de una alternativa a su alcance y con matemáticas más digeribles que pueda ayudarlo a deducir algunas de ellas y comprobarlas con sus propios medios, sin necesidad de recurrir ni a equipos avanzados de medición ni matemáticas más allá de las que se le enseñan en bachillerato.

El propósito de este artículo es demostrar por medio de experimentos simples y herramientas que puede analizar que es posible determinar; usando solo la experimentación, el análisis dimensional y estadística; un modelo matemático que describa el comportamiento del periodo de un péndulo simple en la vida real.

Palabras Clave:

Péndulo simple, periodo, análisis dimensional, mínimos cuadrados, gravedad

Introducción

[2] (p. 9) nos dice que "la verdadera belleza de la física no reside en los principios más profundos que rigen el mundo tal como es, consiste en hallar las explicaciones correctas para fenómenos que observamos y para los principios y mecanismos subyacentes que dan cuenta de ellos."

"La física es una ciencia empírica y cuantitativa que se basa en la comprobación y constatación de ideas a través de la observación, medición y experimentación predecibles. Aunque en física se puedan proponer varias teorías matemáticas exóticas o estrafalarias, la única medida auténtica de su eficacia y poder reside en si describen fenómenos del mundo real que permitan comprobarlo." [2] (p. 6)

Es en este marco donde un estudiante de física de nivel medio superior puede llegar a cuestionarse todas aquellas leyes que se le enseñan en la escuela y preguntarse si realmente se cumplen a la perfección y puede observarlas en su vida diaria con sus propios recursos.

Tal como establece [7]:

[a] Oswaldo Sánchez Huautla, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo | Hidalgo | Tulancingo de Bravo | México, https://orcid.org/0009-0007-1228-7802, Email: oswaldo_sanchez@uaeh.edu.mx

Fecha de recepción: 16/03/2025, Fecha de aceptación: 10/04/2025, Fecha de publicación: 05/07/2025

DOI: https://doi.org/10.29057/prepa2.v12i24.14697

"El proceso de enseñanza aprendizaje de la Física, hoy en día, es muy censurado por la sociedad, puesto que en muchas ocasiones la comunidad educativa revela que los contenidos de los programas no son graduales, carecen de sentido y la teoría se aleja mucho de la practicidad."

[7] (p. 78) promueven el desarrollo de proyectos científicos donde los educandos sean capaces de plantear sus propios procedimientos eligiendo la manera de presentarlos.

Lamentablemente un estudiante de este nivel educativo, que esté interesado en esta rama de la ciencia se encontrará con distintos obstáculos si está interesado en demostrar que las distintas leyes que aprende se cumplen, o, es más, si quiere aprender de dónde surgen. Esto debido a que no contará todavía con las herramientas matemáticas necesarias para deducirlas o no contará en ocasiones con los equipos adecuados para, al menos, comprobarlas.

Es por ello que en este trabajo se expone una solución alternativa para aquellos estudiantes que estén interesados en usar sus propios medios y conocimientos para poder crear un modelo matemático que describa un fenómeno físico, en este caso la determinación experimental de la gravedad a partir de un simple experimento y el uso de su smartphone.

Estrategia de trabajo

La física, ante todo, es una ciencia experimental, es decir se basa en la búsqueda del conocimiento que surge a partir de la curiosidad, de la observación; y se fundamenta, a diferencia de otras ramas del conocimiento, en seguir el método científico.

"El método científico, es un proceso por el cual los investigadores se esfuerzan colectivamente y a través del tiempo para construir una representación del mundo lo más exacta posible, es decir, que sea confiable, constante y no arbitraria" [2] (p. 5)

"Al contrario de lo que defenderán algunas personas, el método científico no es tan solo una forma más de contemplar el mundo, ni tampoco es otra ideología cultural o un sistema de creencias. Es el procedimiento que nos permite conocer la naturaleza por ensayo y error, a través de la experimentación y la observación" [2] (p. 2)

Para esta investigación los pasos a seguir para poder describir el comportamiento del periodo de un péndulo simple serán los pasos fundamentales del método científico.

En general [3] define algunos de los pasos más importantes de la siguiente manera:

- Observación: La observación surge de la curiosidad y es el primer paso para el establecimiento de las leyes de los fenómenos físicos, no es una tarea sencilla y consiste en encontrar las características cuantitativas (que sea posible medir) de los fenómenos.
- Hipótesis: "Una hipótesis es una declaración limitada con respecto a las causas y efecto de un fenómeno en un contexto científico" [3] (p. 10)
- Modelo: La palabra modelo se reserva para situaciones cuando se sabe que la hipótesis por lo menos tiene alguna validez. [3] (p. 11)
- Experimentación: "Es el proceso de identificar una porción del mundo que nos rodea, obtener información de ella e interpretarla." [4]
- Teoría o ley científica: "Representa a un modelo matemático que se ha confirmado a través de pruebas experimentales repetidas." [3] (p. 11)

La observación

El primer paso será describir el fenómeno físico a investigar, el periodo de un péndulo simple.

- Péndulo simple: "Es un modelo idealizado que consiste en una masa puntual suspendida de un hilo sin masa y no estirable. Si la masa se mueve a un lado de su posición de equilibrio (vertical), oscilará alrededor de dicha posición" [14](p. 495).
- Movimiento periódico: "Es un tipo de movimiento repetitivo que se caracteriza porque el sistema físico que lo ejecuta, ya sea una partícula o sólido rígido, describe una trayectoria fija y su posición y velocidad son exactamente las mismas después de un intervalo de tiempo dado conocido como periodo" [10] (p. 31).

De esta manera, se puede establecer que el propósito del artículo es modelar una expresión matemática que nos ayude a predecir el tiempo en que un péndulo simple, que ha sido desplazado de su posición de equilibrio, tardará en regresar al mismo punto una y otra vez.

Variables significativas

Como establece [4] (p. 54), al observar un fenómeno físico por medio de la observación, nuestro primer paso consistirá en buscar variables que parezcan estar relacionadas. Mediante la identificación de estas

variables significativas, reducimos el campo de investigación a niveles prácticos y facilitamos el trabajo experimental.

Dado que se busca modelar el fenómeno desde cero, es un razonamiento lógico e intuitivo pensar que el periodo dependerá de la longitud de la cuerda, de la masa del objeto, de la gravedad que lo hace caer, del ángulo de inclinación con el cuál lo elevemos y de la forma de la masa oscilante.

Si bien, serían las conclusiones más lógicas, esto no quiere decir que sean acertadas.

Las hipótesis

Entre las hipótesis que se pueden formular a partir de la identificación de variables podemos suponer lo siguiente:

- Entre más larga sea la longitud de la cuerda que sostiene al péndulo, más tardará en regresar a su posición original.
- La masa y forma de la masa del péndulo afecta el periodo.
- Entre mayor sea el ángulo al que elevamos la masa antes de soltarla y hacerla oscilar, el periodo se modificará, ya que se observa que el péndulo no vuelve a regresar a su posición original en cada ciclo, sino que cada vez se detiene hasta regresar al reposo, la hipótesis razonable será suponer que el aire la detiene y que para modelar este fenómeno debemos considerar que está en un espacio cerrado y que se eleva a ángulos pequeños que permitan que el péndulo regrese lo más cercano a su posición inicial desde donde fue soltado.

Creación del modelo

En general, una situación experimental incluirá primero, al sistema mismo y segundo, a un modelo o modelos del sistema [4] (p. 57).

La construcción del modelo matemático que sea capaz de describir nuestro fenómeno y la experimentación que lo compruebe y pula es la parte fundamental de este trabajo, así que se desarrollará detalladamente.

El modelo matemático que describe al periodo de un péndulo es ampliamente conocido y surge a través de conceptos más complejos de lo que un estudiante de bachillerato conoce.

Si bien un estudiante es capaz de comprobar con herramientas sencillas que éste se cumple en la vida real, no hay que olvidar que el objetivo es deducir este a partir de experimentos, aun así, se describe el modelo matemático que se encuentre en los libros de texto de manera usual.

Modelación tradicional del periodo de un péndulo simple

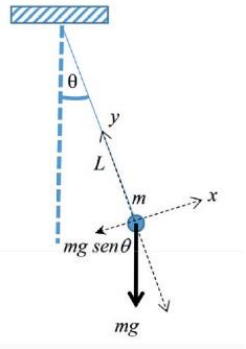

Figura 1: Esquema tradicional de un péndulo simple [9]

En la figura 1 se representan las fuerzas que actúan sobre la masa en términos de componentes tangencial y radial. La fuerza de restitución F_θ es la componente tangencial de la fuerza neta:

$$\boldsymbol{F_\theta = -mg\ sin\theta} \quad (\mathbf{1})$$

La fuerza de restitución se debe a la gravedad; la tensión $\boldsymbol{T}$ sólo actúa para hacer que la masa puntual describa un arco. La fuerza de restitución es proporcional no a $\boldsymbol{\theta}$ sino a $\boldsymbol{sin(\theta)}$, así que el movimiento no es armónico simple. Sin embargo, si el ángulo $\boldsymbol{\theta}$ es pequeño, $\boldsymbol{sin(\theta)}$ es casi igual a $\boldsymbol{\theta}$ en radianes. Con esta aproximación, la ecuación 1 se convierte en:

$$\boldsymbol{F_\theta = -mg\ sin\ \theta = -mg\frac{x}{L}}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow F_\theta = -\frac{mg}{L}x} \quad (2)$$

La fuerza de restitución es entonces proporcional a la coordenada para desplazamientos pequeños, y la constante de fuerza es $k = mg/L$. Dado que la frecuencia angular ω de un péndulo simple com amplitud pequeña es:

$$\boldsymbol{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg/L}{m}} = \sqrt{\frac{g}{L}}}$$

Usando las relaciones de periodo correspondientes.

$$\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{\omega}} \ (\mathbf{3})$$

$$\therefore \boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}\ (\mathbf{4})$$

Procedimiento sacado directamente de [14]

De esta forma deducimos que nuestras hipótesis eran correctas, a excepción de que el periodo dependía de la masa.

Sin embargo, llegar a la ecuación 4 requirió de varias fórmulas adicionales que a su vez requieren de herramientas como cálculo diferencial para su solución.

Y es que en general, a pesar de que el modelo funcione muy bien en el mundo real y responda la pregunta de un alumno de bachillerato de cómo se obtuvo la fórmula 4, en realidad le terminará provocando más preguntas para las que no está preparado todavía para responder.

Modelación a partir de análisis dimensional

[8] (p. 29) menciona que "las leyes físicas se expresan a través de relaciones funcionales entre las diferentes magnitudes físicas o parámetros. Entre los parámetros determinantes debe haber obligatoriamente magnitudes con dimensiones a través de las cuáles pueda expresarse las dimensiones de todos los parámetros dependientes."

"Es posible obtener un modelo para la realización de un experimento mediante el método de análisis dimensional. Las "dimensiones" de una cantidad física (mecánica) son su expresión en términos de las magnitudes elementales (Tabla 1) de longitud, masa y tiempo, abreviadas como L, M y T" [4] (p. 99).

Tabla 1: Magnitudes elementales y sus dimensiones

Magnitud	*Dimensiones*
Masa	$\boldsymbol{M}$
Longitud	$\boldsymbol{L}$
Tiempo	$\boldsymbol{T}$
Temperatura	$\boldsymbol{\theta}$
Cantidad de materia	$\boldsymbol{N}$
Intensidad de corriente	$\boldsymbol{I}$
Intensidad luminosa	$\boldsymbol{J}$

"Existen otras magnitudes, llamadas derivadas, cuyas unidades son combinaciones de estas. Así, las unidades de velocidad son del tipo $\boldsymbol{LT^{-1}}$ o las de la aceleración $\boldsymbol{LT^{-2}}$" [8] (p. 30).

[4] (p. 99) relata que el principio empleado en el análisis dimensional se basa en el requisito de que las dimensiones de una ecuación deben de corresponder.

De esta manera, para el caso de estudio del péndulo supondremos que el periodo de un péndulo $\boldsymbol{T}$ depende de la longitud de la cuerda que lo sostiene $\boldsymbol{L}$, la masa del objeto que oscila $\boldsymbol{m}$ y de la gravedad $\boldsymbol{g}$ como se muestra a continuación:

$$\boldsymbol{T \alpha L^x m^y g^z}\ (5)$$

Donde $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$ son valores desconocidos que dan sentido a la igualdad y $\boldsymbol{\alpha}$ indica proporcionalidad.

Por el principio de igualdad de dimensiones, tenemos que el lado izquierdo de la ecuación debe ser igual dimensionalmente al derecho.

$$[\boldsymbol{T}] = [\boldsymbol{L}]^x[\boldsymbol{m}]^y[\boldsymbol{g}]^z$$

Donde [] significa que señalamos las unidades de la magnitud encerrada en ellos. Luego dado que, longitud y masa tienen dimensiones de longitud y masa respectivamente, el periodo tiene dimensiones de temperatura y la gravedad de aceleración.

$$\Rightarrow \boldsymbol{T = L^x M^y (LT^{-2})^z}$$

De esta manera todo queda expresado en términos de dimensiones de $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{T}$. Para continuar colocamos dimensiones de $\boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{L}$ elevadas a la $\mathbf{0}$ para que la expresión se mantenga correcta.

$$\boldsymbol{L^0 M^0 T^1 = L^x M^y L^z T^{-2z}}$$

Simplificando términos iguales.

$$\boldsymbol{L^0 M^0 T^1 = L^{x+z} M^y T^{-2z}}$$

Comparando ambos lados de la ecuación podemos deducir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\boldsymbol{x + z = 0; y = 0;\ -2z = 1}\ (6)$$

De esta manera al resolver la ecuación 6 tenemos que:

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{2}; y = 0; z = -\frac{1}{2}}\ (7)$$

Sustituyendo en la ecuación 5 concluimos que:

$$\boldsymbol{T \alpha L^{\frac{1}{2}} m^0 g^{-\frac{1}{2}}}\ (\mathbf{8})$$

Que podemos simplificar como:

$$\boldsymbol{T \alpha \sqrt{\frac{L}{g}}}\ (\mathbf{9})$$

Dado que el método está basado en comparar dimensiones, no se puede asegurar que el resultado sea una igualdad ya que las constantes numéricas son adimensionales; sin embargo, si es posible remplazar el símbolo de proporcionalidad por una igualdad si se multiplica a la expresión por una constante de proporcionalidad k desconocida.

$$T = k\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (10)$$

De esta manera se ha logrado deducir una teoría matemática que describa el fenómeno investigado donde nuevamente se puede observar que el periodo no depende de la masa del péndulo, sino solo de su longitud y el valor de la gravedad.

Al comparar la ecuación 4 con la ecuación 10 se puede deducir que la constante k debe ser igual a 2π; sin embargo, el objetivo es concluir esa información experimentalmente.

Experimentación

Una vez que se ha establecido el modelo, sigue la experimentación, para ello se debe realizar otro experimento independiente, encontrar el valor de la aceleración de la gravedad.

[1] expresa que "si la Tierra fuera una esfera perfecta, se esperaría que el valor de la gravedad fuera constante en todos los puntos, pero dado que posee una configuración elipsoidal, además de cuestiones como la rotación, el relieve superficial irregular y la distribución de la masa del planeta; la gravedad debe variar dependiendo del lugar donde te encuentres." (p. 5)

Modelando g

Para que el modelo salga de esta manera lo más realista posible se realizará un experimento independiente para determinar el valor de g.

Para ello se parte del hecho de que la aceleración se puede definir como la derivada de la velocidad respecto del tiempo y que además en una caída libre esta es constante.

$$a = g = \frac{dv}{dt} = constante \quad (11)$$

Integrando y suponiendo una velocidad inicial 0 se obtiene que:

$$\int_0^{v_f} \frac{dv}{dt}\, dt = v_f = \int_0^{v_f} g\, dt = gt \quad (12)$$

Partiendo a su vez que la velocidad es la derivada de la posición, en este caso altura, respecto del tiempo y suponiendo una distancia recorrida de 0 en un inicio.

$$v = \frac{dy}{dt} \quad (13)$$

$$\int_0^h \frac{dy}{dt}\, dt = \int_0^h gt\, dt = \frac{1}{2}gt^2 \quad (14)$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{2}gt^2 \quad (15)$$

Donde h representa la altura desde donde es soltado un objeto desde el reposo y t el tiempo que tarda en recorrer esa altura.

Despejando g se obtiene que:

$$g = \frac{2h}{t^2} \quad (16)$$

Incertidumbres

Una vez obtenida una fórmula que permita encontrar g el experimento consistirá en tomar distintas mediciones de distintas alturas y el tiempo de caída de un objeto a esas alturas.

"La medición es el proceso de cuantificar nuestra experiencia del mundo y por desgracia de la elegancia matemática en los cálculos, a menudo requerimos determinar la incertidumbre de una medición exterior" [4] (p. 8).

"Toda medición lleva implícita una incertidumbre, un parámetro que caracteriza la dispersión de los valores que puede ser atribuida al mensurando, es decir, el atributo sujeto a medición de un fenómeno" [13] (p. 4).

$$x = \bar{x} + \Delta x \quad (17)$$

Para todas las mediciones de distancia que se tomaron en esta investigación se determinó la incertidumbre de dos maneras:

- Para las distancias se tomó como base a [12] que establece que "un procedimiento ampliamente utilizado, más no el único ni más apropiado, es colocar el valor de la división más pequeña que se pueda leer en el instrumento." (p. 11)

  Para los dos experimentos que se mencionaran la incertidumbre en las distancias, se establecerá entonces en 1mm.

  $$\Delta x = 0.001\ m \quad (18)$$

  Para las mediciones de tiempos, se tomó como base en cambio a [13] que expresa que "una medición física, por simple que sea, tiene asociado un modelo que solo se aproxima al proceso real." (p. 8)

  Para calcular la incertidumbre en estos casos se utilizó la siguiente expresión:

  $$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2} \quad (19)$$

  Donde n es el número de mediciones que se realizan, x_k los datos recolectados y $\bar{x}$ el promedio de los datos.

> [13] también nos dice que "no se puede dar una recomendación general para el número ideal de mediciones, ya que éste depende de las condiciones y exigencias de cada medición específica." (p. 9)

Cálculo de g

Para determinar g se realizaron 64 mediciones, 8 mediciones de tiempo para 8 alturas distintas. El problema en este caso fue determinar mediciones de tiempo precisas en las que la oposición del aire no fuera un inconveniente, pero se pudieran tomar los tiempos lo más precisos posibles.

Tal como relata [5] una de las problemáticas a la hora de realizar experimentos de física es la falta de equipos especializados de laboratorio; sin embargo, la carencia de instrumentos podría ya no ser una excusa, ya que en los últimos años ha aumentado el uso de teléfonos celulares (smartphones) por estudiantes de nivel medio superior y superior.

[9] nos comentan que los sensores de los smartphones pueden ser usados para varios experimentos de física ya que están equipados con varios sensores internos, que, aunque cuya función principal no es experimentar, hay aplicaciones que pueden aprovecharlos con ese fin como Phypox.

Para este experimento se usó una de las funciones de Phyphox que permite determinar el tiempo entre dos sucesos sonoros, más en específico se usó la opción de cronómetro acústico (Figura 2).

Figura 2: Cronómetro acústico de Phyphox.

Una vez que se tomaron mediciones precisas de tiempos de caída se calculó el valor promedio del tiempo de caída para cada una de las 8 alturas (Tabla 3) con sus respectivas incertidumbres calculadas con la ecuación 19.

Para calcular la gravedad se utilizó la ecuación 16 y luego se determinó su incertidumbre respectiva para cada una de las 8 alturas estudiadas para finalmente promediarlas en un valor único.

Dado que la gravedad se obtiene de un conjunto de datos que tienen distintas incertidumbres entre sí (ecuación 18 y 19), la incertidumbre resultante se obtiene de una continuación de ellas usando las siguientes fórmulas proporcionadas por [3]:

Tabla 2: Propagación de errores en distintas operaciones

Operación	Expresión	Incertidumbre
Multiplicar por una constante	$Y = cX$	$Y = \|c\|\Delta X$
Potencia	$Y = X^k$	$\left\|\frac{kY}{X}\right\| \Delta X$
Multiplicar	$Y = X_1 X_2$	$\|Y\|\left(\frac{\Delta X_1}{X_1} + \frac{\Delta X_2}{X_2}\right)$
División	$Y = \frac{X_1}{X_2}$	$\|Y\|\left(\frac{\Delta X_1}{X_1} + \frac{\Delta X_2}{X_2}\right)$

Determinación del periodo del péndulo a distintas longitudes

Para la parte principal del experimento se tomaron 100 mediciones diferentes, 10 mediciones de periodo para 10 longitudes de cuerda diferentes.

Este experimento vale la pena compararlo con el experimento realizado por [6] en que se puso a los estudiantes a medir el periodo de un péndulo simple por medio de un sensor de efecto Hall, cambiando también las longitudes de la cuerda del péndulo. La gran diferencia es que en este experimento se usó equipo más avanzado con el fin de determinar el valor de g usando como hecho la fórmula tradicional del periodo de un péndulo mostrada en la ecuación 4.

A pesar de que los enfoques de ambas investigaciones son muy diferentes, aun tratándose de medir el periodo de un péndulo simple variando longitudes de la cuerda, hay consideraciones hechas que valen tomarse en cuenta aquí también. Por ejemplo:

- Se desprecia la fricción con el aire, teniendo en cuenta las pequeñas velocidades del cuerpo en la caída.
- Se considera la aceleración de la gravedad (obtenida en este caso con la ecuación 16) constante, teniendo en cuenta la cercanía a la superficie terrestre y las pequeñas variaciones de altura.
- No se considera la calibración de los instrumentos de medición.

- No se consideran los aportes de estas fuentes de errores a la incertidumbre.
- Adicionalmente el experimento se realiza siempre con un ángulo pequeño.
- A pesar de que la masa no interfiere, se utiliza una esfera como masa oscilante para evitar que la forma del objeto oponga resistencia al aire y afecte el experimento (Figura 3).

Figura 3: Péndulo utilizado para toma de datos

Como ya se estableció, para la toma de datos se realizaron 10 repeticiones de medición del periodo para cada variación de longitud que se realizó dejando como constante el ángulo al que se alzaba la esfera.

Hay que resaltar que para cada medición del periodo no se midió el tiempo en que la esfera tardaba en completar una oscilación, sino que se tomó el tiempo de 10 y el resultado se dividió entre este número.

Resultados y establecimiento del modelo completo

Datos obtenidos para la gravedad

Una vez calculadas las incertidumbres de cada serie de repeticiones de atura vs tiempo de caída se obtuvieron los siguientes datos:

Tabla 3: Resultados obtenidos al repetir cada medición de altura 8 veces

Altura (m)	Tiempo de caída (s)
0.537 ± 0.001	$\mathbf{0.335 \pm 0.001}$
0.764 ± 0.001	$\mathbf{0.403 \pm 0.005}$
0.916 ± 0.001	$\mathbf{0.444 \pm 0.004}$
1.098 ± 0.001	$\mathbf{0.435 \pm 0.004}$
1.440 ± 0.001	$\mathbf{0.523 \pm 0.008}$
1.840 ± 0.001	$\mathbf{0.630 \pm 0.010}$
2.070 ± 0.001	$\mathbf{0.672 \pm 0.012}$

Una vez obtenidos los datos que se muestran en la tabla 3 se procedió a obtener un valor central para la gravedad al usar la ecuación 16 y su respectiva incertidumbre calculada con las fórmulas usadas en la tabla 2.

De esta manera se concluyó que:

$$\boldsymbol{g = 9.835 \pm 0.242\ m/s^2} \quad \mathbf{(20)}$$

Datos obtenidos para el periodo

Por otro lado, después de realizar los cálculos correspondientes para cada toma de datos y usando como base para calcular las incertidumbres a 19 se obtuvo la siguiente serie de resultados:

Tabla 4: Resultados obtenidos al repetir cada variación de longitud de la cuerda 10 veces

Longitud de la cuerda (m)	Periodo (s)
0.130 ± 0.001	$\mathbf{0.813 \pm 0.002}$
0.143 ± 0.001	$\mathbf{0.837 \pm 0.004}$
0.196 ± 0.001	$\mathbf{0.949 \pm 0.004}$
0.221 ± 0.001	$\mathbf{1.005 \pm 0.004}$
0.272 ± 0.001	$\mathbf{1.091 \pm 0.007}$
0.290 ± 0.001	$\mathbf{1.103 \pm 0.002}$
0.323 ± 0.001	$\mathbf{1.176 \pm 0.003}$
0.374 ± 0.001	$\mathbf{1.276 \pm 0.002}$
0434 ± 0.001	$\mathbf{1.350 \pm 0.002}$
0.492 ± 0.001	$\mathbf{1.432 \pm 0.003}$

Una vez obtenidos estos datos, se puede visualizar en la Figura 4 que se muestra una tendencia lineal y que el periodo es proporcional a la longitud de la cuerda que lo sostiene.

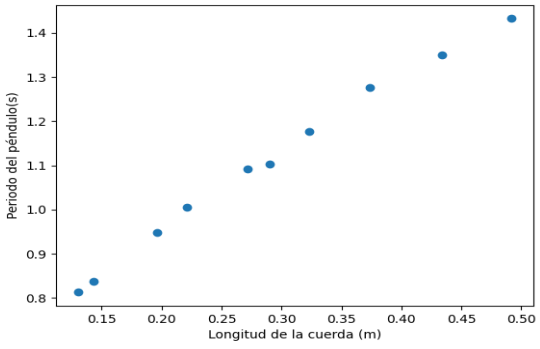

Figura 4: Periodo de un péndulo simple respecto a la longitud de su cuerda

Método de mínimos cuadrados

Para completar el modelo matemático y encontrar la constante $\boldsymbol{k}$ mostrada en la ecuación 10 se hará uso del método de regresión lineal conocido mínimos cuadrados.

Como establece [11] (p. 2) el modelo de regresión lineal posibilita, una vez establecida una función lineal, efectuar predicciones sobre el valor de la variable $\boldsymbol{y}$, variable dependiente, sabiendo los valores de un conjunto de variables $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$, variables independientes.

El objetivo final de este método es obtener una ecuación del estilo $\boldsymbol{y = mx + b}$ que pueda ajustarse al comportamiento de nuestros datos y predecir nuevos.

De esta manera, se usarán los datos mostrados en la Tabla 4 para obtener una ecuación que se ajuste a nuestros datos; sin embargo, existe un inconveniente, el objetivo es encontrar una constante $\boldsymbol{k}$ que se ajuste al modelo matemático obtenido en la ecuación 10, el cual no parece tener un comportamiento lineal del estilo $\boldsymbol{y = mx + b}$.

[4] tranquiliza al respecto, pues menciona que "podemos expresar una ecuación análoga para cualquier función no lineal" (p. 132). Es así que se tomará como los datos de la variable $\boldsymbol{x}$ no a las longitudes como se hizo en la gráfica mostrada en la figura 4, si no que se tomarán los datos de realizar la operación $\boldsymbol{\sqrt{L/g}}$ para cada uno de ellos, usando como valor de $\boldsymbol{g}$ el mostrado en la ecuación 20.

Una vez realizadas las operaciones con sus respectivas incertidumbres calculadas a partir de la tabla 2 tendremos la siguiente información:

Tabla 5: Comparación del periodo de un péndulo contra la relación $\sqrt{L/g}$

Longitud de la cuerda (m)	$\sqrt{L/g}$
0.130 ± 0.001	$\mathbf{0.115 \pm 0.002}$
0.143 ± 0.001	$\mathbf{0.121 \pm 0.002}$
0.196 ± 0.001	$\mathbf{0.141 \pm 0.002}$
0.221 ± 0.001	$\mathbf{0.150 \pm 0.002}$
0.272 ± 0.001	$\mathbf{0.166 \pm 0.002}$
0.290 ± 0.001	$\mathbf{0.172 \pm 0.002}$
0.323 ± 0.001	$\mathbf{0.181 \pm 0.002}$
0.374 ± 0.001	$\mathbf{0.195 \pm 0.003}$
0434 ± 0.001	$\mathbf{0.210 \pm 0.003}$
0.492 ± 0.001	$\mathbf{0.224 \pm 0.003}$

Los cuales fueron graficados de la siguiente manera:

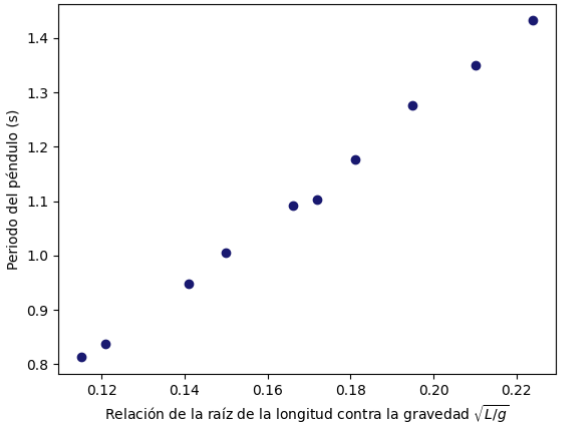

Figura 5: Relación $\sqrt{L/g}$ respecto a la longitud de su cuerda.

Para obtener los valores m y b que se ajusten a una gráfica lineal que se adapte a la mostrada en la Figura 5 se pueden usar las siguientes formulas:

$$m = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - n(\bar{x})^2} \quad (21)$$

$$\boldsymbol{b = \bar{y} - m\bar{x}} \quad \mathbf{(22)}$$

Donde $\boldsymbol{\bar{x}}$ y $\boldsymbol{\bar{y}}$ representan los promedios de los valores de nuestras variables independientes y dependientes respectivamente.

Si bien hacer estos cálculos pueden resultar un poco tediosos, usando software como Microsoft Excel o aplicaciones para smartphone que calculen directamente el valor de $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{b}$, en cualquier caso, el resultado será el siguiente:

$$\boldsymbol{y = 5.74\, x + 0.14} \quad \mathbf{(23)}$$

Al comparar con la ecuación 10 se deduce que la constante $\boldsymbol{k}$ tiene un valor experimental de $\mathbf{5.74}$ y además es necesario agregar la constante $\mathbf{0.14}$.

En ese caso, el modelo matemático que se ajusta más a la toma de datos descritos en la tabla 4 y describe el comportamiento del péndulo simple que se usó es el siguiente:

$$\boldsymbol{T = 5.74\sqrt{\frac{L}{g}}} \quad \mathbf{(24)}$$

Donde $\boldsymbol{g = 9.835\ m/s^2}$ (Ecuación 20).

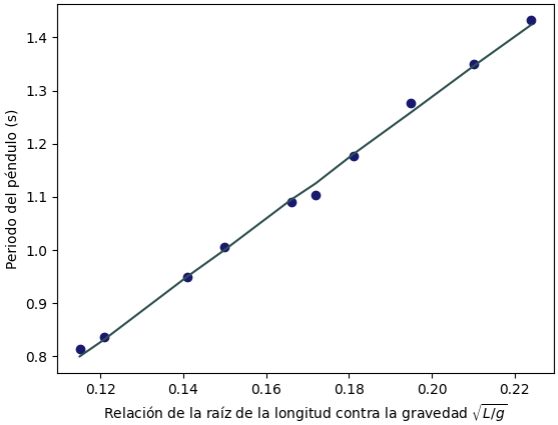

Figura 6: Ajuste lineal de mínimos cuadrados

Coeficiente de correlación

Para finalizar se calculará el coeficiente de correlación, el cuál es descrito por [3] como "una cantidad que da calidad del ajuste por mínimos cuadrados a los datos originales y se denota por r^2" pag(131).

$$r = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{[n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2] - [n\Sigma y_i^2 - (\Sigma y_i)^2]}}$$

Al calcular éste se obtiene un valor de $\mathbf{0.9972}$, lo cuál indica que los datos de longitud y periodo se relacionan en un $\mathbf{99.72}\%$, es decir, el modelo matemático se ajusta muy bien a los datos experimentales.

Comparación de modelos

Para finalizar al comparar los resultados obtenidos al sustituir los valores de nuestras longitudes en ambos modelos matemáticos se puede observar que a pesar de que el modelo matemático obtenido (Ecuación 24) difiere ligeramente del teórico tradicional (Ecuación 4), los resultados al sustituir las longitudes estudiadas, se ajustan más al obtenido experimentalmente (Véase tabla 6).

Longitud de la cuerda (m)	Periodo en modelo tradicional (s)	Periodo en modelo experimental (s)	Periodo obtenido (s)
0.130	**0.723**	**0.799**	**0.813**
0.143	**0.758**	**0.832**	**0.837**
0.196	**0.888**	**0.950**	**0.949**
0.221	**0.945**	**1.000**	**1.005**
0.272	**1.046**	**1.095**	**1.091**
0.290	**1.080**	**1.126**	**1.103**
0.323	**1.140**	**1.180**	**1.176**
0.374	**1.227**	**1.259**	**1.276**
0434	**1.322**	**1.346**	**1.350**
0.492	**1.407**	**1.424**	**1.432**

En conclusión, a pesar de que ahora es necesario realizar nuevas mediciones que comprueben que el modelo matemático funciona siempre en las condiciones en las que se diseñó, al menos sí se puede concluir que el modelo obtenido se ajusta más a los datos observados en la vida real que el teórico tradicional.

Por lo tanto, el modelo matemático es acertado y sirve para describir el comportamiento del periodo de un péndulo simple en las condiciones que se realizó, siendo el modelo el siguiente:

$$T = 5.74\sqrt{\frac{L}{9.835\ m/s^2}} + 0.14$$

Referencias

[1] AFONSO, Á. D. V. (2022). ESTUDIO GRAVIMÉTRICO PARA PROSPECCIÓN DE LITIO EN EL SALAR DE COIPASA REGIÓN DE TARAPACÁ CHILE. Tesis doctoral, UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN.

[2]Al-Khalili, J., & Otero-Piñeiro, D. (2021). El mundo según la física. Alianza Editorial.

[3]Ardila, Á. (2007). Física Experimental. Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

[4] Baird, D. (2000). Experimentación. Una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos. Pearson Prentice Hall.

[5] Bandala, L. P., Venzor, J. C., Chávez, E. Z., Duarte, J. M., Nevárez, L. A., Rojo, M., & de la Vega Cobos, C. (2021). Uso alterno del cronómetro de un teléfono celular en la medición. Latin-American Journal of Physics Education.

[6] Borroto, H., Becquer, M., & Amaya, O. S. (2017). Evaluación de la incertidumbre en la medición en el laboratorio introductorio de física. Latin-American Journal of Physics Education.

[7] Chumo, R. N., & Chumo, D. A. (2022). El aprendizaje activo de la física durante la práctica del péndulo simple mediante simulación. Yachana Revista Científica.

[8] Costa, O. (2021). Elementos de análisis dimensional. Ciencia y Tecnología. Editorial Universidad de Almería.

[9] Imtinan, N., & Kuswanto, H. (2023). The use of phyphox application in physics experiments. JIPF, 183-191.

[10] Meléndez, A. L., García, A. G., Otero, E. T., Julio, J. R., Albor, M. M., Ariza, R. G., & Crespo, T. R. (2023). Actividades experimentales blended en física para clases híbridas: presenciales y remotas: Física calor ondas. Universidad del Norte.

[11] Molina, M. (2021). La distancia más corta. el método de los mínimos cuadrados. Revista electrónica AnestesiaR.

[12] Piratoba Morales, U. (2018). Introducción a la física experimental : generalidades y guías de laboratorio. Piratoba Morales, U. (2018). Introducción a la física experimental : generalidades y guías de laboratorio. Editorial Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia http://repositorio.uptc.edu.co/handle/001/3289.

[13] Schmid, W. A. (2000). Guía para estimar la incertidumbre de la medición. El Marquez, Querétaro: CENAM.

[14] Young, H., Freedman, R., Sears, F., Flores, V., Ford, A., & Zemansky, M. (2009). Física universitaria 01. Número v. 1 en Física universitaria. Addison-Wesley. Pearson Educación.