https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/prepa2/issue/archive

Logos Boletín Científico de la Escuela Preparatoria No. 2

Publicación semestral, Vol. 7, No. 14 (2020) 9-15

LOGOS

ISSN: 2007-7637

Parábola

Parable

Rivelino Meneses Soto [a]

Abstract:

The parabola is the geometric place of all points on the curve that move in such a way that they always equidistant from a fixed point (focus) and fixed line (guideline).

Keywords:

Parable, guideline, focus, geometric place

Resumen:

La parábola es el lugar geométrico de los puntos sobre la curva que se mueven de tal forma que siempre equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz.

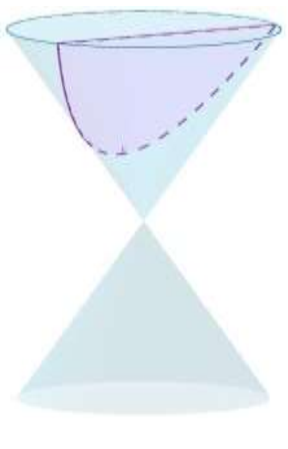
***Palabras Clave*:**

Parábola, línea guía, foco, lugar geométrico

Introducción

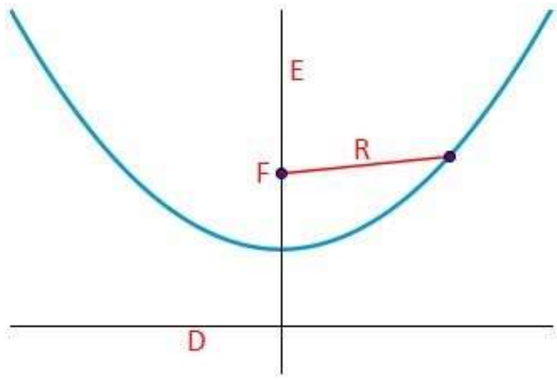
La parábola es una sección cónica, resultado de la intersección de un cono recto con un plano que corta a la base del mismo, oblicuo a su eje y paralelo a una generatriz (*g*) de la superficie cónica.

El foco y la directriz determinan cómo va a ser la apariencia de la parábola (en el sentido de que que “parecerá” más o menos abierta según sea la distancia entre F y la directriz). Todas las parábolas son semejantes. Su excentricidad es 1 en todos los casos. Solamente varía la escala.



Elementos de una parábola

Los elementos de la parábola son:

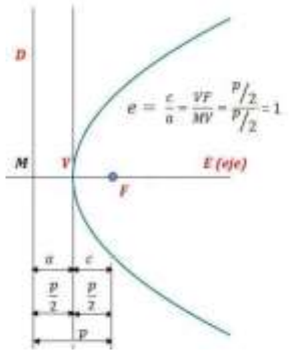


- Foco: el foco *F* es el punto fijo. Los puntos de la parábola equidistan del foco y la directriz.
- Directriz: es la recta fija *D*. Los puntos de la parábola equidistan de la directriz y el foco.
- Radio vector: es el segmento *R* que une el foco con cada uno de los puntos de la parábola. Es igual al segmento perpendicular a la directriz desde el punto correspondiente.

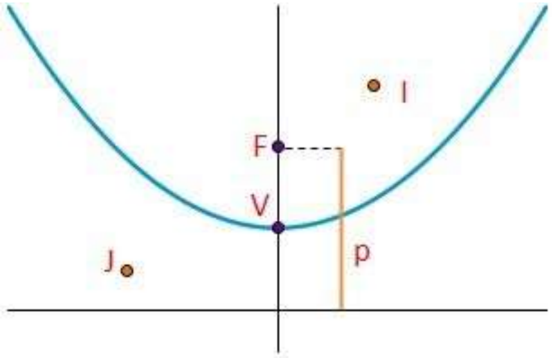
[a] Autor de Correspondencia, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Email: rivelino_meneses9610@uaeh.edu.mx

Fecha de publicación: 05/07/2020

- Eje: es la recta *E* perpendicular a la directriz que pasa por el foco y el vértice. Es el eje de simetría



de la parábola.



- **Parámetro**: es el vector ***p***, que va desde el foco al punto más próximo de la directriz.
  Es importante el **signo del parámetro**. En las parábolas verticales, cuando el parámetro es positivo la parábola se abre hacia arriba. Cuando *p* es negativo, la parábola se abre hacia abajo. Igualmente, en las parábolas horizontales, cuando *p* es positivo, se abre hacia la derecha y cuando *p* es negativo, la parábola se abre a la izquierda.
- **Vértice**: es el punto ***V*** de la intersección del eje y la parábola.
- **Distancia focal**: distancia entre el foco *F* y el vértice *V*. Es igual a *p*/2.
- **Puntos interiores y exteriores**: la parábola divide el plano en dos regiones. Los puntos que están en la región del foco se llaman puntos interiores (***I***), mientras que los otros son los exteriores (***J***).
- **Cuerda**: segmento que une dos puntos cualesquiera de la parábola.
- **Cuerda focal**: una cuerda que pasa por el foco *F*.
- **Lado recto**: Cuerda focal paralela a la directriz *D* y, por tanto, perpendicular al eje *E*. Su longitud es dos veces el parámetro (2*p*, pues se ven en la figura dos cuadrados unidos iguales de lado *p*).

Excentricidad de la parábola

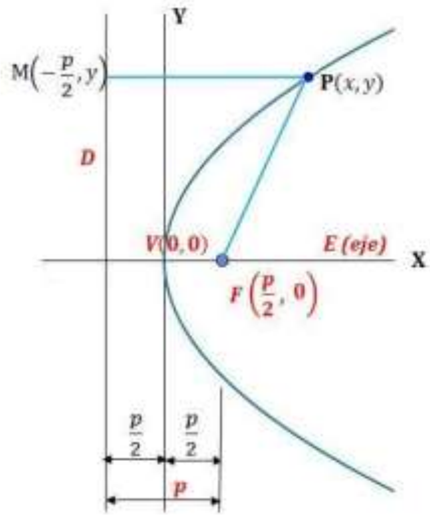
La parábola es la única de las cónicas cuya excentricidad es siempre 1. Veamos la figura:

Por la misma definición de parábola, su excentricidad siempre es la unidad. De esto deriva que todas las parábolas sean **semejantes**, variando su apariencia de cerradas o abiertas, según la escala.

Ecuación de la parábola

La **ecuación de la parábola** depende de si el eje es vertical u horizontal. Si el eje es vertical, la *y* será la variable dependiente. Si el eje es horizontal, será *x* la variable dependiente.

Ecuación canónica o reducida de la parábola



Consideremos una parábola cuyo eje es el eje de ordenadas, su vértice es el centro de coordenadas *V* (0, 0) y que está en la parte positiva de las *x*. En este caso, el foco estará necesariamente en *F* (*p*/2,0) . La ecuación de la recta directriz *D* será *x* = –*p*/2.

Los radios vectores *FP* y *PM*, correspondientes a cualquier punto *P* de la parábola (que, por definición, son iguales) tendrán la longitud:

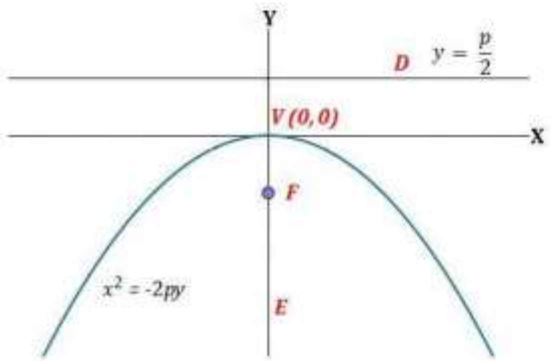
$$\mathrm{FP} = \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2}$$

$$\mathrm{MP} = \frac{p}{2} + x$$

$$\mathrm{FP} = \mathrm{MP}$$

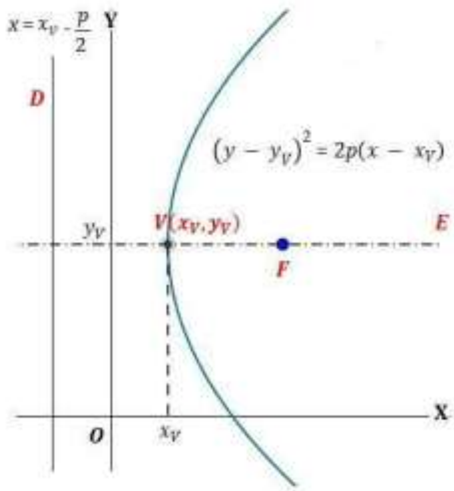
$$\sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2} = \frac{p}{2} + x$$

$$y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + x^2 + 2 \cdot \frac{px}{2}$$



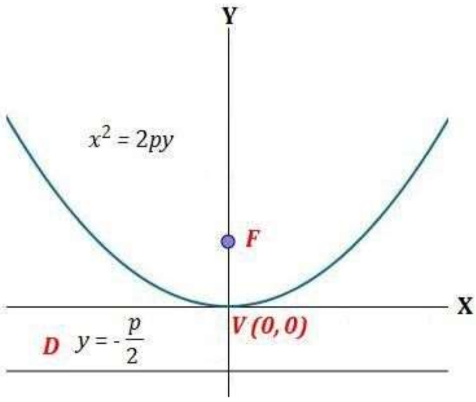
Operando y simplificando, obtenemos la **ecuación canónica o reducida de la parábola** referida a esta configuración:

$$y^2 = 2px$$

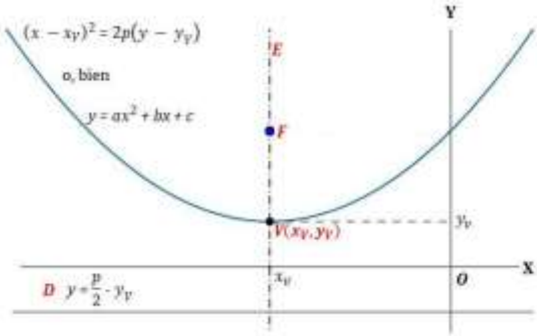


Si se desplaza paralelamente el eje *E* al eje de ordenadas y el vértice de la parábola se lleva al punto *V* (x_V,y_V), la ecuación de esta parábola ahora será la que se muestra en la imagen. También se muestra la ecuación de la recta directriz *D*.

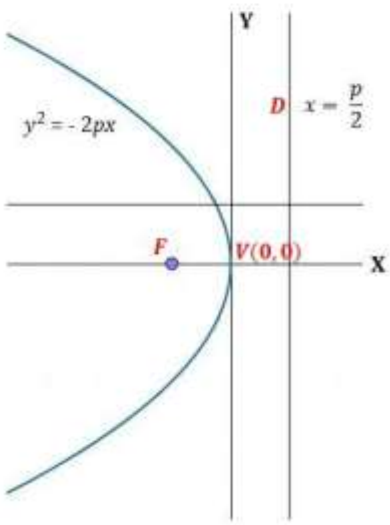
Ecuación canónica o reducida de la parábola, pero ahora con su eje coincidente con el eje de las abscisas, su vértice es el centro de coordenadas *V* (0,0) y que está en la parte positiva de las *y*.



Si se desplaza paralelamente el eje *E* al eje de las abscisas y el vértice de la parábola se lleva al punto *V* (x_V,y_V), la ecuación de esta parábola ahora será la que se muestra en la imagen



Análogamente, vemos las expresiones de la ecuación canónica o reducida para las parábolas con ejes coincidentes con el eje de ordenadas o con el eje de abscisas, siempre con el vértice en el origen *O* (0,0), pero ahora con valores negativos de las *x* y de las *y* respectivamente. Se muestra en las dos imágenes siguientes:



Y la segunda:

Otras ecuaciones de la parábola

La **ecuación de la parábola** con vértice $V\,(x_V, y_V)$ y el eje vertical paralelo al eje OY es:

$$(x - x_V)^2 = 2p(y - y_V) \rightarrow$$

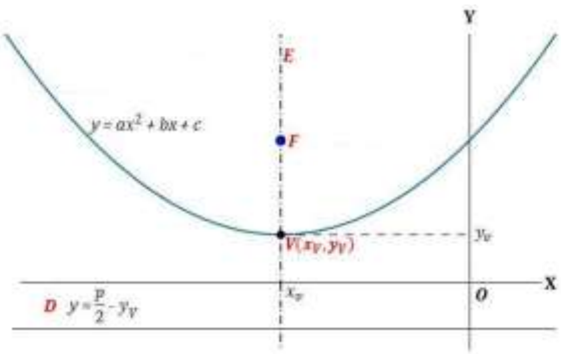
$$\rightarrow x^2 + x_V{}^2 - 2xx_V = 2py - 2py_V \rightarrow$$

$$\rightarrow y = ax^2 + bx + c$$

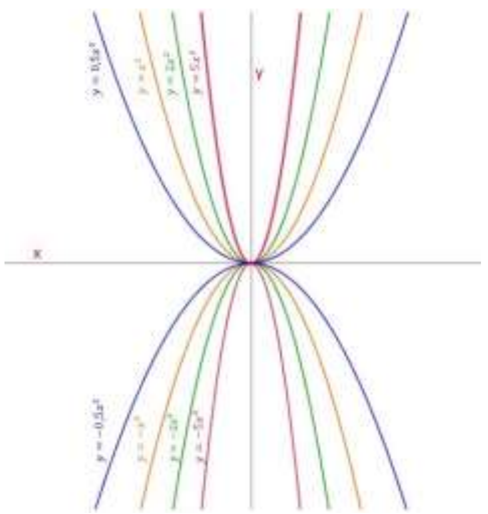
En la que las constantes tienen el siguiente valor:

$$a = \frac{1}{2p}; \quad b = -\frac{x_V}{p}; \quad c = \frac{x_V{}^2}{2p} + y_V$$

Donde $a \neq 0$ y b y c son números reales.
Lo vemos en la imagen:



La constante a indica lo ***"abierta"*** que es la parábola. Cuando el valor de a es menor, la parábola aparecerá más abierta. Dicho de otra manera, la parábola aparecerá más abierta cuando el parámetro p sea mayor. Si la constante a es positiva, el vértice V será el **mínimo** de la parábola, es decir, se abre hacia arriba. Si la constante a es negativa, el vértice V será **máximo** de la parábola, o sea, que se abre hacia abajo.



La **ecuación de la parábola** con vértice $V\,(x_V, y_V)$ y el **eje horizontal** paralelo al eje OX es:

$$(y - y_V)^2 = 2p(x - x_V) \rightarrow$$

$$\rightarrow y^2 + y_V{}^2 - 2yy_V = 2px - 2px_V \rightarrow$$

$$\rightarrow x = ay^2 + by + c$$

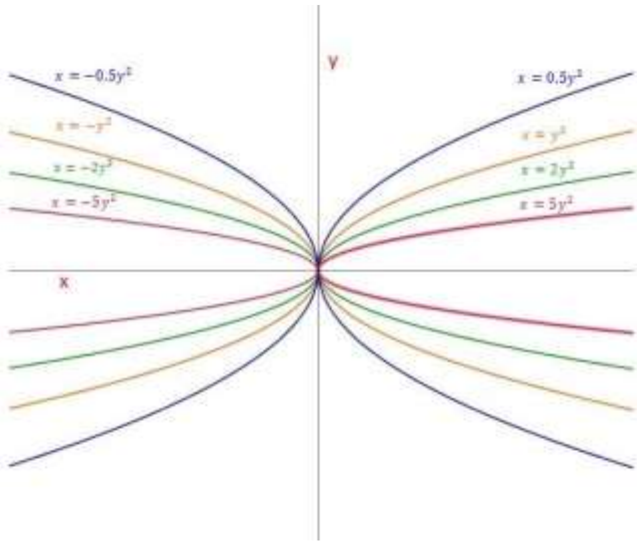
En la que las constantes tienen el siguiente valor:

$$a = \frac{1}{2p}; \quad b = -\frac{y_V}{p}; \quad c = \frac{y_V{}^2}{2p} + x_V$$

La constante a indica lo ***"abierta"*** que es la parábola. Cuando el valor de a es menor, la parábola aparecerá más abierta. Dicho de otra manera, la parábola aparecerá más abierta cuando el parámetro p sea mayor.

Si la constante a es positiva, la parábola se **abre hacia la derecha**. Si la constante a es negativa, la parábola se abre **hacia la izquierda**.

Ecuación general de la parábola

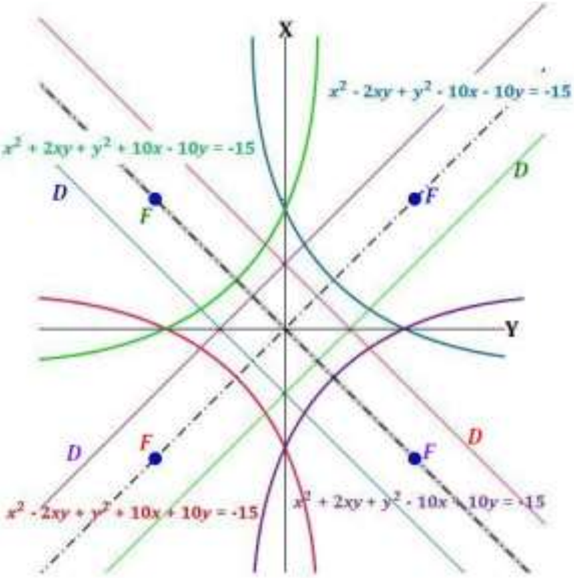


Los casos anteriores donde el eje es vertical u horizontal, son casos particulares de la **ecuación general de la parábola**.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = cte$$

siempre que $B^2 - 4AC = 0$ y A y C no sean nulos al mismo tiempo

Veamos casos de parábolas en los que sus ejes no son verticales ni horizontales. Es el caso de la **parábola inclinada** o **parábola oblicua**.



En estos cuatro casos su ecuación tiene todos los términos de la **ecuación general de la parábola**.
Se puede comprobar que en las cuatro parábolas se cumplen las dos condiciones de la **ecuación general de la parábola**, es decir que $B^2 - 4AC = 0$ y que A y C no son nulos al mismo tiempo.

Raíces de una parábola

Las **raíces de una parábola** vertical de ecuación son los puntos de la misma de ordenada nula ($y = 0$), es decir, allí donde la parábola corta al eje de ordenadas **OX**.

$$y = ax^2 + bx + c$$

Una parábola vertical puede tener dos raíces, una o ninguna.

Como en el corte con OX, $y = 0$, los puntos de cortes serán las raíces de una ecuación de segundo grado:

$$0 = ax^2 + bx + c$$

Cuyas raíces se hallan por la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

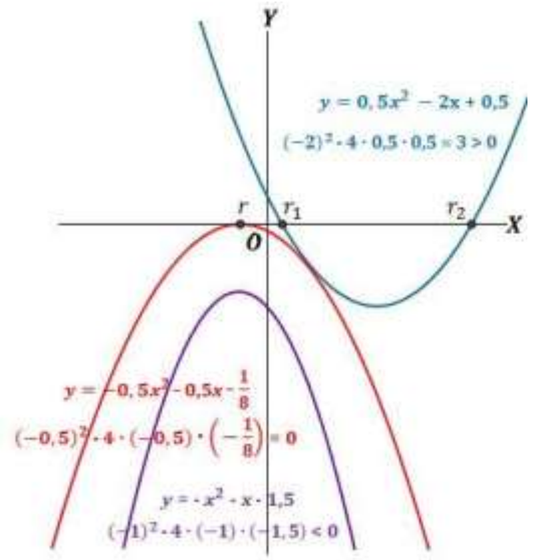
Donde el binomio que se halla dentro de la raíz cuadrada es el que determina el número de raíces de la parábola.

$$b^2 - 4ac > 0, \text{dos raíces}$$

$$b^2 - 4ac = 0, \text{una raíz}$$

$$b^2 - 4ac < 0, \text{no tiene raíces}$$

Los tres casos y la aplicación del criterio se ilustra en estas tres parábolas:



Así, en el caso de dos raíces, podemos hacer este desarrollo:

$$r_1 + r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

Por el punto medio de las dos raíces pasará el eje de la parábola, su eje de simetría. El resultado coincide con el hallado para ordenada del vértice de una parábola vertical.

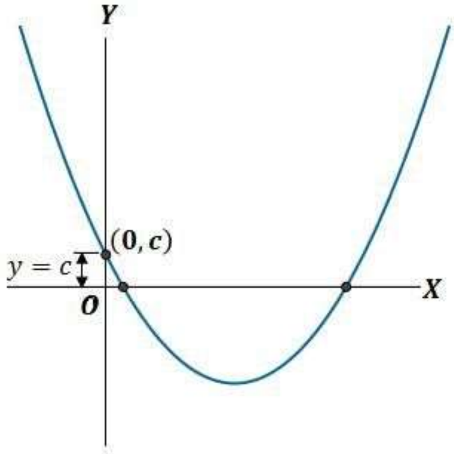
Si la parábola vertical tuviese una raíz, la ordenada del vértice será el valor de la misma raíz y, por tanto, la ecuación del eje de la parábola:

$$x = r = x_V$$

A partir de aquí, la ecuación de la parábola vertical se puede expresar también así:

$$y = a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2)$$

La parábola vertical cortará al eje OY cuando la ordenada sea nula, cuando $x = 0$.



Vértice de una parábola

El **vértice de una parábola** vertical V es el punto donde la parábola corta a su eje.
La ecuación de la parábola vertical se puede expresar de estas dos formas:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$(y - y_V) = a(x - x_V)^2$$

Desarrollando el cuadrado del segundo binomio:

$$y - y_V = a(x^2 + x_V{}^2 - 2x_V x)$$

$$y = ax^2 - 2ax_V x + ax_V{}^2 + y_V$$

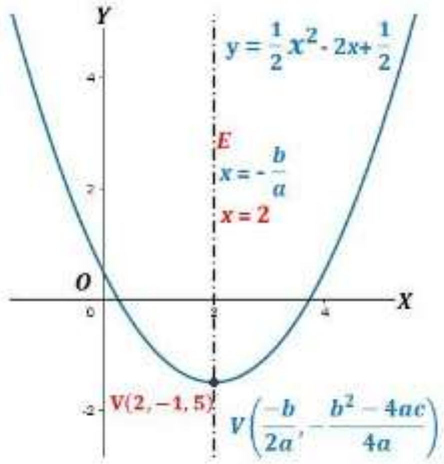
De donde obtenemos el coeficiente b y, a partir de él, la ordenada del <u>vértice</u> x_V:

$$b = -2ax_V\,; \quad x_V = -\frac{b}{2a}$$

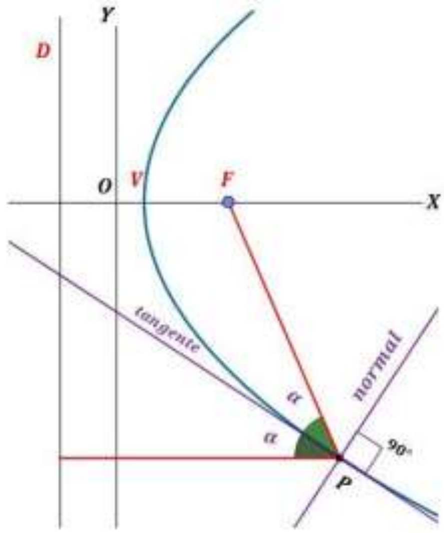
Sustituyendo la expresión de la ordenada del <u>vértice</u> x_V en la ecuación anterior, desarrollando y simplificando con el común denominador $4a$, obtenemos:

$$y_V = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

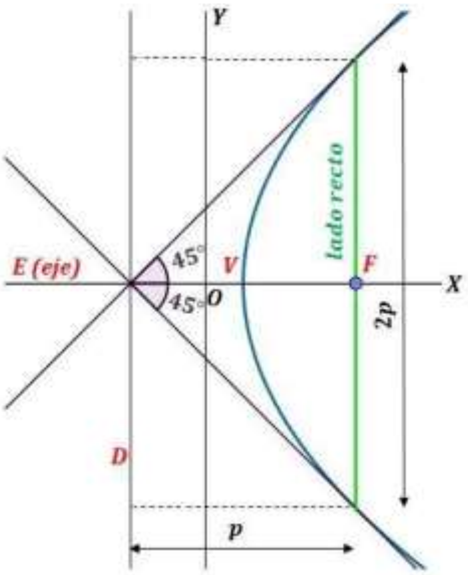
El resultado lo vemos en la imagen:



Tangente a la parábola



Las **rectas tangente y normal** a cualquier punto P de una parábola son las bisectrices de los ángulos formados por los radios vectores correspondientes a ese punto. De las dos bisectrices, hay que tener en cuenta cuál es la tangente y cuál la normal.
Las dos tangentes que pasan por los extremos del **lado recto** son perpendiculares entre sí y se cortan en la intersección de la **directriz** con el **eje**. Con este último forman dos ángulos de 45°.



Referencias

[1] Oteyza Elena, Geometría Analítica. Pearson Educación. México 2005.

[2] Universo Fórmulas, 2019. Extraído de la página: https://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/ecuacion-parabola/