https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/prepa3/issue/archive
Con-Ciencia Boletín Científico de la Escuela Preparatoria No. 3
CON - CIENCIA
Publicación semestral, Vol. 13, No. 25 (2026) 48-50
ISSN: 2007-7653

Distribuciones Binomial, Poisson y Normal aplicadas a defectos en producción

Binomial, Poisson and Normal Distributions Applied to Production Defects

Francisco López-González [a], Cecilio Tapia-Ignacio [b]

Abstract:
Quality control in production processes requires statistical tools that allow estimating the probability of obtaining defective products within a batch. In this study, three classical probabilistic models are used: the Binomial distribution, the Poisson distribution, and the Normal distribution, with the purpose of calculating and comparing the probability that, when selecting a set of hollow blocks at random, some may turn out to be defective under certain conditions.

Keywords:
Binomial distribution, Poisson distribution, Normal distribution, Hollow blocks

Resumen:

El control de calidad en los procesos de producción requiere herramientas estadísticas que permitan estimar la probabilidad de obtener productos defectuosos dentro de un lote. En este estudio se emplean tres modelos probabilísticos clásicos: la distribución Binomial, la distribución de Poisson y la distribución Normal, con el propósito de calcular y comparar la probabilidad de que, al seleccionar un conjunto de bovedillas de manera aleatoria, algunas resulten defectuosas dadas ciertas condiciones.

Palabras Clave:
Distribución Binomial, Distribución de Poisson, Distribución Normal, bovedillas

Introducción

En la industria es frecuente que una parte de los productos fabricados presente defectos. Para analizar esta situación y estimar la probabilidad de que ciertos artículos seleccionados al azar resulten defectuosos, se utilizan modelos estadísticos que permiten describir el fenómeno de forma matemática. Entre los más relevantes se encuentran la distribución Binomial, la distribución de Poisson y la distribución Normal, cada una con definiciones y características particulares.

[b] Autor de Correspondencia, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo | Prepa 3 | Pachuca-Hidalgo | México, https://orcid.org/0000-0002-8660-4993, Email: cecilio_tapia@uaeh.edu.mx

[a] Instituto Politécnico Nacional | Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Unidad Zacatenco (ESIME)| Ciudad de México | México, https://orcid.org/0000-0003-1982-4344, Email: francisco_lopez@uaeh.edu.mx

Fecha de recepción: 03/10/2025, Fecha de aceptación: 31/10/2025, Fecha de publicación: 05/01/2026

DOI: https://doi.org/10.29057/prepa3.v13i25.16116

Definiciones básicas

Distribuación Binomial

Se p la probabilidad de que un suceso ocurra en una sola prueba de Bernoulli (llamada la probabilidad de éxito). Entonces q=1-p es la probabilidad de que el suceso no ocurra en una sola prueba (llamada la probabilidad de fracaso). La probabilidad de que el suceso ocurra x veces en n pruebas (es decir que ocurran x éxitos y n-x fracasos) está dada por la función de probabilidad

$$P(x) = (n\ x\ )p^x\ q^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x\ q^{n-x} \qquad (1)$$

Donde la variable aleatoria x denota el número de éxitos en n pruebas y x=0, 1, . . . , n.
Puede demostrarse mediante la definición de valor esperado que la media de la distribución Binomial es $\mu = np$ y la desviación típica es $\sigma = \sqrt{npq}$. 1,2

Distribución de Poisson

Sea x una variable aleatoria discreta que puede tomar los valores 0, 1, 2, . . . tal que la función de probabilidad de x esté dada por:

$$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad x=0, 1, 2, . . . \qquad (2)$$

donde λ es una constante positiva dada. Esta distribución se llama de Poisson y una variable aleatoria con esta distribución se dice que está distribuida de acuerdo con la distribución de Poisson.
Al igual que en la distribución Binomial puede demostrarse mediante la definición de valor esperado que la media de la distribución de Poisson es $\mu = \lambda$ y la desviación típica es $\sigma = \sqrt{\lambda}$. 1,2

Distribución Normal
Uno de los más importantes ejemplos de una distribución de probabilidad continua es la distribución normal, algunas veces denominada la distribución gaussiana. La función de densidad para la distribución está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

(3)
donde μ y σ son la media (valor esperado) y desviación típica respectivamente.
Si por ejemplo hacemos que $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ entonces tenemos:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

(4)
Este resultado se conoce frecuentemente como la función o la distribución de densidad normal tipificada. En ocasiones es conveniente definir $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ en Ec. (3) para reescribirla en términos de z. 1,2

Relación entre la distribución Binomial y la distribución de Poisson

En la distribución binomial si *n* es grande mientras que la probabilidad p de ocurrencia de un suceso está cerca de cero, de modo que *q=1-p* está cerca de uno. En tales casos la distribución binomial se aproxima mucho a la distribución de Poisson con $\lambda = np$, pues si sustituimos np en el valor esperado de la distribución Binomial y en el valor esperado de la distribución de Poisson nos queda $\mu = np$ y $\sigma = \sqrt{np}$ ya que $q \simeq 0$.

Relación entre la distribución Binomial y la distribución Normal

Si *n* es muy grande y ni p ni q están muy próximas a cero, la distribución binomial puede aproximarse estrechamente a la distribución normal con variable tipificada dada por:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-np}{\sqrt{npq}} \qquad (5)$$

Pues recordemos que el valor esperado de la distribución binomial es $\mu = np$ y la desviación típica es $\sigma = \sqrt{npq}$.
Aquí x es la variable aleatoria que da el número de éxitos en n pruebas de Bernoulli y p es la probabilidad de éxitos.
La aproximación es tanto mejor conforme aumenta *n*.
En concreto, la distribución normal se puede usar para aproximar distribuciones discretas como la binomial a través de una corrección por continuidad, donde se suma o resta 0.5 al valor discreto para tener en cuenta la diferencia entre una variable continua y discreta.

Aplicación

Ejemplo:
En cierta fábrica ubicada en Mineral del Chico se producen 600 bovedillas en promedio al día tres veces por semana. Cuando las bovedillas se terminan de secar se rompen por lo menos 8. De esto podemos decir que en promedio el 1.3 % de las bovedillas producidas son defectuosas. Determinar la probabilidad de que de 10 bovedillas escogidas aleatoriamente (a) 0, (b) 1, (c) 2, (d) 3, (e) menos de 5 sean defectuosas. Resolverlo por la distribución Binomial, la distribución de Poisson y la distribución Normal.

Solución con Distribución Binomial:
La probabilidad de una bovedilla defectuosa es p=0.013, de una bovedilla no defectuosa es q= 1 – p= 0.987. Sea la variable aleatoria x el número de bovedillas defectuosas.
Entonces:

$$P(0) = (10\ 0\ )(0.013)^0(0.987)^{10-0} = \frac{10!}{0!\,(10-0)!}\,(0.013)^0(0.987)^{10} = (0.877347265) = 0.877347265$$

$$P(1) = (10\ 1\ )(0.013)^1(0.987)^{10-1} = \frac{10!}{1!\,(10-1)!}\,(0.013)^1(0.987)^9 = 10(0.013)(0.888903004) = 0.115557391$$

$$P(2) = (10\ 2\ )(0.013)^2(0.987)^{10-2} = \frac{10!}{2!(10-2)!}\,(0.013)^2(0.987)^8 = 45(0.000169)(0.900610946) = 0.006849146$$

$$P(3) = (10\ 3\ )(0.013)^3(0.987)^{10-3} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!}\,(0.013)^3(0.987)^7 = 120(2.197x10^{-6})(0.912473096) = 0.000240564$$

$$P(4) = (10\ 4\ )(0.013)^4(0.987)^{10-4} = \frac{10!}{4!\,(10-4)!}\,(0.013)^4(0.987)^6 = 210(2.8561x10^{-8})(0.924491486) = 0.000005545$$

$$P(x<5) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) + P(x=4) = 0.877347265 + 0.115557391 + 0.006849146 + 0.000240564 + 0.000005545 = 0.999999911$$

Solución con Distribución de Poisson:

Como $\lambda = np = 10(0.013) = 0.13$. Sustituyendo esto en

$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ x=0, 1, 2, . . .

Nos queda $P(x) = \frac{(0.13)^x e^{-0.13}}{x!}$. Entonces:

$$P(0) = \frac{(0.13)^0 e^{-0.13}}{0!} = 0.878095431$$
$$P(1) = \frac{(0.13)^1 e^{-0.13}}{1!} = 0.114152406$$
$$P(2) = \frac{(0.13)^2 e^{-0.13}}{2!} = 0.007419906$$
$$P(3) = \frac{(0.13)^3 e^{-0.13}}{3!} = 0.000321529$$
$$P(4) = \frac{(0.13)^4 e^{-0.13}}{4!} = 0.000010450$$

$$\begin{aligned} P(x<5) &= P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) \\ &\quad + P(x=4) \\ &= 0.878095431 + 0.114152406 \\ &\quad + 0.007419906 + 0.000321529 \\ &\quad + 0.000010450 = 0.999999722 \end{aligned}$$

Solución con Distribución Normal:

Para la distribución normal $\mu = np = 10(0.013) = 0.13$ y $z = \sqrt{npq} = \sqrt{10(0.013)(0.987)} \approx 0.358203853$. Luego entonces:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x - 0.13}{0.358203853}$$

Para P(x=0) usamos $z_1 = \frac{0,5-0,13}{0.358203853} = -1.75878$ y $z_2 = \frac{0,5-0,13}{0.358203853} = 1.03293$.

$$P(x=0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1.75878}^{1.03293} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \approx 0.809874$$

Para P(x=1) usamos $z_1 = \frac{0,5-0,13}{0.358203853} = 1.03293$ y $z_2 = \frac{1,5-0,13}{0.358203853} = 3.82464$.

$$P(x=1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{1.03293}^{3.82464} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \approx 0.150753$$

Para P(x=2) usamos $z_1 = \frac{1,5-0,13}{0.358203853} = 3.82464$ y $z_2 = \frac{2,5-0,13}{0.358203853} = 6.61634$.

$$P(x=2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{3.82464}^{6,61634} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \approx 0.0000654816 \approx 0.000065$$

Para P(x=3) usamos $z_1 = \frac{2,5-0,13}{0.358203853} = 6.61634$ y $z_2 = \frac{3,5-0,13}{0.358203853} = 9.40805$.

$$P(x=3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{6.61634}^{9.40805} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \approx 1.841 \times 10^{-11} \approx 0$$

Para P(x=4) usamos $z_1 = \frac{3,5-0,13}{0.358203853} = 9.40805$ y $z_2 = \frac{4,5-0,13}{0.358203853} = 12.19976$.

$$P(x=4) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{9.40805}^{12.19976} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \approx 2.52713 \times 10^{-21} \approx 0$$

$$\begin{aligned} P(x<5) &= P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) \\ &\quad + P(x=4) \\ &= 0.809874 + 0.150753 + 0.000065 + 0 + 0 \\ &= 0.960692 \end{aligned}$$

En la práctica ya existen tablas numéricas para calcular probabilidades con la distribución normal tipificada y la no tipificada. Para calcular las integrales aquí presentadas puede utilizar cualquier programa que usted utilice.

Comparación rápida (valores redondeados):

P(x)	Binomial	Poisson	Normal
P(x=0)	0.877347265	0.878095431	0.809874
P(x=1)	0.115557391	0.114152406	0.150753
P(x=2)	0.006849146	0.007419906	0.000065
P(x=3)	0.000240564	0.000321529	0
P(x=4)	0.000005545	0.000010450	0
P(x<5)	0.999999911	0.999999722	0.960692

Para probar su aprendizaje se le deja un ejercicio al lector, puede seguir la misma metodología mostrada aquí.
Si el 15% de tabletas fabricadas por una compañía multinacional son defectuosos, determinar la probabilidad de que 3 tabletas escogidas aleatoriamente (a) 1, (b) 0, (c) menos de 2, sean defectuosos.

Conslusión

La distribución Binomial es la exacta y más adecuada. La distribución de Poisson es una excelente aproximación y coincide casi exactamente con los resultados binomiales, ya que p es muy pequeño. La distribución Normal no es recomendable en este caso, porque el valor de *np*=0.13 es demasiado pequeño y la distribución real es muy asimétrica.

Referencias

[1] Spiegel, M. R. (1974). Teoría y problemas de estadística.

[2] Mendenhall III, W., Beaver, R. J., & Beaver, B. M. (2007). Probabilidad y estadística.