https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/prepa3/issue/archive
Con-Ciencia Boletín Científico de la Escuela Preparatoria No. 3
Publicación semestral, Vol. 8, No. 15 (2021) 23-28
CON - CIENCIA
ISSN: 2007-7653

Modelos matemáticos básicos y su conocimiento. Puntos y coordenadas en el plano

Basic mathematical models and their knowledge. Points and coordinates in the plane

Carlos Saavedra-Islas [a]

Abstract:

This work addresses the necessary knowledge that must be had to locate points when representing objects, for this, Cartesian coordinates or also called rectangular coordinates, in their two relative and absolute vers.

Keywords:

Coordinates, location of points, analytical geometry

Resumen:

Este trabajo aborda el conocimiento necesario que se debe tener para localizar puntos al representar objetos, para ello se pueden emplear las coordenadas cartesianas o también llamadas rectangulares, en sus dos versiones relativas y absolutas

***Palabras Clave*:**

Coordenadas, ubicacion de puentos, geometria analitica

Introducción

En este trabajo se menciona los aspectos referentes a la ubicación de puntos en el plano cartesiano, por medio de cada uno de los elementos que involucran los conceptos básicos de la geometría analítica y lo referente a la forma de aprender de los estudiantes y enseñar en la educación a nivel medio superior.

Por lo tanto, una de las principales exigencias para la enseñanza de las matemáticas, en la actualidad, “es que los conocimientos matemáticos sean herramientas para abordar problemas y enfrentar situaciones de la vida” (UNESCO, 2014).

Entonces, en el área de las matemáticas hay muchas maneras de representar la posición de un punto en el plano cartesiano y el espacio, un ejemplo es el sistema que utiliza coordenadas rectangulares o polares, el cual se convierte en un estándar donde se utilizan las referencias en el plano.

Este trabajo aborda el conocimiento necesario que se debe tener para localizar puntos al representar objetos, para ello se pueden emplear las coordenadas cartesianas o también llamadas rectangulares, en sus dos versiones relativas y absolutas. La forma de emplear estas coordenadas, se refiere a designar un punto, con un valor sobre el eje de X y uno en Y separados por una coma (X, Y).

Asimismo, el valor de X es considerado como la distancia positiva o negativa, en unidades de longitud, correspondiente al eje horizontal. Mientras, el valor de Y es una distancia positiva o negativa, en unidades de longitud, tomando en este caso el eje vertical.

Por otra parte, las coordenadas absolutas se relacionan con la distancia al origen conocida como (0,0), que se representa como la intersección de los ejes conocidos Y. Entonces, se pueden utilizar las coordenadas absolutas al momento que se conocen aquellos valores

[a] Autor de Correspondencia, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Email: profe_6963@uaeh.edu.mx

Fecha de publicación: 05/01/2021

pertenecientes a los ejes X e Y que precisan un punto en el plano de proyección.
De esta manera, las coordenadas relativas se sustentan en la posición del último punto graficado, mientras, las coordenadas relativas son utilizadas cuando se conoce la ubicación de un punto en referencia a otro en el plano.

Por último, se menciona que, para ubicar puntos en un sistema de coordenadas, se debe contar con los valores exactos de X e Y, como, por ejemplo, (3,4), se precisa un punto a una distancia positiva de 3 unidades sobre el eje X y a una altura de 4 unidades en el eje Y, tomando como referencia el último punto graficado.

Desarrollo

El plano cartesiano se representa con dos rectas que se cruzan de forma perpendicular, cuyo punto de intersección se le nombra origen del sistema de coordenadas. Por lo que, la línea en el sentido horizontal se denomina eje *X* o eje de las abscisas y en cuanto a la recta vertical recibe el nombre de eje *Y* o también eje de las ordenadas, dibujada en un esquema bidimensional.

Sistema de coordenadas

El sistema de coordenadas cartesianas o también llamadas coordenadas rectangulares (plano cartesiano) son conceptos que hacen referencia a proyecciones ortogonales empleadas en espacios euclídeos, para representar en una grafica una función o ecuación matemática correspondiente a geometría analítica, el desplazamiento o ubicación para el área de física, se caracterizan porque se emplean como base de ejes ortogonales entre sí que se intersecan en un punto en común denominado origen. En este sentido, las coordenadas llamadas cartesianas se pueden definir como aquella distancia al origen de cada una de las proyecciones ortogonales de un objeto, forma, figura o punto dado sobre cada de las líneas de los ejes.

Asimismo, el punto desde la perspectiva de la geometría analítica, la representación de coordenadas es una forma de la cual los ejes permiten precisar los puntos o líneas en el plano o en el espacio tridimensional.
Por otra parte, menciona Rotaeche (2017), “un sistema de coordenadas corresponde a un marco de referencia inercial, en virtud del cual podrán establecerse las principales condiciones de equilibrio estático” (pág. 56).
De lo anterior, los distintos sistemas coordenados requieren de magnitudes o simples números reales, o de magnitudes que puedan establecer una posición al tener dirección y sentido con base a los ejes de referencia o el signo según la problemática encontrada en cuanto a lo matemático se refiere (Rocco, 2009).

Localización de puntos en el plano cartesiano

Cuando se tienen cuestionamientos y hay un análisis de la gráfica o representación cartesiana, los instructores no tienen ningún problema en identificar la intersección de las rectas que forman los cuadrantes; por lo que el tratamiento común de las gráficas tiene que ver con su interpretación con base a la geometría y su expresión gráfica en dos dimensiones. Por el contrario, al preguntarse sobre coordenadas se requiere una descripción que es totalmente indirecta, pues se requiere reconocer las relaciones propias con la geometría analítica.
En este sentido no basta dibujar sobre el papel y localizar coordenadas o simplemente encontrar intersecciones, por el contrario, la gráfica puede no describir nada para los estudiantes y su aprendizaje.

Estos autores Doorman (2009) señalan, “bajo esos marcos escolares de referencia las matemáticas se presentan poco articuladas y alejadas de significados contextualizados, lo que adquiere el alumno, incluyendo al profesor es un uso instrumental de los símbolos matemáticos inmersos, sin entender los conceptos representados” (pág. 23).

Cabe destacar, la gráfica cartesiana tiene una función relevante a través de parámetros, que en este caso son los puntos coordenados que permiten obtener por ejemplo la pendiente de la recta y encontrar una expresión matemática valida.

Entonces, no se trata exclusivamente de los valores numéricos de cada una de las coordenadas, sino de dos puntos coordenados denominados (*X, Y*) para determinar la pendiente de la recta y su punto donde tiene su posición en el plano. Lo describe Buendía en el año 2012 "el gráfico fue usado como apoyo para resolver la actividad de aprendizaje y conocimiento matemático" (pág. 57).

Por lo que, se refiere al trabajo realizado, resuelve los problemas de tipo geométrico donde se ha encontrado por lo menos tres tipos de estrategias de resolución, en las cuales las gráficas se usan de distintas maneras y se amoldan a los lineamientos del aprendizaje significativo. Respecto al uso de estas, podemos precisar que hay una forma puntual de realizar las actividades y argumentar con la gráfica.

Menciona Buendía (2012) que hay que "identificar puntos clave o significativos, ya sea numéricamente para utilizarlos en fórmulas, o de forma gráfica, para hallar las coordenadas de un punto de intersección; pero también hay formas más globales cuando se reconocen intervalos o áreas" (pág. 28).

Por el contrario, ni el uso reiterado de las gráficas en la práctica académica es una solución eficaz, hay acciones que muestran algunos problemas que suelen tener los alumnos en la comprensión y manejo de los ejes horizontales y verticales del sistema cartesiano, esto se ejemplifica con la ubicación de puntos, rectas, formas bidimensionales y figuras básicas geométricas cuando se tiene una posición del punto en el plano de representación.

En relación a lo anterior, Acuña (2001), señala que hay algunos problemas que tienen un gran número de estudiantes de bachillerato para establecer "el orden de las coordenadas de los puntos en el plano cartesiano pues, en lugar de utilizar ese plano para trabajar en un espacio orientado de dos dimensiones, limitan su uso solo a la descripción de parejas de números negativos o positivos" (pág. 22).

En cuanto, el plano cartesiano es válido como un sistema de representación bidimensional, muchos suelen relacionarlo con la posición de puntos en el espacio y también con los mapas de cartográfica, planimétricas y de red de coordenadas geográficas importantes en la localización de sitios o lugares en la superficie terrestre (Aravena, 2018).

Por lo que se refiere, las bases disciplinares y los textos académicos, se puede observar que el plano cartesiano es utilizado como un elemento o recurso didáctico el cual puede aprovechar el docente para "la entrada de ciertos contenidos matemáticos y a los estudiantes aprender nociones, tanto de localización y ubicación de puntos, como de comprensión y lectura de gráficas en un sistema de referencia establecido y de construcción" (Aravena, 2018).

Menciona Aravena (2018) "el plano cartesiano no es construido, sino entregado a los estudiantes, con algunas de sus características para ubicar puntos" (pág. 56).

Las gráficas de ecuaciones son posiblemente una solución real a una ecuación donde existen variables como X e Y, las cuales se pueden identificar como un par de valores para X e Y. Entonces, esta pareja de valores la podemos dibujar como un par ordenado para los puntos a y b.

Geometría analítica

Se puede precisar como un acierto los primeros aportes del matemático francés Rene Descartes en la historia del pensamiento matemático, los cuales se pueden mencionar con el principio de racionalidad que el autor establece. En la historia del Medioevo, hay un fundamento de racionalidad, que suele ser percibido como la principal característica del alma, en el horizonte

de lo intelectual y lo divino, del cual provenía toda ciencia y principio teórico o filosófico para el hombre y los estudiosos lo tomaban como un fundamento para describir el universo.,
Por lo que, Descartes introduce un principio que se basa en coordenadas para describir todo razonamiento como organismo esencialmente humano y centrado en el individuo que conoce y es autónomo, totalmente independiente de todo tipo de contexto racional lejano a la mente y el pensamiento. Con estas bases, John Locke analiza y concluye que el "individuo" y en particular su elaboración del concepto moderno de identidad es totalmente individual.

Asimismo, el teorema de Pitágoras es consecuencia de un importante principio de las matemáticas que precisa que, para un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las medidas de los dos catetos equivale al cuadrado de la distancia del lado más largo que esta opuesto a estos dos.

Concepto de coordenada polar
Para localizar puntos, al dibujar objetos se pueden hacer uso de coordenadas polares (distancia y ángulo) tanto relativas como absolutas. Para utilizar coordenadas polares hay que definir un punto, posteriormente se introduce una distancia y un ángulo. Se debe tomar en cuenta, los ángulos aumentan en sentido contrario a las agujas del reloj y disminuyen en el sentido de las agujas del reloj. Se puede decir, en el sentido de las agujas del reloj tiene un valor negativo para el ángulo.

En este sentido, las coordenadas polares son como una continuación de las coordenadas cartesianas; y que están conformadas por un eje fijo denominado eje polar de referencia, y por supuesto cuenta con un ángulo que se le designa la letra teta (Θ) la cual permite ubicar un punto a una distancia en concreto para el sistema cartesiano (Doorman, 2009).

Entonces, "el ángulo θ se expresa en radianes, por lo que es necesario recordar la conversión de grados sexagesimales a radianes y viceversa. Conversión: 1 rad = π / 180 y 1 = 180 / π" (Covián, 2017).

Es cierto, la ubicación de un punto con sus referencias (x; y) está determinado por una longitud desde ρ del punto al centro u origen del sistema de coordenadas, mientras que el ángulo θ entre el eje X en el sentido positivo y la recta que se traza del origen y atraviesa por el punto "en este momento debemos tomar una decisión: nosotros elegimos el ángulo θ en [0; 2π) y medido en el sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj" (Aravena, 2018).

Asimismo, las unidades que se refieren a la cantidad de ρ y θ, se describen como las coordenadas polares del punto (x; y). En este sentido, "las coordenadas cartesianas (x; y) pueden recuperarse a partir de las polares mediante las relaciones $x = \rho \cos \theta$; $y = \rho \operatorname{sen} \theta$" (Acuña, 2001).

Se puede experimentar con la trigonometría del cuadrado en secuencia con el sistema de coordenadas polares y el estudio de nuevas gráficas para la interpretación de las coordenadas que se producen y algunas coincidencias que están en sintonía con la trigonometría clásica.

Entonces, se tiene que recordar que un conjunto de coordenadas polares usa longitudes y direcciones para establecer la posición de un punto o varios en el plano cartesiano. En este sentido, si se selecciona un punto fijo O denominado polo y se representa desde O una semirrecta nombrada eje polar, se tiene que asignar un punto P con coordenadas polares agregando distancia y un ángulo.

Concepto de coordenadas rectangulares
Las gráficas son una representación de lo matemático que se tienen que conocer para lograr su construcción, usando un modelo, o interpretación, así que el rol del docente de esta materia es enseñar lo anterior. Es cierto, que "es importante una correcta dimensión de cada uno de los elementos del lenguaje que expresa una gráfica, o

discernir lo que se está viendo en la misma, de esta manera acorde con el problema contextualizado que dicha gráfica ilustra, o proponer tareas que promuevan las conversiones directas entre registros de representación" (Buendía, 2012).

Conversión entre sistemas

El concepto de "ángulo es introducido por primera vez en cuarto grado de la educación primaria del sistema educativo mexicano" (Rotaeche, 2017).

Los alumnos se identifican con el uso de las escuadras con los ángulos de 30°-60° y la de 45°; sin embargo, por sus características y forma, algunas veces no distinguen una de otra, o se usan de manera incorrecta. Es cierto, que cuando se requiere del dibujo de una línea a 45° suponen necesariamente el uso de la escuadra respectiva, en la posición en que se coloque.

De esta manera, "uno de los conflictos que más llamó nuestra atención fue el uso que hacen del transportador al medir ángulos en una circunferencia, ya que lo usan como regla para medir la longitud del arco" (Rotaeche, 2017).

De esta manera, se considera que "el resultado más importante relacionado con el aprendizaje de la noción de ángulo es que los estudiantes sólo logran, con este diseño didáctico, construir ciertos significados angulares" (Rotaeche, 2017).

Grados

Los grados son aquellas partes totalmente iguales en las que se divide una circunferencia en porciones equivalentes. De esta manera, la circunferencia se secciona en 400 grados, entonces, se dice que son grados centesimales; de otra manera, si se divide en 360 grados, se refiere a que son grados sexagesimales, en referencia al modelo matemático básico de la geometría analítica.

El grado, esta palabra tiene su origen en el vocablo latín "gratus", que se puede traducir como "grato". De esta manera, el concepto se relaciona con el gusto o la voluntad del individuo o quien labora: "El hombre aceptó retirarse del restaurante, aunque de mal grado".

Una de las maneras más sencilla para medir la cantidad o medida de un ángulo se le denomina sencillamente grados en inglés "*degree*". Por lo que, la medida de un grado sexagesimal, es equivalente a la división semejante al de una circunferencia con la cantidad de 360 partes.

Señala Castillo (2016), es "un valor en grados y representa un ángulo de rotación en este sistema, de esta forma, se trabaja definiendo un rango de ángulo; por ejemplo, el rojo se puede tomar como un rango de entre -30° y 30°" (pág. 79)

El radian

El radián, no se le puede considerar como una de las tantas unidades de medida de ángulos, más bien, es la única en la cual se cumple la relación de tipo trigonométrica y de cálculo, es necesario afirmar que la Geometría Analítica, no hace uso de esta unidad. En este sentido, "la respuesta debe buscarse en algunos conceptos del Cálculo Infinitesimal, donde las nociones analíticas se hacen independientes de las geométricas" (Rocco, 2009).

Por otra parte, se menciona que la "física y las matemáticas muestran que en éstos aparecen expresiones de tipo radián, es una unidad conveniente, o el radián es una manera de medir los ángulos, y otras expresiones similares" (Rocco, 2009).

Por lo cual, el cálculo y la geometría analítica se refieren a este tipo de dimensión e inclusive algunos autores mencionan al radián no solamente como una de las varias posibilidades de medida de ángulos, sino lo denominan, a este como la única referencia para determinar la abertura de un ángulo (Rocco, 2009).

Se puede afirmar que, esta definición está sustentada en que para una circunferencia de radio r = 1, las medidas de magnitud y del área están en relación 2: L = 2, A = (Rocco, 2009).

En conclusión, el radián es una unidad muy importante para medir la abertura del ángulo, mientras que el uso de la palabra o del símbolo rad en las ecuaciones es innecesario, pero innocuo, puesto que no tiene dimensiones (Rocco, 2009).

Conclusión

Este trabajo tiene la finalidad de dar a conocer los conceptos básicos de la geometría analítica y los modelos matemáticos referentes a las coordenadas rectangulares y polares, mediante su representación en el plano cartesiano.

No siempre en el currículo de la educación básica o media se presentan temas de representaciones gráficas en diferentes coordenadas y generalmente se trabaja las coordenadas polares; las gráficas de las ecuaciones polares en donde se involucran las nuevas funciones trigonométricas dan flores más similares a las flores de la naturaleza que las que dan al trabajar con las funciones convencionales. Este tema solo mostró una pequeña parte dejando mucho por estudiar, como por ejemplo rotar las gráficas o hacer ecuaciones polares en las cuales intervengan varias funciones trigonométricas, esto queda al interés del lector.

En este trabajo se muestra que la medida de un ángulo plano debe medirse en radianes, ya que es la única unidad para la cual se cumplen las relaciones del cálculo básico, válidas para las coordenadas cartesianas, aún complejo, dadas por las ecuaciones de los modelos matemáticos básicos y su conocimiento.

De esta forma, se construirá los conocimientos necesarios para que sean útiles para el desarrollo de labor académica para cada uno de los estudiantes.

Finalmente, es pertinente hacer una recomendación: una de las principales actividades que se han venido desechando en el mapa curricular de educación media superior se refiere a la construcción de figuras geométricas básicas y complejas por medio de los instrumentos: como lo es la regla, el compás, las escuadras y el transportador, que permitan al alumno la practica necesaria

Referencias

Acuña, C. (2001). Concepciones en graficación, el orden entre las coordenadas de los puntos del plano cartesiano.. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, 4(3), pp. 203-217, Obtenido de:http://funes.uniandes.edu.co/9623/1/Acu%C3%B1a2001Concepciones.pdf.

Aravena, A. (2018). El Plano Cartesiano en estudiantes de Quinto Básico: su Resignificación en una Situación Específica. Bolema: Boletim de Educação. *Matemática*, 32(62), 825-846. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a04.

Buendía, Á. (2012). El uso de las gráficas cartesianas: Un estudio con profesores. *Educación matemática*, 24(2), 9-36. Obtenido de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-582620120002000.

Castillo, R. (2016). Localización espacial de un punto en XYZ mediante visión artificial. *Ciencia E Ingeniería Neogranadina*, 16(1), 15-27. https://doi.org/10.18359/rcin.1243.

Covián, C. (2017). Matemáticas para la vida. Una propuesta para la profesionalización docente de profesores de matemáticas. *Innovación educativa*, 17(73), 17-47. Obtemido de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-67320170001000 17&lng=es&tlng=es.

Doorman, L. (2009). "Emergent modeling: discrete graphs to support the understanding of change and velocity". En ZDM Mathematics. *Education, núm. 41*, 199-211.

Rocco, H. (2009). Ángulos planos: Por qué el radián debe tener una medida igual a la unidad? *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, 26(1), Obtenido de; 136-144. doi:https://doi.org/10.5007/2175-7941.2009v26n1p136.

Rotaeche, G. (2017). Aprendizaje del concepto escolar de ángulo en estudiantes mexicanos de nivel secundaria. *Educación matemática*, 29(1), 171-200. Obtenido de: https://doi.org/10.24844/em2901.07.

UNESCO. (2014). *Programas y Presupuesto Aprobados*. Obtenido de http://unesdoc.unesco.org/images/0022/002266/226695s.pdf