https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/prepa3/issue/archive
Con-Ciencia Boletín Científico de la Escuela Preparatoria No. 3
Publicación semestral, Vol. 8, No. 16 (2021) 57-59
CON - CIENCIA
ISSN: 2007-7653

Definición de la Temperatura efectiva, obtenida a partir del valor esperado de una función

Definition of the effective temperature, obtained from the expected value of a function

Cecilio Tapia − Ignacio [a]

Abstract:

Temperature is a concept that is formally defined in physics using the mathematical tools of statistical physics. In physics and in other areas, temperature is defined as the kinetic energy of molecules, in this article such a definition is obtained by defining the expected value of a function.

Keywords:

Temperature, expected value of a function, mean kinetic energy

Resumen:

La temperatura es un concepto que se define formalmente en la física mediante las herramientas matemáticas de la física estadística. En física y en otras áreas la temperatura se define como la energía cinética de las moléculas, en este artículo se obtiene tal definición mediante la definición de valor esperado de una función.

***Palabras Clave*:**

Temperatura, valor esperado de una función, energía cinética media

Introducción

La temperatura es un concepto con el que estamos familiarizados desde niños, si tenemos un objeto caliente decimos que su temperatura es alta, mientras que si tenemos un objeto frío decimos que este se encuentra a baja temperatura. Cuando entramos a la secundaria y preparatoria este concepto se define más formalmente desde el punto de vista de la física como la energía cinética media de las moléculas. Sin embargo, esta definición tiene un sustento matemático que le da más validez, este sustento matemático difícilmente se nos presenta a nivel licenciatura e ingeniería debido a nuestros escasos conocimientos de estadística y probabilidad.

Sin embargo, en este trabajo se obtendrá la definición de temperatura utilizando esta herramienta matemática que como se mostrará no es complicada de manejar, lo único que requiere es seguir la definición y utilizar algunas fórmulas integrales bien conocidas en la literatura.

Definición de valor esperado de una función

Una variable aleatoria es un valor numérico que corresponde a un resultado de un experimento aleatorio. Las variables aleatorias se clasifican en discretas y continuas. Las discretas toman un número finito o infinito numerable de valores. Por ejemplo, número de águilas obtenidas al lanzar dos monedas. Mientras que las continuas pueden tomar cualquier valor en los números reales.

Definición

Dada una variable aleatoria X, se puede definir una nueva variable aleatoria Z = g(X), donde g(x) es una función de valor real de la variable real x.

Para calcular E[Z] ó <Z> se puede proceder como [1]:

$$\boldsymbol{E\big(g(X)\big) = \langle g(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx} \qquad (1)$$

[a] Autor de Correspondencia, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, https://orcid.org/ 0000-0002-8660-4993, Email: cecilio_tapia@uaeh.edu.mx

Fecha de publicación: 05/07/2021

Distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann

La distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann, es una función de densidad de probabilidad deducida en 1866 por J. C. Maxwell, el cual resultó de la hipótesis de que el espacio de velocidades para un gas en ausencia de interacciones y de campos externos en un espacio isotrópico, ver Figura 1. Esa función de densidad nos ayuda a calcular la probabilidad de que una partícula tenga cierta rapidez en cierta región del espacio.

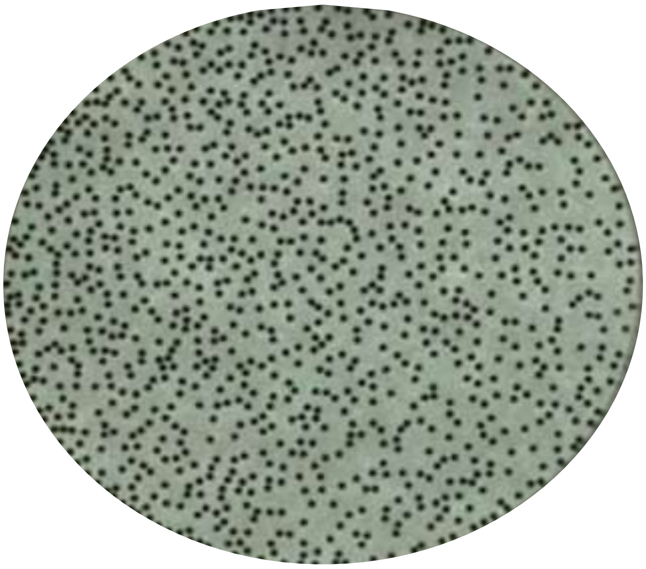

Figura 1. Partículas de un gas en un espacio isotrópico.

Esta función es [2]:

$$\boldsymbol{f(v) = \frac{4a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}\, v^2 e^{-av^2}} \qquad (2)$$

donde $\boldsymbol{a \equiv \frac{m}{2k_BT}}$, donde m es la masa de la partícula, $\boldsymbol{k_B}$ es la constante de Boltzmann, y T es la temperatura en Kelvin.

Fórmulas integrales definidas

Una integral muy utilizada que surge en diversas aplicaciones de física es la siguiente:

$$\boldsymbol{\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}} \qquad (3)$$

Si se deriva dos veces la ecuación (2) de ambos lados de la expresión respecto a $\boldsymbol{a}$ al reacomodar términos se obtiene:

$$\boldsymbol{\int_{-\infty}^\infty x^4\, e^{-ax^2} dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}\, a^{-\frac{5}{2}}} \qquad (4)$$

Como se verá la ecuación (4) nos ayudará a calcular el valor esperado de lo que buscamos.

Definición de la Temperatura

La idea es obtener la definición de la temperatura, para ello vamos a calcular $< \boldsymbol{v^2} >$ con ayuda de la definición (1), de la integral función de densidad (2) y con la integral (4). Esto es;

$$< \boldsymbol{v^2} >= \int_0^\infty \boldsymbol{v^2 f(v) dv} = \int_0^\infty \boldsymbol{v^2 \left[\frac{4a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}\, v^2 e^{-av^2}\right] dv}$$

$$< \boldsymbol{v^2} >= \boldsymbol{\frac{4a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty v^4\, e^{-av^2} dx = \frac{4a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{3\sqrt{\pi}}{8}\, a^{-\frac{5}{2}}\right] = \frac{3}{2} a^{-1}} \qquad (5)$$

Pero como $\boldsymbol{a \equiv \frac{m}{2k_BT}}$, al sustituir este valor en (5) se obtiene:

$$< \boldsymbol{v^2} >= \boldsymbol{3\,\frac{k_BT}{m}} \qquad (6)$$

Multiplicando el lado izquierdo y derecho de la ecuación (6) por ½ m y reacomodando términos se tiene:

$$\boldsymbol{T_E = \frac{1}{2} m} < \boldsymbol{v^2} > \qquad (7)$$

Donde hemos definido a la temperatura efectiva como $\boldsymbol{T_E = \frac{3}{2} K_B T}$.

La ecuación (7) nos dice que el promedio de la velocidad al cuadrado multiplicado por 1/2 m es igual a la temperatura efectiva o igual a 3/2 de $\boldsymbol{K_B T}$. Que si lo comparamos con la definición de la energía cinética de la mecánica clásica es idéntica, pues la energía cinética K de una sola partícula de masa m es $\boldsymbol{K = \frac{1}{2} m v^2}$. Es así que la ecuación (7) nos define a la temperatura como la energía cinética media de las partículas o moléculas. Legado a este punto es importante puntualizar que el término $< \boldsymbol{v^2} >$ es el promedio de $\boldsymbol{v^2}$ de todas las partículas del sistema.

Es así como hemos demostrado que efectivamente existe un sustento matemático de la definición de la temperatura: *"La temperatura puede definirse como la energía cinética media de las moléculas".*

O equivalentemente: "La temperatura es igual al valor esperado de $\boldsymbol{v^2}$ multiplicado por m/2".

Mientras mayor energía cinética exista en las partículas del gas, mayor temperatura existirá en el sistema.

3. Conclusión

Matemáticamente la temperatura se define como el valor esperado de $\boldsymbol{v^2}$ multiplicado por m/2. Donde m es la masa de la partícula.

Referencias

[1] Spiegel M. R. Esperanza Matemática en Probabilidad y Estadística. McGraw-Hill, 1975, pp. 76-77.

[2] García-Colín Scherer L. La distribución de Maxwell-Boltzmann en Introducción a la Física Estadística. El Colegio Nacional, México D.F., 2011, pp. 63-64.