https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/prepa3/issue/archive
Con-Ciencia Boletín Científico de la Escuela Preparatoria No. 3
Publicación semestral, Vol. 9, No. 18 (2022) 89-90
CON - CIENCIA
ISSN: 2007-7653

Solución general de una ecuación cúbica
General solution of a cubic equation

Cecilio Tapia-Ignacio [a]

Abstract:

The derivation of a formula to solve a general cubic equation of the form $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0)$ is shown. This formula can be used to find all the roots of a cubic equation.

Keywords:

Derivation, cubic equation

Resumen:

Se muestra la deducción de una fórmula para resolver una ecuación cúbica general de la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0)$. Dicha fórmula puede ser utilizada para encontrar todas las raíces de una ecuación cúbica.

***Palabras Clave**:*

Deducción, ecuación cúbica

Introducción

La solución general de una ecuación cuadrática es bien conocida desde que estudiamos la secundaria. Existen también fórmulas para ecuaciones polinómicas de grado 3 y grado cuatro.
Toda ecuación cúbica

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (a \neq 0) \tag{1}$$

con coeficientes reales a, b, c y d, tiene una raíz real λ y si se divide $ax^3 + bx^2 + cx + d$ por $x - \lambda$ obtenemos un polinomio de segundo grado cuyas raíces son las raíces restantes de $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Es bien sabido que una ecuación cúbica tiene tres raíces reales o una raíz real y dos raíces complejas. Dada su importancia en este apartado se presenta la deducción de una fórmula que nos da todas las raíces en una ecuación cúbica de manera exacta.

Deducción

Sin perder generalidad, basta considerar ecuaciones de la forma:

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{2}$$

Si queremos eliminar el término en x^2, es suficiente con hacer un cambio de variable. Es decir, sustituyendo $x = y - \frac{b}{3}$ en x^3 y en x^2 se tiene

$$x^3 = y^3 - by^2 + \frac{b^2 y}{3} - \frac{b^3}{27}$$

$$x^2 = y^2 - \frac{2by}{3} + \frac{b^2}{9}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} 0 = x^3 + bx^2 + cx + d0 \\ &= \left(y^3 - by^2 + \frac{b^2 y}{3} - \frac{b^3}{27}\right) \\ &+ \left(by^2 - \frac{2b^2 y}{3} + \frac{b^3}{9}\right) + \left(cy - \frac{bc}{3}\right) + d \\ &= y^3 + \left(\frac{b^2}{3} - \frac{2b^2}{3} + c\right) y \\ &+ \left(\frac{b^3}{9} - \frac{b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d\right). \end{aligned}$$

El segundo término no tiene ahora ningún término con y^2. Así entonces es suficiente considerar ecuaciones de la forma:

$$y^3 + py + q = 0 \tag{3}$$

[a] Autor de Correspondencia, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, https://orcid.org/ 0000-0002-8660-4993, Email: cecilio_tapia@uaeh.edu.mx

Fecha de publicación: 05/07/2022

Donde hemos definido $p = \frac{b^2}{3} - \frac{2b^2}{3} + c$ y $q = \frac{b^3}{9} - \frac{b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d$. El caso trivial p=0 nos lleva a $x^3 = -q$. El caso $p \neq 0$ requiere otro paso artificioso. Haciendo:

$$y = \omega - \frac{p}{3\omega} \qquad o \qquad \left(\omega = \frac{p}{1-3y} \neq 0\right)$$

(4)

En la Ec. (3) se tiene:

$$0 = y^3 + py + q = \left(\omega - \frac{p}{3\omega}\right)^3 + p\left(\omega - \frac{p}{3\omega}\right) + q$$
$$= \omega^3 - \frac{3\omega^2 p}{3\omega} + \frac{3\omega p^2}{9\omega^2} - \frac{p^3}{27\omega^3} + p\omega$$
$$- \frac{p^2}{3\omega} + q0 = \omega^3 - \frac{p^3}{27\omega^3} + q.$$

Multiplicando toda la ecuación por $27\omega^2$ se puede escribir equivalentemente como:

$$27(\omega^3)^2 + 27q(\omega^3) - p^3 = 0$$

(5)

La Ec. (5) es una ecuación cuadrática en ω^3. Por lo tanto:

$$\omega^3 = \frac{-27q \pm \sqrt{(27)^2 q^2 + 4 \cdot 27 p^3}}{2 \cdot 27} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Elevando el lado izquierdo y derecho de la expresión anterior a la 1/3 se tiene:

$$\omega = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

(6)

Pero de la Ec. (4) $y = \omega - \frac{p}{3\omega}$ entonces la Ec. (6) se puede reescribir como:

$$y = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3 \cdot \sqrt[3]{\frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}$$

(7)

Finalmente, como

$$x = y - \frac{b}{3}$$

Entonces sustituyendo la Ec. (7) en la ecuación previa se tiene finalmente:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3 \cdot \sqrt[3]{\frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}} - \frac{b}{3}$$

(8)

Con esta última expresión podemos encontrar de manera exacta las raíces de una ecuación cúbica de la forma:

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Conclusión

La Ec. (8) es la solución general de una ecuación cúbica de la forma $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$

donde $p = \frac{b^2}{3} - \frac{2b^2}{3} + c$ y $q = \frac{b^3}{9} - \frac{b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d$.

Referencias

[1] Spivak, M. (2019). Calculus. Reverté.