https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/prepa4/issue/archive
Vida Científica Boletín Científico de la Escuela Preparatoria No. 4
Publicación semestral, Vol. 12, No. 23 (2024) 43-45
Vida Científica
ISSN: 2007-4905

Comparación del cálculo del área de un trapecio mediante su fórmula directa y mediante una integral definida

Comparison of the calculation of the area of a trapezoid using its direct formula and using a definite integral

Pedro J. Soto-Pedraza

Abstract:

One of the many applications of the definite integral is the calculation of areas under a curve or under a straight line given by a function. If this straight line is also limited by the horizontal axis, in addition to two limits perpendicular to the axis, a rectangular trapezoid is formed, for which its area can be determined by means of both a direct formula and by means of definite integrals.

Keywords:

Area under the curve, rectangular trapezoid, direct formula, definite integrals.

Resumen:

Una de las muchas aplicaciones que tiene la integral definida es el cálculo de áreas bajo una curva o bajo una línea recta dada por una función. Si esta línea recta se limita también por el eje horizontal, además de dos límites perpendiculares al eje, se forma un trapecio rectangular, para el cual, se puede determinar su área por medio tanto de una fórmula directa, como por medio de integrales definidas.

***Palabras Clave*:**

Área bajo la curva, trapecio rectangular, fórmula directa, integral definida.

Introducción

Dentro de las muchas aplicaciones del cálculo integral, a nivel bachillerato, una de las más importantes es el cálculo de áreas, las cuales se pueden formar o limitar por: el eje horizontal, por dos límites (límite inferior y límite superior), y por una línea, cuyo comportamiento está dado por una función, en la cual se puede tener una línea recta o una línea curva.

Evidentemente, dependiendo de la función de la que se trate, se pueden tener diferentes tipos de área a calcular mediante integrales definidas; en donde, el cálculo integral nos permite determinar con exactitud matemática el valor real de un área dada según la misma magnitud de unidades que se tengan en el plano cartesiano para su representación, así sea para áreas bajo una línea recta o para áreas bajo una curva.

Siendo el caso de contar con una línea recta como limitante de dicha figura en el plano, en combinación con los límites inferior y superior y el eje horizontal, se estará formando una figura conocida como trapecio rectangular, (como el que se muestra en la Figura 1), para el cual, se puede no solo calcular su área por medio de la conocida fórmula directa del trapecio, sino que también se puede demostrar con una comparación de métodos, la equivalencia entre la efectividad del cálculo o determinación del área usando el primer método mencionado o usando integrales definidas.

[a] Pedro de Jesús Soto Pedraza, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, https://orcid.org/0000-0003-3442-1850, Email: pedro_soto@uaeh.edu.mx

Fecha de publicación: 05/01/2024

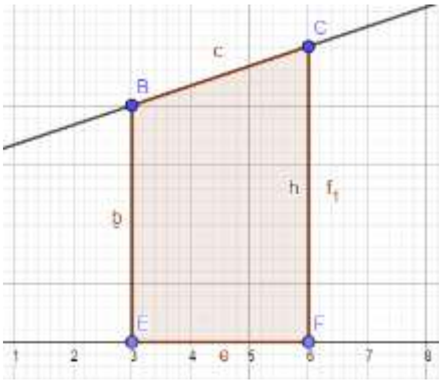

Figura 1. Trapecio rectangular formado por el eje horizontal, los limites y la recta, con vértices B, C, E y F.

Ejemplo de ejercicio

Supóngase una línea recta en el plano cartesiano que limita un área, donde dicha recta pasa por el eje "y" cuando este vale 2 (interpretando este dato como la ordenada al origen), y que pasa también por el punto (3,4), es decir, 2 unidades en "y" por arriba de la ordenada al origen, y 3 unidades en "x" a la derecha de la misma; por lo que se puede afirmar que la pendiente de esta, tiene un valor de $m = \frac{2}{3}$. A la cual se le puede observar a continuación en la Figura 2:

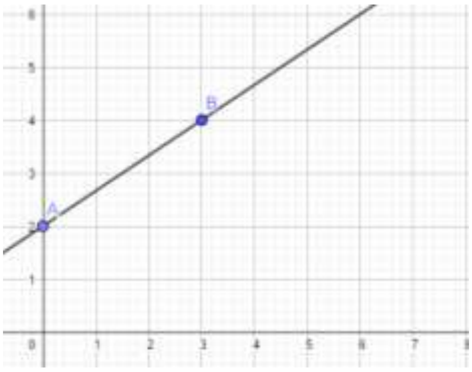

Figura 2. Línea recta que pasa por los puntos (0,2) y (3,4)

Si la estructura de la ecuación estándar de una recta es:

$$y = mx + b$$

Entonces, podemos afirmar que, para la recta anterior, su ecuación es:

$$y = \frac{2}{3}x + 2$$

Si se deseara limitar dicha superficie desde 3 hasta 6, la figura resultante de la cual se determinará el área sería la siguiente:

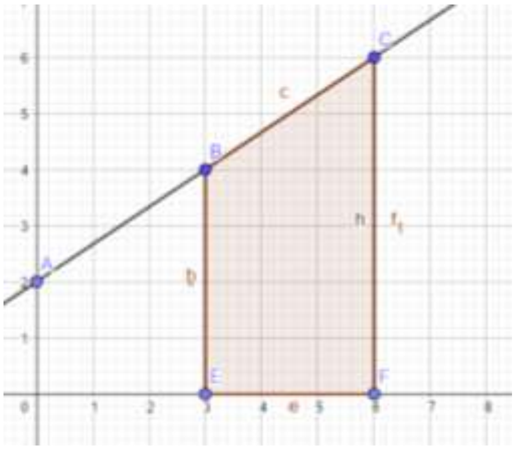

Figura 3. Trapecio rectangular formado por la recta que pasa por los puntos (0,2) y (3,4), y que se limita desde 3 hasta 6

Por lo que, si se deseara calcular el área bajo la recta anterior desde un valor de 3 hasta 6, por definición, el área se da por:

$$A = \int_3^6 \left(\frac{2}{3}x + 2\right) dx$$

En la cual, el proceso de integración es simple, donde tomando en cuenta las propiedades de integrales y derivadas, la expresión anterior puede descomponerse en dos integrales, a tener:

$$\frac{2}{3}\int_3^6 x\,dx + 2\int_3^6 dx$$

Si en la expresión anterior, se identifican las estructuras de $\int v^n dv$, y la de $\int dv$ cuyas soluciones se describen por las fórmulas:

$$\int dv = v + C$$

$$\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C$$

Se tendrá como valor resultante para el área, el siguiente:

$$\left[\frac{2}{3} \cdot \frac{x^2}{2} + 2x\right]_3^6$$

$$\left[\frac{x^2}{3} + 2x\right]_3^6$$

Donde al llevar a cabo la evaluación del resultado con los límites marcados, el resultado se obtendría de la siguiente manera:

$$\left[\frac{(6)^2}{3} + 2(6)\right] - \left[\frac{(3)^2}{3} + 2(3)\right]$$

$$\left[\frac{36}{3} + 12\right] - \left[\frac{9}{3} + 6\right]$$

$$[12 + 12] - [3 + 6]$$

$$[24] - [9] = 15$$

Obteniendo por interpretación que el valor del área de dicha figura equivale a 15 u^2. Las cuales, como resultado, significarían la misma exactitud y precisión que para una figura irregular encerrada por una curva. Y cuya afirmación se sustenta en la comparación del cálculo directo del área mediante la fórmula propia del trapecio:

$$A = \frac{(B + b)h}{2}$$

Donde:
B: base mayor
b: base menor
h: altura

Cuyos valores se pueden notar en la siguiente figura:

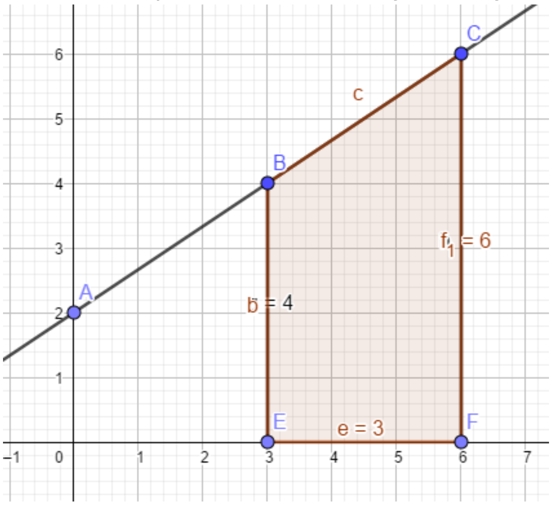

Figura 4. Trapecio formado con los valores de sus dimensiones indicadas: B=6, b=4, h=3.

Y donde al sustituir, se puede obtener el siguiente resultado:

$$A = \frac{(6 + 4)(3)}{2} = \frac{(10)(3)}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

Que además de interpretarse como las 15 u^2 que tiene por área, se puede con lo anterior, comprobar y afirmar que el cálculo de áreas utilizando integrales es tan confiable como el de una fórmula directa, en donde se debe de tener en cuenta la especificación de las otras tres paredes que encerrarían al área, además del eje horizontal: las posiciones de los límites y la función (lineal o curva).

Conclusión

No cabe duda que es evidente la diferencia en extensión y tiempo que lleva calcular un área mediante integrales a lo que se puede resumir con una fórmula directa, sin embargo, estas últimas solamente pueden ser utilizadas para figuras específicas con características limitadas, en cambio, la integral permite determinar el área de cualquier superficie que se forme, ya sea que se trate de una figura regular o irregular, de forma totalmente exacta, y de la cual, en caso de tener figuras irregulares, no habría fórmulas directas para su determinación. Para llegar a cualquiera de estos cálculos es preciso conocer los límites y la función.

Referencias

[1] Granville, W. A. (2014). Cálculo Diferencial e Integral. México, D. F.: Limusa.

[2] Swokowski, E. W., & Cole, J. A. (2011). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. México, D. F.: Cengage Learning.