https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/prepa4/issue/archive

Vida Científica Boletín Científico de la Escuela Preparatoria No. 4

Vida Científica

Publicación semestral, Vol. 12, No. 24 (2024) 16-19

ISSN: 2007-4905

Combinación de la física y la matemática para el modelado de un movimiento parabólico

Combination of physics and mathematics to model a parabolic motion

Pedro J. Soto-Pedraza [a]

Abstract:

A parabolic motion is one where the path of the moving objects is a parabola. Also, in physics it is defined as the combination of uniform horizontal motion and uniformly accelerated vertical motion. It is precisely physics that allows us to know all the measurable parameters of a movement of this nature, however, all parabolic movement also obeys the geometric behavior described by the equation of a parabola. Using knowledge of kinematics, calculus and analytical geometry, a parabolic motion can be modeled and an equation that models it can be obtained.

Keywords:

Parabola, geometric behavior, kinematics, calculus, analytical geometry, equation

Resumen:

Un movimiento parabólico es aquel donde la trayectoria de los objetos que se mueven es una parábola. También, en la física se define como la combinación de un movimiento horizontal uniforme y un movimiento vertical uniformemente acelerado. Precisamente es la física la que nos permite conocer todos los parámetros medibles de un movimiento de esta naturaleza, sin embargo, todo movimiento parabólico, obedece también al comportamiento geométrico descrito por la ecuación de una parábola. Empleando conocimientos de cinemática, cálculo y geometría analítica, se puede modelar un movimiento parabólico y obtener una ecuación que lo describa.

***Palabras Clave*:**

Parábola, comportamiento geométrico, cinemática, cálculo, geometría analítica, ecuación.

Introducción

La geometría analítica es aquella rama de la geometría que tiene como esencia relacionar un conjunto de puntos a manera de línea de trayectoria, con una ecuación. Cuando se logra obtener la ecuación de un lugar geométrico, se puede describir el comportamiento gráfico y medible de una trayectoria determinada.

Dentro de los lugares geométricos de secciones cónicas que se estudian y se aplican ampliamente, se puede mencionar a la parábola, la cual es un comportamiento geométrico que se puede modelar mediante una ecuación en diferentes situaciones de la vida cotidiana, (por ejemplo, al arrojar un objeto al aire) y, por tanto, se pueden conocer múltiples mediciones de posición y distancia para cualquier partícula que se mueva en esa trayectoria.

El movimiento parabólico oblicuo, que se obtiene al combinar un movimiento horizontal uniforme con un tiro vertical, modela una parábola vertical negativa, ya que esta ramificaría hacia abajo, y la cual, tiene la siguiente estructura de ecuación estándar, si se le supone como parábola con vértice en el origen:

$$x^2 = -4py$$

Perspectiva de la Geometría Analítica

Para poder determinar la ecuación estándar específica de la parábola, es necesario conocer el valor del parámetro “p”, el cual es la distancia entre el vértice y el foco de la parábola; pero también, si es que, de inicio no se conocen, se puede determinar mediante un despeje en la estructura de la ecuación, para lo que es necesario conocer la coordenada (x,y) de cualquier punto que se encuentre en la parábola. Dicho punto puede estar dado por la abertura

[a] Pedro de Jesús Soto Pedraza, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Escuela Preparatoria No. 4. Pachuca-Hidalgo, México

https://orcid.org/0000-0003-3442-1850, Email: pedro_soto@uaeh.edu.mx

Fecha de publicación: 05/07/2024

horizontal de la parábola y por la altura máxima que alcanza, como se muestra en la Figura 1.

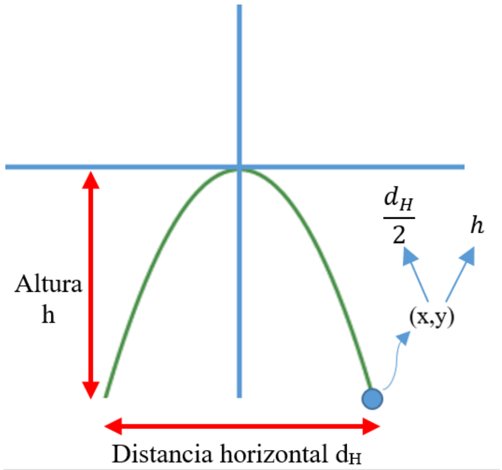

Figura 1. Definición de una coordenada (x,y) relacionada con la distancia horizontal y la altura

Perspectiva de la Física

Los anteriores valores (x,y) pueden determinarse fácilmente con apoyo de las fórmulas de física para movimiento parabólico oblicuo. Donde para lo cual, como en todo ejercicio experimental es necesario contar con un cierto mínimo de datos que, experimentalmente posibilitarían realizar las mediciones de parámetros y, por lo tanto, analíticamente también.

Dichos datos pueden ser, para un lanzamiento parabólico, la velocidad inicial del proyectil u objeto en movimiento y el ángulo de inclinación con el que es arrojado.

Tomando en cuenta esos datos se pueden determinar:

a) La altura máxima
b) El tiempo en el aire
c) El desplazamiento horizontal

Si para una aplicación de la vida cotidiana se asumiera un objeto o proyectil arrojado con una velocidad inicial de 70 m/s, y un ángulo de inclinación de 60°, se pueden calcular los elementos anteriormente mencionados, siendo estos, determinados mediante lo siguiente:

- Altura máxima (h_{max})

$$h_{max} = -\frac{{v_{iV}}^2}{2g}$$

$$v_{iV} = v \operatorname{sen} \theta$$

$$v_{iV} = 70\frac{m}{s} \cdot \operatorname{sen} 60° = 60.62\frac{m}{s}$$

$$h_{max} = -\frac{\left(60.62\frac{m}{s}\right)^2}{2\left(-9.81\frac{m}{s^2}\right)} = 187.31\ m$$

- Tiempo en el aire (t_{aire})

$$t_{aire} = -\frac{2v_{iV}}{g} = -\frac{2\left(60.62\frac{m}{s}\right)}{-9.81\frac{m}{s^2}} = 12.36\ s$$

- Desplazamiento horizontal (d_H)

$$v_{iH} = v \cos \theta$$

$$v_{iH} = 70\frac{m}{s} \cdot \cos 60° = 35\frac{m}{s}$$

$$d_H = v_{iH} \cdot t_{aire} = \left(35\frac{m}{s}\right)(12.36\ s) = 432.6\ m$$

Interpretación

Es así que, en el modelo de la trayectoria parabólica, con los datos obtenidos, se puede interpretar de la siguiente manera en la Figura 2:

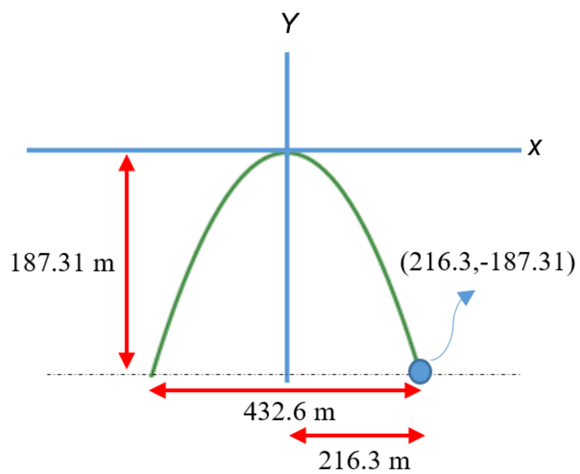

Figura 2. Comparación de los valores obtenidos por cinemática con su adaptación en el plano cartesiano

De los valores anteriores, si en el plano cartesiano se asume que cada unidad del mismo representa 1 m en el experimento real, y que el punto más alto de la trayectoria (vértice de la parábola) está en el origen, aunado a que la coordenada (x,y) de uno de los puntos que conforma dicha parábola es (216.3,-187.31), se puede establecer que:

✓ La estructura de la ecuación estándar de dicha parábola es:

$$x^2 = -4py$$

- ✓ Se puede determinar el valor de "p" si se sustituye la coordenada (x,y) en la ecuación estándar, obteniendo lo siguiente:

$$(216.3)^2 = -4p(-187.31)$$

Es decir:

$$p = \frac{(216.3)^2}{-4(-187.31)} = 62.44$$

Cantidad que representa la distancia entre el vértice y el foco de la parábola que modela el ejercicio planteado, y con la cual, se puede determinar la ecuación estándar de la misma:

$$x^2 = -4(62.44)y$$

$$x^2 = -249.77y$$

No olvidando que, al obtener la ecuación de cualquier lugar geométrico, no solo se puede relacionar con una gráfica, sino que también se puede determinar cualquier parámetro medible de la representación en el plano, y para la cual, si se desea expresar a los valores de "y" en función de "x", solo se despeja al valor de "y" obteniendo:

$$y = -\frac{x^2}{249.77}$$

Para finalizar, podemos deslizar la parábola verticalmente hasta que el eje horizontal coincida con el nivel del suelo en el ejercicio, lo cual se logra sumándole a la función anterior, el valor de la altura máxima obtenida al inicio ($h_{max} = 187.31\, m$), lo cual desfasará a la gráfica dicha cantidad de unidades de manera vertical hacia arriba, y que de esta manera expresará a la altura del proyectil en función de la distancia horizontal recorrida, y la cual, de manera escrita se puede expresar así:

$$y = -\frac{x^2}{249.77} + 187.31$$

Y que, en un plano cartesiano se puede apreciar en la Figura 3:

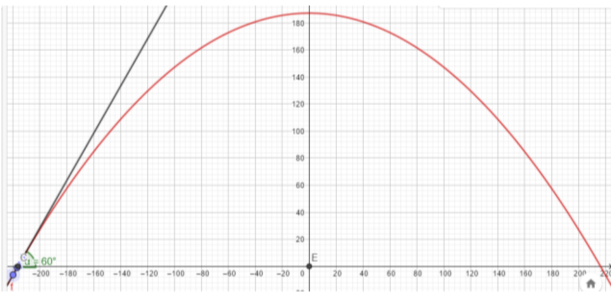

Figura 3. Trayectoria parabólica del ejercicio, modelada y graficada mediante su función algebraica

Es así que, el ejercicio planteado como un proyectil lanzado a una velocidad de 70 m/s a una inclinación de 60°, se puede modelar con la función anterior, y para la cual se puede determinar, por ejemplo, el valor de cualquiera de las alturas, a diferentes posiciones horizontales, entre ellas, la altura máxima, sustituyendo en el valor de "x" su posición horizontal en el plano cartesiano, y por ejemplo: Si se desea determinar la altura que lleva el proyectil, cuando se ha alejado horizontalmente 50 unidades (valor de "x") del punto de lanzamiento, empleando la función anterior, se determina que:

$$y(altura) = -\frac{(50)^2}{249.77} + 187.31 = 197.32$$

Es decir, mediante la función obtenida, se determina que, en su lanzamiento, al alejarse 50 m de manera horizontal, el proyectil ha alcanzado a su vez una altura de 197.32 m, toda vez que fue lanzado con una velocidad de 70 m/s a una inclinación de 60°.

Perspectiva del cálculo

De igual manera, y bajo la perspectiva del cálculo diferencial, partiendo de la función de la parábola:

$$y = -\frac{x^2}{249.77} + 187.31$$

se puede calcular y comparar la distancia de alejamiento obtenida anteriormente como 216.3 m tomando en cuenta lo siguiente:

- ➢ Se sabe que, el ángulo de inclinación de lanzamiento del proyectil es de 60°, los cuales se le atribuyen a una recta imaginaria (con respecto al eje horizontal) que es tangente a la parábola, es decir que la toca en un solo punto; donde dicho punto es aquel en el que es arrojado el proyectil.
- ➢ La pendiente de la recta tangente a la curva es por definición la derivada de la función.
- ➢ También por definición, la pendiente es igual a la tangente del ángulo de inclinación $m = \tan \propto$

Es decir:

$$\frac{d}{dx} f\,(x) = m = \tan \propto$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx} f\,(x) = \tan \propto$$

Si la derivada de la función parabólica es igual a la tangente del ángulo de inclinación, entonces:

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{x^2}{249.77} + 187.31\right) = \tan 60°$$

$$-\frac{x}{124.885} = \tan 60°$$

Por lo tanto, si se despeja el valor de x, se puede obtener la ubicación horizontal en donde la inclinación de la parábola es de exactamente 60°, es decir, la ubicación horizontal de donde el proyectil es lanzado:

$$x = -124.885 \tan 60° = -216.31$$

Cuyo valor negativo obtenido es solo debido a que el punto de lanzamiento en el modelo se encuentra a la izquierda del plano cartesiano, es decir, en el eje horizontal negativo, apreciado en la Figura 4:

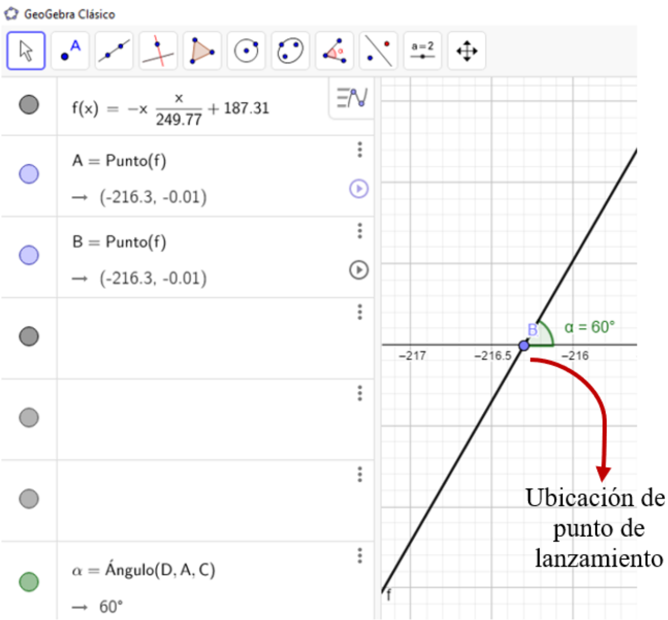

Figura 4: Uso del software de GeoGebra para determinar gráficamente la ubicación precisa del punto de lanzamiento del proyectil a partir de su ecuación a partir de una recta tangente

Conclusión

Una trayectoria parabólica, la cual se encuentra en diversas situaciones de la vida cotidiana, puede estudiarse, modelarse e interpretarse desde varias ramas de las ciencias exactas, como la matemática (geometría analítica y cálculo diferencial) y la física (cinemática) e incluso, debido a que, como es natural, todos los conceptos individuales de cada disciplina cuadran perfectamente de manera numérica, pueden ser también complementarios unos con otros para ampliar la cantidad de elementos o mediciones obtenibles en cualquier interpretación o modelado de funciones

Referencias

[1] Granville, W. A. (2014). Cálculo Diferencial e Integral. México, D. F.: Limusa.

[2] Pérez, M. H., (2016). Física General, México D. F.: Patria

[3] Swokowski, E. W., & Cole, J. A. (2011). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. México, D. F.: Cengage Learning.