https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/prepa4/issue/archive
Vida Científica Boletín Científico de la Escuela Preparatoria No. 4
Publicación semestral, Vol. 13, No. 25 (2025) 45-46
Vida Científica
ISSN: 2007-4905

Solución de una integral de diferencial trigonométrica

Solution of a trigonometric differential integral

Juan C. Soto-Romero [a]

Abstract:

The present work shows the steps to follow in the solution of the integral of a trigonometric differential with the exponent different from one, and in this case, an even number exponent. In these steps, different algebraic techniques for reduction and conditioning of the differential can be observed, as well as the application on several occasions of trigonometric identities, which have the objective of simplifying the expression, in order to carry out the integration process through a direct formula.

Keywords:

Integral, Trigonometric differential integral, Integral calculus, differentials, math.

Resumen:

El presente trabajo, muestra los pasos a seguir en la solución de la integral de una diferencial trigonométrica con el exponente diferente de uno, y en este caso, exponente de número par. En estos pasos, se pueden observar diferentes técnicas algebraicas para reducción y acondicionamiento de la diferencial, así como la aplicación en varias ocasiones de identidades trigonométricas, las cuales tienen el objetivo de simplificar la expresión, para poder realizar el proceso de integración por medio de una fórmula directa.

***Palabras Clave*:**

Integral, Integral de diferenciales trigonométricas, Cálculo Integral, Diferenciales, Matemáticas.

Introducción

El siguiente documento presenta una estrategia para dar solución a la integral de una diferencia trigonométrica con potencia par.

Para ello se demostrará que:

$$\int \left(\frac{sec\ ax}{tan\ ax}\right)^4 dx = -\frac{1}{a}\left(ctg\ ax + \frac{1}{3}ctg^3 ax\right) + c$$

Aplicando la siguiente metodología:

1. Se separan las potencias:

$$\int \frac{sec^4\ ax}{tan^4\ ax} dx$$

2. Se aplica la identidad pitagórica $sec^2 A - tan^2 A = 1$

en numerador y se eleva al cuadrado para no alterar la potencia, despejando a la secante y elevando al cuadrado como sigue:

$$sec^2 A = tan^2\ ax + 1$$

$$(sec^2 A = tan^2\ ax + 1)^2$$

$$sec^4 A = (tan^2\ ax + 1)^2$$

3. Al sustituir la identidad en la integral:

$$\int \frac{(tan^2\ ax + 1)^2}{tan^4\ ax} dx$$

[a] Juan Carlos Soto Romero, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo | Escuela Preparatoria Número 4 | Pachuca, Hidalgo | México, https://orcid.org/0000-0003-3065-1675, Email: jcsoto@uaeh.edu.mx

Fecha de recepción: 21/03/2025, Fecha de aceptación: 10/04/2025, Fecha de publicación: 05/01/2025
DOI: https://doi.org/10.29057/prepa4.v13i25.14744

4. Se resuelve el binomio al cuadrado del numerador:

$$\int \frac{(tan^4\, ax + 2\, tan^2\, ax + 1)}{tan^4\, ax}\, dx$$

5. Se separan integrales:

$$\int \frac{tan^4\, ax}{tan^4\, ax} dx + 2\int \frac{tan^2\, ax}{tan^4\, ax} dx + \int \frac{1}{tan^4\, ax} dx$$

6. Se simplifican fracciones en la primera y en la segunda integral:

$$\int dx + 2\int \frac{1}{tan^2\, ax} dx + \int \frac{1}{tan^4\, ax} dx$$

7. Se aplica la identidad $ctg\ A = \frac{1}{tan\ A}$ en segunda y tercera integral respetando potencias:

$$\int dx + 2\int ctg^2 ax\, dx + \int ctg^4 ax\, dx$$

8. Se resuelve la primera integral y dado que no hay forma directa de integrar la segunda y la tercera integral de forma directa se aplica la identidad Pitagórica $csc^2\ A - ctg^2\ A = 1$, despejando a cotangente:

$$csc^2\ A - 1 = ctg^2\ A$$

9. Aplicando y separando potencias en tercera integral:

$$x + 2\int (csc^2\, ax - 1)\, dx + \int ctg^2 ax\, ctg^2 ax\, dx$$

$$x + 2\int (csc^2\, ax - 1)\, dx + \int (csc^2\, ax - 1)\, ctg^2 ax\, dx$$

10. Se separa la primera integral. Se completa la primera, se resuelve la segunda y se aplica identidad en la cuarta integral.

$$x + 2\left[\int csc^2\, ax\, dx - \int dx\right] + \int csc^2\, ax\, ctg^2 ax\, dx - \int ctg^2 ax\, dx$$

$$x + 2\left[\frac{1}{a}\int csc^2\, ax\, dx(a) - x\right] + \int csc^2\, ax\, ctg^2 ax\, dx - \int (csc^2\, ax - 1) dx$$

11. Se resuelve la primera integral y se separa la tercera, considerando que para la primera integral se tiene que $v = ctg\ ax\ y\, dv = -\,a\ csc^2\ ax\ dx$

$$x + \left(\frac{2}{a}\right)(-ctg\ ax) - 2x + \left(-\frac{1}{a}\right)\int (-a)\, csc^2\, ax\, ctg^2 ax\, dx - \frac{1}{a}\int (a)\, csc^2\, ax + \int dx$$

12. Por último, se obtiene:

$$x - \frac{2ctg\ ax}{a} - 2x - \frac{ctg^3 ax}{3a} + \frac{ctg\ ax}{a} + x + c$$

13. Simplificando y factorizando:

$$-\frac{ctg\ ax}{a} - \frac{ctg^3 ax}{3a} + c$$

$$-\frac{1}{a}\left(ctg\ ax + \frac{1}{3} ctg^3 ax\right) + c$$

Referencias

[1] Aguilar Márquez, A., Bravo Vázquez, F., Gallegos Ruiz, H., Cerón Villegas, M., & Reyes Figueroa, R. (2009). Matemáticas simplificadas (Cuarta ed.). México: Pearson

[2] Stewart, J. (2013). Cálculo, trascendentes tempranas. México: CENGAGE Learning