https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/prepa4/issue/archive
Vida Científica Boletín Científico de la Escuela Preparatoria No. 4
Vida Científica
Publicación semestral No. 15 (2020) 32-36

Obtención del punto de equidistancia a partir de tres condiciones por los métodos Analítico (Geometría Analítica) y Rectas notables en triángulos (Trigonometría)

Obtaining the equidistance point from three initial points

Pedro J. Soto-Pedraza [a]

Abstract:

An equidistant point to a certain set of points is one that is the same distance from all points. The objective of this work is to exemplify two different ways of arriving at a solution of problems where it starts from three different points born from a point of origin that is at the same distance from all, the latter being the one to be found.

Keywords:

equidistance, point of origin

Resumen:

Un punto equidistante a un cierto conjunto de puntos es aquel que se encuentra a la misma distancia de todos los puntos. El objetivo de este trabajo es ejemplificar dos formas diferentes de llegar a una solución de problemas donde se parte de tres puntos diferentes nacidos de un punto origen que se encuentra a la misma distancia de todos, siendo éste último el que se desea hallar.

***Palabras Clave**:*

Equidistancia, punto de origen

Introducción

La Trigonometría y la Geometría Analítica son dos áreas enfocadas en situaciones la gran mayoría de las veces muy específicas y en veces diferenciadas una de la otra. Sin embargo, siendo estas dos áreas de las matemáticas, existen infinidad de casos en los que coincidentemente se puede hallar una respuesta utilizando un método perteneciente a cualquiera de las dos ramas.

Un punto equidistante a un cierto conjunto de puntos es aquel que se encuentra a la misma distancia de todos los puntos. Este concepto se relaciona directamente con la definición de circunferencia, la cual dicta que: "es el conjunto de puntos equidistantes de un punto fijo llamado centro".

Pero, ¿qué tipos de problemas son aplicables a esta definición?

Analiza el siguiente ejemplo de problema:

Ejemplo 1:*"Un cañón rotatorio dispara tres balas hacia diferentes puntos en el plano. Si se conocen los puntos exactos en los que cayeron las balas del cañón. Determina el punto de origen donde está posicionado el cañón."*

Es importante tomar en cuenta que los problemas que pueden resolverse mediante la obtención del punto deseado, no son exclusivos de un solo tipo de ejemplos, es decir, tiene bastantes aplicaciones a diferentes situaciones de la vida cotidiana, incluso en situaciones como la siguiente:

Ejemplo 2:*"Se hace detonar un explosivo en un punto específico de la ciudad, tres segundos después el sonido de la explosión se alcanza a escuchar en tres puntos alejados entre sí en la ciudad. ¿Puedes determinar en qué punto específico se realizó la detonación?"*

En ambos ejemplos encontramos dos situaciones prácticas en donde son aplicables los métodos anteriormente señalados para llegar a una resolución favorable.

Al analizar estos ejercicios podemos interpretar la presencia de tres puntos diferentes, todos a la misma distancia de un punto central, para el cual, su ubicación es el objetivo principal del ejercicio, como se muestra en la Figura 1:

[a] Pedro de Jesús Soto Pedraza, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Escuela Preparatoria Número Cuatro, Email: pedro_soto@uaeh.edu.mx

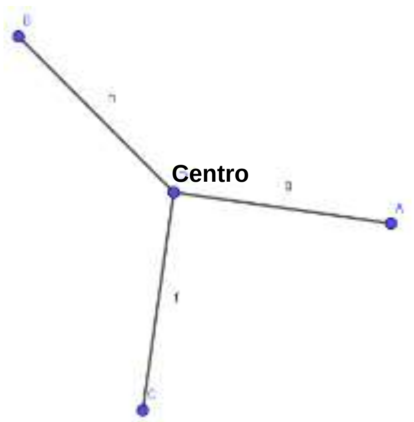


Figura 1*: Tres puntos alejados a la misma distancia de un punto central*

El objetivo de este trabajo es ejemplificar dos formas diferentes de llegar a una solución para el tipo de ejercicios anteriormente planteados; las cuales son las siguientes:

Por Geometría Analítica

Se resolverá el problema suponiendo a este como un ejercicio de obtención de una circunferencia a partir de tres condiciones dadas. Mediante los siguientes pasos:

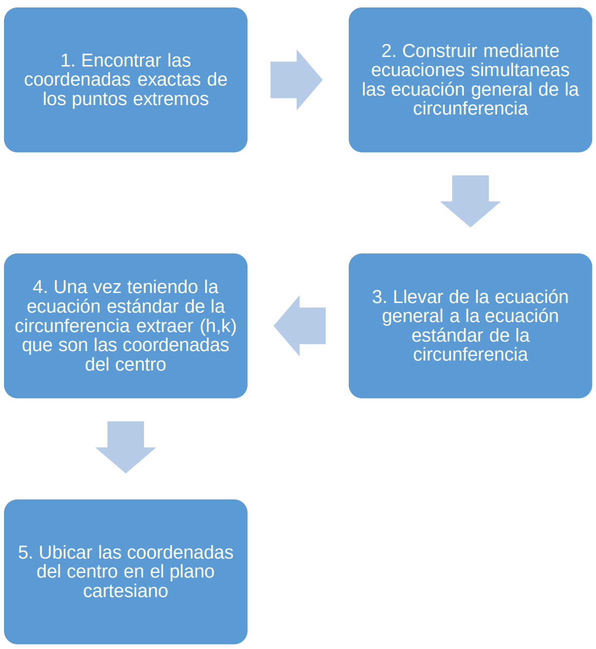


Figura 2 Obtención de una circunferencia

Explícitamente, se realizará lo siguiente:

Encontrar las coordenadas exactas de los puntos extremos: el ejercicio de ejemplo refiere a una situación en la que se conocen con exactitud los puntos en los que cayeron las balas, supondremos las siguientes coordenadas:

A (7,4); B (1,7); C (3,1).

Construir mediante ecuaciones simultáneas la ecuación general de la circunferencia: Para ello…

Sustituiremos cada coordenada (x, y) en la estructura de la ecuación general de una circunferencia $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

- ⇨ Para A (7,4):

$$(7)^2 + (4)^2 + D(7) + E(4) + F = 0$$
$$49 + 16 + 7D + 4E + F = 0$$
$$*\ 7D + 4E + F = -65\ * \qquad \boxed{\mathrm{I}}$$

- ⇨ Para B (1,7)

$$(1)^2 + (7)^2 + D(1) + E(7) + F = 0$$
$$1 + 49 + D + 7E + F = 0$$
$$*\ D + 7E + F = -50\ * \qquad \boxed{\mathrm{II}}$$

- ⇨ Para C (3,1)

$$(3)^2 + (1)^2 + D(3) + E(1) + F = 0$$
$$9 + 1 + 3D + E + F = 0$$
$$*\ 3D + E + F = -10\ * \qquad \boxed{\mathrm{III}}$$

a) A partir de lo anterior podemos obtener las 3 ecuaciones simultáneas donde actúan los valores D, E y F:

$$\begin{cases} 7D + 4E + F = -65 \\ D + 7E + F = -50 \\ 3D + E + F = -10 \end{cases}$$

b) La cual podemos resolver por el método de reducción tomando dos pares de ecuaciones:

$$\mathrm{A} \begin{cases} 7D + 4E + F = -65 \\ D + 7E + F = -50 \end{cases} \qquad \mathrm{B} \begin{cases} D + 7E + F = -50 \\ 3D + E + F = -10 \end{cases}$$

c) Utilizando a la F como pivote para hacer la reducción, la primera ecuación reducida se obtiene así:

$$\begin{array}{r} 7D + 4E + \cancel{F} = -65 \\ -D - 7E - \cancel{F} = 50 \\ \hline **\ 6D - 3E \qquad = -15\ ** \end{array} \qquad 1$$

$$\begin{array}{r} -D - 7E - \cancel{F} = 50 \\ 3D + E + \cancel{F} = -10 \\ \hline **\ 2D - 6E \qquad = 40\ ** \end{array} \qquad 2$$

Obteniendo así la reducción a una ecuación de 2×2:

$$\begin{cases} 6D - 3E = -15 \\ 2D - 6E = 40 \end{cases}$$

d) A la cual volvemos a aplicar el método de reducción para llegar al valor de cada letra: Sabemos que $6D - 3E = -15$ es equivalente a la ecuación $-12D + 6E = 30$ ya que se le multiplica a toda la ecuación por -2. Entonces:

$$\begin{array}{r} -12D + 6E = 30 \\ \underline{2D - 6E = 40} \\ -10D \qquad = 70 \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\therefore D = \frac{70}{-10}$$
$$D = -7$$

e) Y sustituyendo en la ecuación reducida 2

$$2(-7) - 6E = 40$$
$$-14 - 6E = 40$$
$$-6E = 40 + 14$$
$$-6E = 54$$
$$\therefore E = \frac{54}{-6}$$
$$E = -9$$

f) Nuevamente sustituimos, ahora en la ecuación II

$$(-7) + 7(-9) + F = -50$$
$$-7 - 63 + F = -50$$
$$-70 + F = -50$$
$$\therefore F = -50 + 70$$
$$F = 20$$

Así, conociendo los valores de D, E y F podemos construir la ecuación general de una circunferencia que pasa por esos tres puntos y cuyo punto central es el origen, es decir, para el Ejemplo 1, las coordenadas del centro de la circunferencia serían las coordenadas exactas donde se encuentra el cañón.

$$x^2 + y^2 - 7x - 9y + 20 = 0$$

1. Posteriormente la convertimos a ecuación estándar y encontramos los datos de su centro y radio:

$$x^2 + y^2 - 7x - 9y + 20 = 0$$

$$x^2 - 7x \qquad + y^2 - 9y \qquad = -20$$

$$x^2 - 7x + \frac{7^2}{2^2} + y^2 - 9y + \frac{9^2}{2^2} = -20 + \frac{7^2}{2^2} + \frac{9^2}{2^2}$$

$$\left(x^2 - 7x + \frac{49}{4}\right) + \left(y^2 - 9y + \frac{81}{4}\right) = -20 + \frac{49}{4} + \frac{81}{4}$$

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 = -\frac{80}{4} + \frac{49}{4} + \frac{81}{4}$$

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{50}{4}$$

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

2. Donde:

$$-h = -\frac{7}{2}$$

$$\therefore h = \frac{7}{2}$$

$$-k = -\frac{9}{2}$$

$$\therefore k = \frac{9}{2}$$

$$r^2 = \frac{25}{2}$$

$$\therefore r = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

3. Recordando que el centro de la circunferencia a partir de la ecuación estándar es (h, k), concluimos que las coordenadas del centro se encuentran en $\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$, es decir, si volvemos a la interpretación con el Ejemplo 1, concluimos que el cañón que disparó las balas en las coordenadas A $(7,4)$, B $(1,7)$ y C $(3,1)$ se encuentra en las coordenadas $\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$ o $(3.5,4.5)$ como se puede observar en la Figura A1:

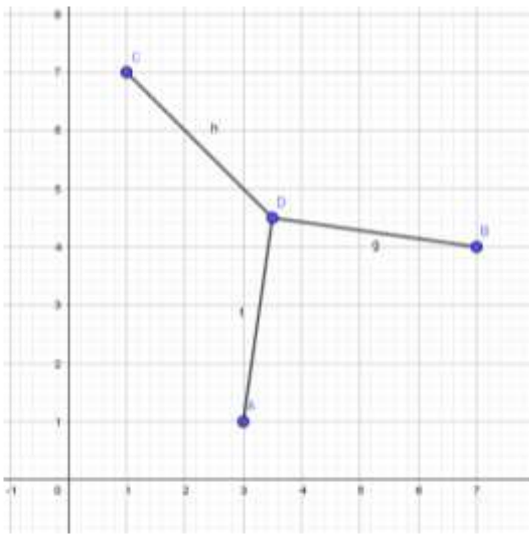


***Figura A1**: El punto que se encuentra a la misma distancia de los tres puntos anteriores está en* $(3.5,4.5)$

Por Trigonometría
Se resolverá el mismo ejercicio empleando la teoría de rectas y puntos notables en triángulos, donde para efectos prácticos retomaremos el mismo ejemplo del método anterior, rescatando las coordenadas de sus extremos interpretándolas como los vértices de un triángulo, lo cual nos permite tener bien definidas sus dimensiones. Mediante los siguientes pasos:

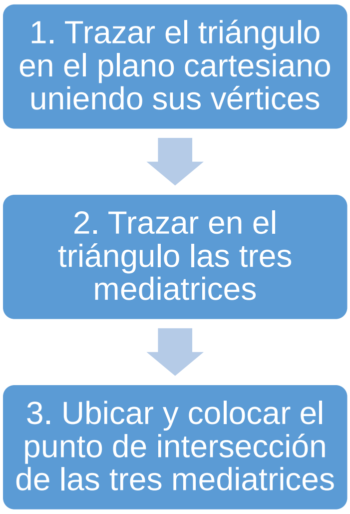


Figura 3

Explicando lo anterior:

1. Se parte del trazo del triángulo utilizando sus coordenadas, como se muestra en la Figura B1:

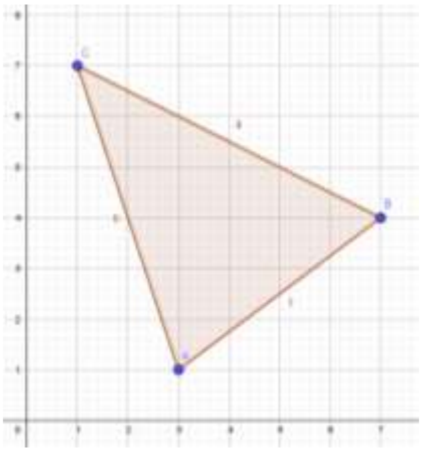


***Figura B3**: Localización del punto de convergencia de las tres mediatrices.*

2. Se ubican los puntos medios de cada lado para trazar las tres mediatrices en el triángulo, mostrado en la figura B2:

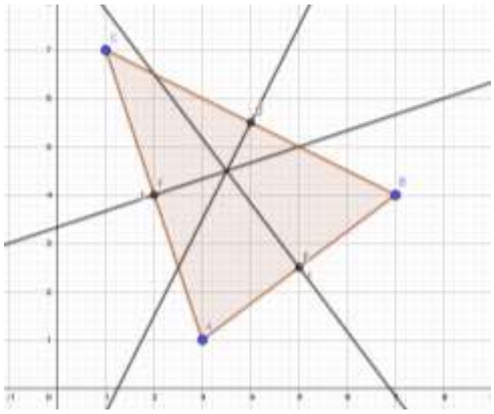
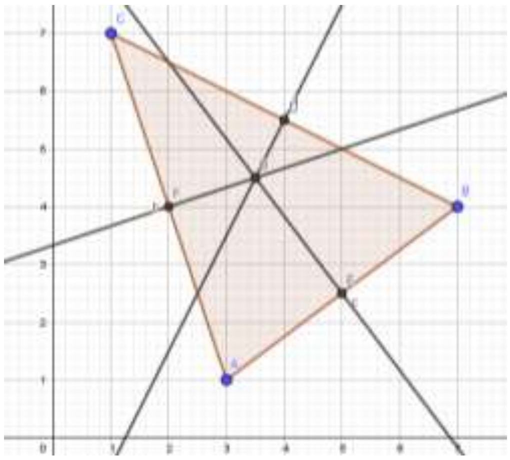


***Figura B2**: Trazo de las tres mediatrices del triángulo*

3. Posteriormente se localiza el punto donde converjan las tres mediatrices, según los muestra la figura B3:



Como podemos apreciar en la Figura B3, el punto de intersección de las tres mediatrices, el cual es llamado circuncentro se localiza en las coordenadas $(3.5,4.5)$, y resuelve el ejercicio debido a que lo que se pretende encontrar es el punto equidistante a los tres puntos iniciales dados, lo cual se puede interpretar como la búsqueda del centro para el trazo de una circunferencia circunscrita en el triángulo. Observa la Figura B4, y recuerda la definición de la circunferencia:

***Figura B1**: Trazo del triángulo al unir las tres coordenadas como sus vértices*

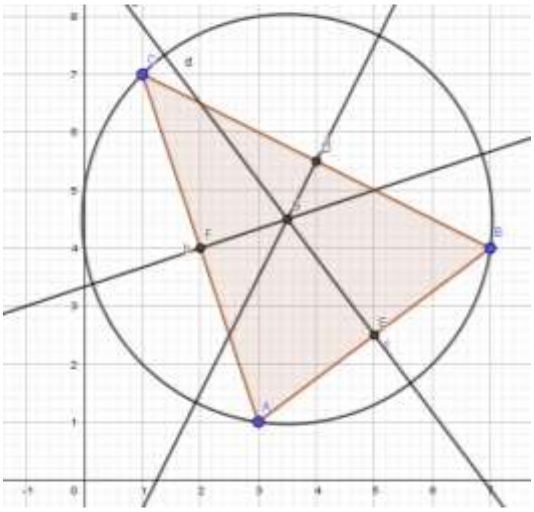


***Figura B4**: Sobre el circuncentro se puede trazar la circunferencia inscrita para cualquier tipo de triángulo.*

En conclusión, existen infinidad de variaciones de métodos para resolver un mismo problema, algunos más cortos que otros, sin embargo el tipo de datos y la precisión en los resultados que desees te darán pauta para elegir un método ideal a tu situación.

Referencias

Baldor, J. A. (2004). Geometría Plana y del Espacio con una introducción a la Trigonometría. México, D. F.: Publicaciones Cultural.

Goodman, A., & Hirsch, L. (1996). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. México, D. F.: Prentice Hall Hispanoamericana.

Swokowski, E. W., & Cole, J. A. (2011). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. México, D. F.: Cengage Learning.