https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/prepa4/issue/archive

Vida Científica Boletín Científico de la Escuela Preparatoria No. 4

Publicación semestral, Vol. 9, No. 17 (2021) 21-23

Vida Científica

ISSN: 2007-4905

Demostración de la Ley de Cosenos

Demostration of de cosines law

Pedro J. Soto-Pedraza [a]

Abstract:

The cosines law is used in the solution of oblique triangles, said law establishes that the square of the length of any side of an oblique triangle is equal to the sum of the squares of the lengths of the other two sides, minus the double product of the lengths of the same sides by the cosine of the angle that joins them.

To demonstrate its equality, it is convenient to introduce the concept of the height that converts the oblique triangle into two right triangles, thus being able to involve the Pythagoras theorem and trigonometric reasons.

Keywords:

Oblique triangles, demonstrate, height, express according to, replace, trigonometric reasons, Pythagoras theorem, binomial squared

Resumen:

La ley de cosenos es utilizada en la solución de triángulos oblicuángulos, dicha ley establece que el cuadrado de la longitud de cualquier lado de un triángulo oblicuángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, menos el doble producto de las longitudes de los mismos lados por el coseno del ángulo que los une.

Para demostrar su igualdad es conveniente introducir el concepto de la altura que convierte el triángulo oblicuángulo en dos triángulos rectángulos, pudiendo involucrar así tanto al Teorema de Pitágoras como a las Razones Trigonométricas.

***Palabras Clave*:**

Triángulos oblicuángulos, demostrar, altura, expresar en función de, sustituir, razones trigonométricas, Teorema de Pitágoras, binomio al cuadrado

Introducción

La solución de triángulos abre una puerta para acceder a una infinidad de problemas solucionables en la vida cotidiana, por lo cual la importancia de conocer los métodos diferentes de su solución radica en la forma tan práctica en la que se aplica y en la amplia variedad de ejemplos de solución.

Se dice que un triángulo está resuelto cuando se le ha hallado el valor de sus tres lados y de sus tres ángulos. Para los cuales es útil valernos tanto de métodos, leyes y teoremas, que en conjunto se combinan en un procedimiento completo de solución correcta de un triángulo. Dicha solución es elegida a partir del tipo de triángulo que se presente, para lo cual es conveniente tener en cuenta la clasificación de los triángulos: según sus lados se clasifican en equiláteros (todos los lados iguales), isósceles (dos lados iguales y uno desigual) y escalenos (todos los lados diferentes); y según sus ángulos se clasifican en rectángulos (uno de sus ángulos interiores es un ángulo recto) y oblicuángulos (ninguno de sus ángulos interiores es recto).

Al resolver un triángulo rectángulo, el procedimiento puede valerse del uso del Teorema de Pitágoras y de Razones Trigonométricas en conjunto, donde dichas soluciones son aplicables en una gran inmensidad de situaciones diferentes en donde dos longitudes se relacionan formando un ángulo recto. Sin embargo, en la práctica es también bastante común que se formen

[a] Pedro de Jesús Soto Pedraza, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Email: pedro_soto@uaeh.edu.mx

Fecha de publicación: 05/01/2021

triángulos en los que no se encuentre entre sus ángulos interiores un ángulo recto.

Para dicha situación en la que se involucran triángulos oblicuángulos se debe de tomar en cuenta los métodos más comunes de solución, los cuales pueden ser *Ley de Senos* y/o *Ley de Cosenos*.

Con respecto a la solución de triángulos oblicuángulos que implica el uso de la Ley de Cosenos (en los que los datos con los que se parta deben de ser dos lados del triángulo y el ángulo que los une conocidos, o los tres lados conocidos), se hace el uso de la Ley que enuncia:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \operatorname{Cos} A$$

Sin embargo, ¿de dónde es que viene dicha Ley? Ante ella se observa que involucra cantidades cuadráticas en combinación de la razón trigonométrica *coseno* otorgándole así su nombre. Lo cual habla de que en la deducción de dicha Ley está presente el Teorema de Pitágoras, combinado nuevamente con las Razones Trigonométricas, lo que da a su vez a deducir que dicho triángulo oblicuángulo debe de seccionarse en dos triángulos rectángulos. La deducción de la Ley de Cosenos se puede observar analizando que, en primera instancia, (y como se observa en el triángulo oblicuángulo de la Figura 1), al trazar la altura podemos encontrar dos triángulos rectángulos que pueden o no, ser diferentes.

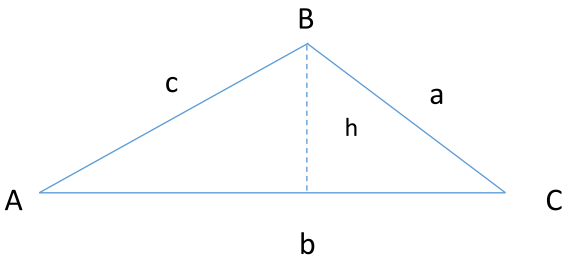

Figura 1: se observa que el trazo de la altura en el triángulo oblicuángulo genera dos triángulos rectángulos.

Si posteriormente se toma un punto de referencia localizado en el pie de la línea de altura sobre la base del triángulo y se le llama *H*, como se muestra en la Figura 2, se podrá enunciar gráficamente que:

$$b = \overline{AH} + \overline{HC}$$

Y debido a que es conveniente dejar a una cantidad desconocida en función de cantidades que comúnmente se conocen, resulta útil despejar uno de los segmentos desconocidos, obteniendo:

$$\overline{HC} = b - \overline{AH}$$

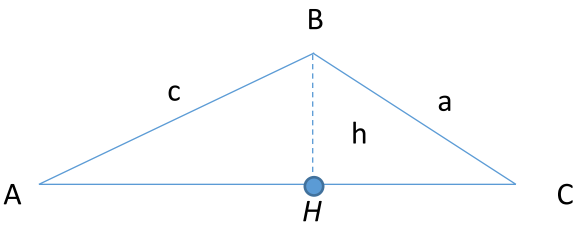

Figura 2: el punto *H* denota que el lado *b* se compone de la suma de los segmentos AH+HC.

Si en la última ecuación deseamos expresar al segmento $\overline{AH}$ en función de una razón trigonométrica, entendemos que:

$$\operatorname{Cos} A = \frac{\overline{AH}}{c}$$

Por lo tanto sabremos que se cumple:

$$\overline{AH} = c \operatorname{Cos} A$$

Lo cual es útil, ya que permite expresar por completo al segmento $\overline{HC}$ en función de dos cantidades posibles de conocer en un triángulo oblicuángulo, es decir, al sustituir esta última expresión en el despeje de $\overline{HC}$ se obtendrá:

$$\overline{HC} = b - c \operatorname{Cos} A$$

Las conjeturas anteriores permiten fácilmente deducir, a partir del Teorema de Pitágoras dos expresiones fundamentales que derivan en la Ley de Cosenos, para ello tomamos en cuenta al triángulo expresado según la Figura 3:

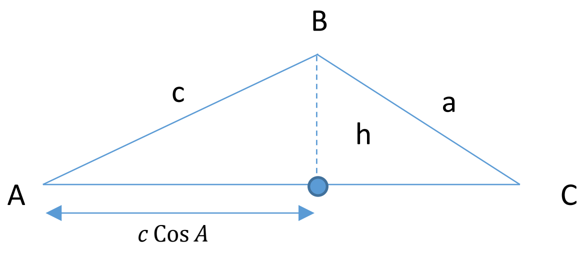

Figura 3: las expresiones recién demostradas corresponden a un cateto de un triángulo rectángulo.

Al visualizar la Figura 3, y haber observado el triángulo rectángulo de la izquierda, se puede establecer con facilidad mediante el Teorema de Pitágoras que:

$$c^2 = h^2 + (c \operatorname{Cos} A)^2$$

Es decir:

$$\boldsymbol{c^2 = h^2 + c^2 \operatorname{Cos}^2 A}$$

Donde a su vez, para encontrar una expresión que coloque a la altura (h) en función de otras medidas “conocidas”, se puede realizar el despeje siguiente, y establecer que:

$$\boldsymbol{h^2 = c^2 - c^2 \operatorname{Cos}^2 A}$$

Una vez terminada esta ecuación, y al tomar ahora de la Figura 3, el triángulo rectángulo que está a la derecha, por Teorema de Pitágoras se afirma que:

$$\boldsymbol{a^2 = h^2 + (b - c \operatorname{Cos} A)^2}$$

Lo que nos lleva a:

$$\boldsymbol{a^2 = h^2 + b^2 - 2bc \operatorname{Cos} A + c^2 \operatorname{Cos}^2 A}$$

En donde finalmente se puede realizar la sustitución de $\boldsymbol{h^2}$ por la expresión que se le dedujo, obteniendo así:

$$\boldsymbol{a^2 = c^2 - c^2 \operatorname{Cos}^2 A + b^2 - 2bc \operatorname{Cos} A + c^2 \operatorname{Cos}^2 A}$$

Expresión que, al simplificar sus términos semejantes resulta en la conocida Ley de Cosenos:

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \operatorname{Cos} A}$$

Es así como se llega a la expresión que enuncia la Ley de Cosenos para triángulos oblicuángulos.

Referencias

[1] Swokowski, E. W., & Cole, J. A. (2011). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* México, D. F.: Cengage Learning.