

Modelación, simulación y control de un péndulo doble sobre un carro

Modeling, simulation, and control of a double pendulum on a cart

Rodrigo Hidalgo Guerrero ^a, Libia D. Fernández De Dios ^b, Arturo Cruz Avilés ^c, Jorge Zuno Silva ^d, Martín Ortiz Domínguez ^e

Abstract:

This paper presents the complete development of a dynamic model for a double-pendulum system mounted on a cart, as well as its numerical simulation and the design of an optimal controller. The model is obtained using the Lagrangian formalism, based on a detailed kinematic description of the system and the explicit formulation of the kinetic and potential energies. From this approach, the nonlinear differential equations governing the motion are derived. Subsequently, the system is transformed into a state-space representation for numerical solution using integration methods. Finally, the system is linearized about an equilibrium point, and an LQR controller is designed. The results obtained are discussed, highlighting the dynamic complexity of the system and the limitations of linear control.

Keywords:

Double pendulum, dynamic model, Lagrangian formalism, LQR controller, numerical simulation

Resumen:

En este trabajo se presenta el desarrollo completo del modelo dinámico de un sistema de péndulo doble montado sobre un carro, así como su simulación numérica y el diseño de un controlador óptimo. El modelo se obtiene mediante el formalismo Lagrangiano, partiendo de la descripción cinemática detallada del sistema y de la formulación explícita de las energías cinética y potencial. A partir de este enfoque, se derivan las ecuaciones diferenciales no lineales que gobiernan el movimiento. Posteriormente, el sistema es transformado a una representación en espacio de estados para su resolución numérica mediante métodos de integración. Finalmente, se realiza la linealización del sistema en torno a un punto de equilibrio y se diseña un controlador LQR. Se discuten los resultados obtenidos, destacando la complejidad dinámica del sistema y las limitaciones del control lineal.

Palabras Clave:

Péndulo doble, modelo dinámico, formalismo Lagrangiano, controlador LQR, simulación numérica

Introducción

El estudio de sistemas dinámicos no lineales ha adquirido una importancia creciente en la ingeniería moderna, particularmente en aquellas áreas donde la interacción

^a Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo | Escuela Superior de Ciudad Sahagún | Ciudad Sahagún-Hidalgo | México, <https://orcid.org/0009-0001-8083-2901>, Email: hi453778@uaeh.edu.mx

^b Tecnológico Nacional de México | Instituto Tecnológico de Tlalnepantla | Tlalnepantla de Baz-Estado de México | México, <https://orcid.org/0009-0002-8481-4492>, Email: libia.fd@tlalnepantla.tecnm.mx

^c Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo | Escuela Superior de Ciudad Sahagún | Ciudad Sahagún-Hidalgo | México, <https://orcid.org/0000-0003-0455-1646>, Email: arturo_cruz8085@uaeh.edu.mx

^d Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo | Escuela Superior de Ciudad Sahagún | Ciudad Sahagún-Hidalgo | México, <https://orcid.org/0000-0002-1997-5399>, Email: jorge_zuno@uaeh.edu.mx

^e Autor de Correspondencia, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo | Escuela Superior de Ciudad Sahagún | Ciudad Sahagún-Hidalgo | México, <https://orcid.org/0000-0003-4475-9804>, Email: martin_ortiz@uaeh.edu.mx

entre múltiples grados de libertad da lugar a comportamientos complejos que no pueden ser descritos mediante modelos lineales convencionales. En este contexto, el sistema de péndulo doble sobre un carro representa un modelo paradigmático que combina movimiento traslacional y rotacional, generando una dinámica fuertemente acoplada y altamente sensible a las condiciones iniciales. Esta sensibilidad, junto con la

presencia de términos no lineales de tipo trigonométrico y productos de velocidades, conduce a fenómenos como la transferencia de energía entre subsistemas, oscilaciones no periódicas y, en ciertos regímenes, comportamientos de naturaleza caótica, tal como ha sido ampliamente documentado en la literatura de sistemas no lineales (Khalil, 2002; Strogatz, 2015).

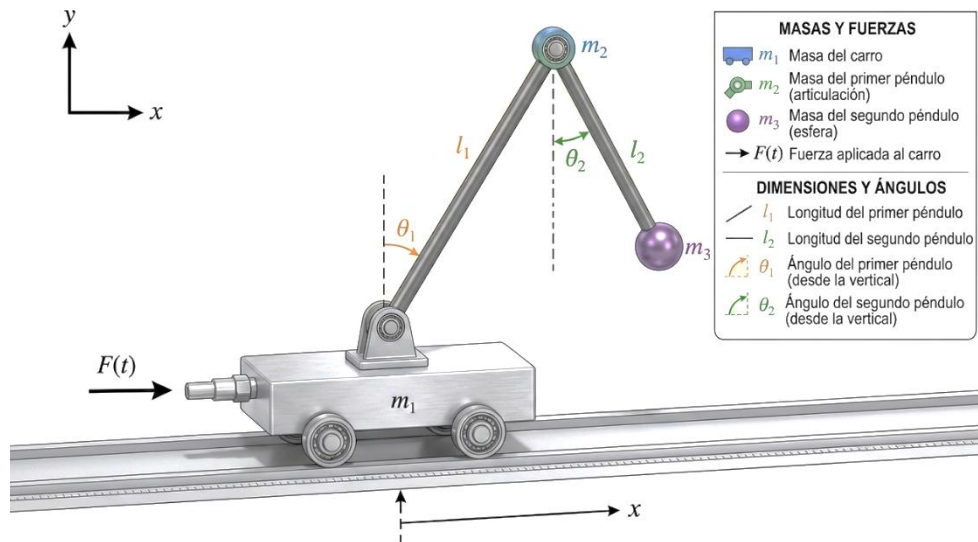


Figura 1. La imagen representa un sistema mecánico compuesto por un carro móvil con un mecanismo articulado de doble péndulo, modelado con un estilo tridimensional que permite apreciar con mayor claridad la estructura física y los elementos constructivos del sistema. Fuente: Elaboración propia.

Desde el punto de vista físico, el sistema está compuesto por un carro móvil al cual se encuentran acoplados dos péndulos en serie, lo que introduce una dependencia jerárquica en el movimiento de las masas. En particular, la dinámica del segundo péndulo depende no solo de su propio estado, sino también del movimiento del primero y del desplazamiento del carro, lo cual genera un sistema altamente interdependiente. Este tipo de configuración ha sido ampliamente estudiado en el contexto de la robótica y sistemas mecánicos multibody, donde el acoplamiento dinámico juega un papel fundamental en la transmisión de energía y en la estabilidad del sistema (Siciliano et al. 2009; Spong et al. 2006).

El interés en este tipo de sistemas no es únicamente académico, sino también práctico, ya que configuraciones similares aparecen en aplicaciones de ingeniería como robots articulados, sistemas de estabilización y mecanismos de transporte. En estos casos, la capacidad de modelar con precisión la dinámica del sistema es esencial para el diseño de estrategias de control que permitan garantizar estabilidad y desempeño adecuado bajo distintas condiciones de operación (Ogata, 2010; Murray et al. 1994). Para abordar el modelado de sistemas con múltiples grados de libertad, el formalismo Lagrangiano se ha consolidado como una herramienta robusta, ya que permite derivar las ecuaciones de movimiento a partir de consideraciones energéticas, evitando la necesidad de analizar

explícitamente las fuerzas internas. Este enfoque es ampliamente utilizado en la modelización de sistemas mecánicos complejos y en la robótica moderna (Siciliano et al. 2009; Spong et al. 2006). Sin embargo, la aplicación de este formalismo conduce a ecuaciones diferenciales no lineales acopladas cuya solución analítica resulta, en la mayoría de los casos, impracticable, por lo que es necesario recurrir a métodos numéricos para su análisis.

Una vez obtenido el modelo dinámico, surge la necesidad de estudiar su comportamiento y diseñar estrategias de control. En este sentido, una aproximación común consiste en linealizar el sistema en torno a un punto de equilibrio y aplicar técnicas de control óptimo, como el regulador cuadrático lineal (LQR), el cual permite obtener una ley de control que minimiza una función de costo asociada al desempeño del sistema (Ogata, 2010; Slotine et al. 1991). No obstante, dado que el modelo original es no lineal, la efectividad de estas técnicas se limita a regiones cercanas al punto de operación, lo cual hace necesario evaluar su desempeño dentro del sistema completo. En este trabajo se presenta un estudio integral del sistema de péndulo doble sobre un carro, que abarca desde la formulación del modelo dinámico mediante el enfoque Lagrangiano hasta su simulación numérica y el diseño de un controlador basado en técnicas de control óptimo. A través de este análisis, se busca no solo describir el comportamiento del sistema, sino también identificar las limitaciones de los enfoques lineales y

establecer una base sólida para el desarrollo de estrategias de control más avanzadas en sistemas no lineales.

Se considera un carro de masa m_1 que se desplaza a lo largo del eje horizontal x . Unido al carro se encuentra un primer péndulo de longitud l_1 y masa m_2 , y en el extremo de este un segundo péndulo de longitud l_2 y masa m_3 .

Descripción geométrica y cinemática del sistema

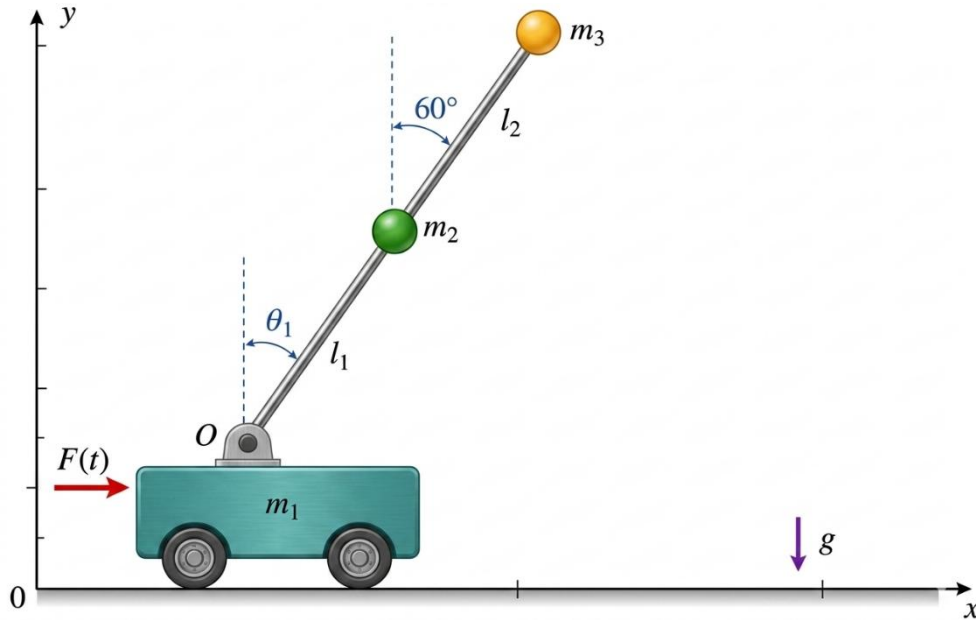


Figura 2. La imagen muestra un sistema mecánico correspondiente a un péndulo doble montado sobre un carro móvil, el cual constituye un ejemplo clásico de sistema dinámico no lineal con múltiples grados de libertad. Fuente: Elaboración propia.

Las coordenadas generalizadas del sistema se definen como:

$$q_1 = x, q_2 = \theta_1, q_3 = \theta_2 \quad (1)$$

Para obtener el modelo dinámico es necesario expresar las posiciones de cada masa en función de estas coordenadas.

La posición de la masa m_2 es:

$$x_2 = x + l_1 \sin \theta_1, y_2 = -l_1 \cos \theta_1 \quad (2)$$

Mientras que la posición de la masa m_3 es:

$$x_3 = x + l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \quad (3)$$

$$y_3 = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 \quad (4)$$

Derivando con respecto al tiempo se obtienen las velocidades:

$$\dot{x}_2 = \dot{x} + l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \quad (5)$$

$$\dot{y}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \quad (6)$$

$$\dot{x}_3 = \dot{x} + l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \quad (7)$$

$$\dot{y}_3 = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \quad (8)$$

Estas expresiones muestran claramente el acoplamiento cinemático entre las variables.

Formulación energética

El Lagrangiano del sistema se define como:

$$L = T - V \quad (9)$$

La energía cinética total se obtiene sumando las contribuciones de cada masa:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) \quad (10)$$

Sustituyendo (5)–(8) en (10), se obtiene:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\left[(\dot{x} + l_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1)^2 + (l_1\dot{\theta}_1 \sin \theta_1)^2\right] + \frac{1}{2}m_3\left[(\dot{x} + l_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 + (l_1\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2\right] \quad (11)$$

La energía potencial gravitacional está dada por:

$$V = m_2gy_2 + m_3gy_3 \quad (12)$$

Sustituyendo (2) y (4):

$$V = m_2gl_1 \cos \theta_1 + m_3g(l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \quad (13)$$

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\left[(\dot{x} + l_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1)^2 + (l_1\dot{\theta}_1 \sin \theta_1)^2\right] + \frac{1}{2}m_3\left[(\dot{x} + l_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 + (l_1\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2\right] - m_2gl_1 \cos \theta_1 - m_3g(l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \quad (14)$$

Derivación de las ecuaciones de movimiento

Aplicando las ecuaciones de Euler–Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (15)$$

Se procede, por ejemplo, con la coordenada x :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2 + m_3)\dot{x} + (m_2 + m_3)l_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + m_3l_2\dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \quad (16)$$

Derivando respecto al tiempo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + (m_2 + m_3)l_1(\ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1) + m_3l_2(\ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2) \quad (17)$$

Dado que L no depende explícitamente de x :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (18)$$

Sustituyendo en (15), se obtiene la ecuación (ya conocida):

$$(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + (m_2 + m_3)l_1\ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 + m_3l_2\ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - (m_2 + m_3)l_1\dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 - m_3l_2\dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 = 0 \quad (19)$$

Procediendo de manera análoga para θ_1 y θ_2 , se obtienen las ecuaciones restantes.

Forma matricial del sistema

El sistema puede escribirse como:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = 0 \quad (20)$$

donde:

- $M(q)$: matriz de inercia
- $C(q, \dot{q})$: términos centrífugos
- $G(q)$: términos gravitacionales

Simulación numérica

La resolución del sistema dinámico descrito por las ecuaciones (14)–(16) requiere necesariamente el uso de métodos numéricos, ya que la presencia de términos no lineales acoplados impide la obtención de soluciones analíticas en forma cerrada. En particular, la dependencia simultánea de las aceleraciones $\ddot{x}$, $\ddot{\theta}_1$ y $\ddot{\theta}_2$, junto con la aparición de funciones trigonométricas multiplicadas por velocidades al cuadrado, da lugar a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias altamente no lineal. Por esta razón, se recurre a un esquema de integración numérica que permita aproximar la evolución temporal del sistema con suficiente precisión. En este trabajo se adopta el método de Runge–Kutta de cuarto orden, el cual es ampliamente utilizado en la simulación de sistemas dinámicos no lineales debido a su equilibrio entre estabilidad numérica y costo computacional. Este método permite evaluar la función dinámica del sistema en distintos puntos dentro de cada intervalo de integración, generando una aproximación más precisa que los métodos de orden inferior. Para aplicar este esquema, el sistema de ecuaciones de segundo orden se transforma previamente en un sistema equivalente de primer orden mediante la introducción de variables de estado adicionales, de modo que la dinámica completa pueda expresarse en función de un vector de estado. La discretización temporal se realiza utilizando un paso de integración suficientemente pequeño, con el objetivo de capturar adecuadamente las variaciones rápidas que pueden presentarse en el sistema, especialmente en aquellos intervalos donde las velocidades angulares alcanzan valores elevados. La elección del paso de integración constituye un aspecto crítico, ya que un valor demasiado grande puede introducir errores numéricos

significativos o incluso inestabilidad en la solución, mientras que un valor excesivamente pequeño incrementa el costo computacional sin aportar mejoras sustanciales en la precisión.

Para la simulación se consideran valores típicos de los parámetros físicos del sistema, manteniendo relaciones de masa y longitud que permitan observar claramente los efectos de acoplamiento dinámico. Las condiciones iniciales se seleccionan de manera que introduzcan pequeñas perturbaciones angulares en los péndulos, manteniendo inicialmente el carro en reposo. Esta elección permite analizar cómo evoluciona el sistema a partir de una configuración cercana al equilibrio y cómo las interacciones dinámicas amplifican dichas perturbaciones. Los resultados obtenidos muestran que la evolución temporal de las variables de estado no sigue patrones simples. En particular, los ángulos θ_1 y θ_2 presentan oscilaciones cuya amplitud y frecuencia varían con el tiempo, lo cual es una manifestación directa de la no linealidad del sistema. A diferencia de un péndulo simple, donde el movimiento puede aproximarse mediante funciones sinusoidales en el régimen de pequeñas oscilaciones, en este caso las trayectorias se ven afectadas por la interacción entre los dos péndulos y el movimiento del carro, generando respuestas mucho más complejas.

Un fenómeno relevante que se observa durante la simulación es la transferencia de energía entre los dos péndulos. Esta transferencia no es constante, sino que ocurre de manera intermitente, provocando que uno de los péndulos incremente su amplitud de oscilación mientras el otro la reduce. Este comportamiento está directamente relacionado con los términos de acoplamiento presentes en la matriz de inercia del sistema, los cuales permiten que la energía cinética se redistribuya entre los diferentes grados de libertad. Desde el punto de vista físico, esto puede interpretarse como una interacción dinámica en la cual el movimiento de un péndulo influye activamente en el otro. Adicionalmente, el análisis del sistema en el espacio de fases revela que las trayectorias no se cierran sobre sí mismas, lo cual indica que el sistema no presenta un comportamiento periódico simple. En su lugar, las trayectorias tienden a ocupar regiones del espacio de fases de forma irregular, lo cual sugiere la presencia de dinámica compleja o cuasi-caótica. Este tipo de comportamiento es característico de sistemas no lineales de múltiples grados de libertad y ha sido ampliamente reportado en la literatura especializada (Strogatz, 2015; Ott, 2002).

El movimiento del carro también presenta características interesantes, ya que no permanece estático incluso en

ausencia de una fuerza externa aplicada directamente sobre él. Esto se debe a que las fuerzas inerciales generadas por los péndulos inducen aceleraciones en el carro, lo que provoca desplazamientos que reflejan la interacción entre los movimientos rotacionales y traslacionales. En consecuencia, el sistema debe ser analizado como un conjunto acoplado en el que ninguna de las variables puede considerarse independiente. Finalmente, es importante señalar que la simulación numérica no solo permite visualizar el comportamiento del sistema, sino que también constituye una herramienta fundamental para la validación del modelo matemático. La coherencia entre los resultados obtenidos y los comportamientos esperados para sistemas no lineales confirma la consistencia del modelo desarrollado. Asimismo, estos resultados proporcionan una base sólida para la etapa de diseño de control, ya que permiten identificar las regiones de operación en las cuales el sistema puede ser estabilizado mediante técnicas lineales y aquellas en las que se requieren enfoques más avanzados.

Para resolver el sistema (20), se transforma en un sistema de primer orden:

$$\dot{z} = f(z) \quad (21)$$

y se utiliza el método de Runge–Kutta de cuarto orden como ya se había mencionado. El análisis revela comportamiento no lineal, transferencia de energía y sensibilidad a condiciones iniciales.

Diseño de control

Se linealiza el sistema en:

$$x = 0, \theta_1 = 0, \theta_2 = 0 \quad (22)$$

y se obtiene:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (23)$$

Se define la función de costo:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (24)$$

y la ley de control:

$$u = -Kx$$

(25)

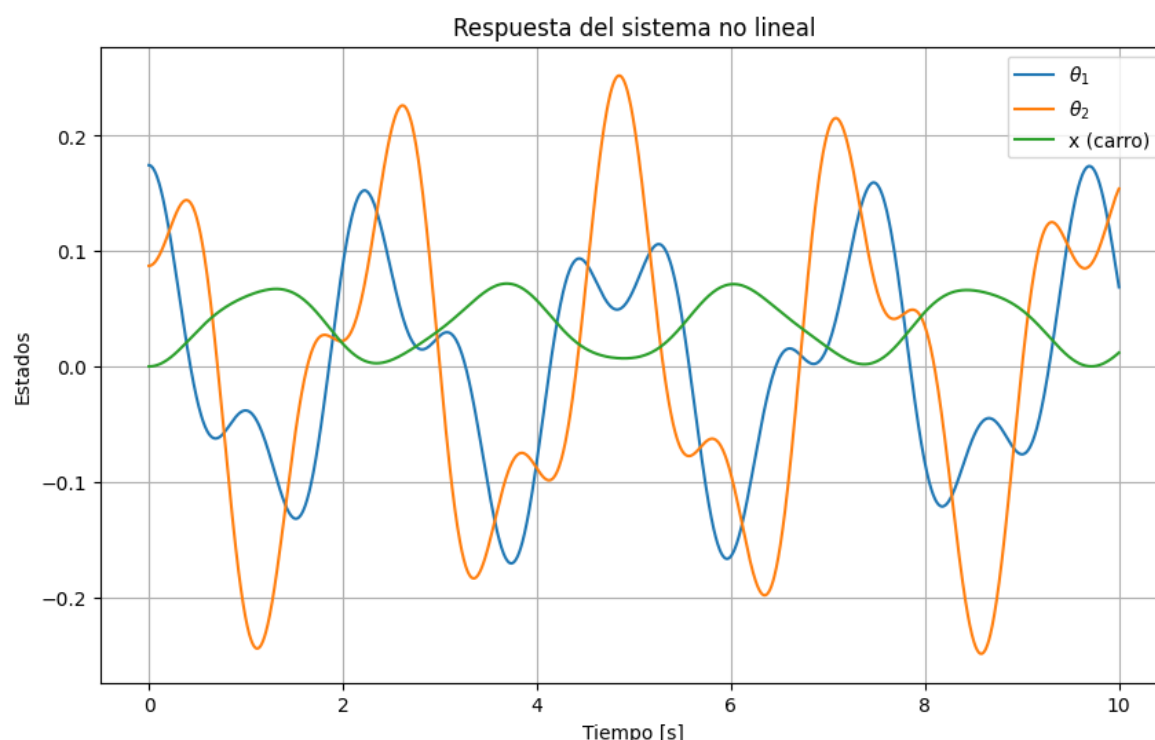


Figura 3. Representación gráfica de tres señales, claramente diferenciadas por color, cada una asociada a un grado de libertad del sistema. Más allá de ser una simple elección visual, la separación por colores permite identificar de manera directa cómo se distribuye la energía y cómo interactúan dinámicamente las variables del sistema. Fuente: Elaboración propia.

Curva azul — θ_1 : dinámica del primer péndulo

La curva azul representa el comportamiento del primer péndulo, el cual está directamente unido al carro. Desde el inicio se observa que esta señal presenta oscilaciones irregulares, con variaciones tanto en amplitud como en frecuencia. Esto indica que el primer péndulo no se comporta como un oscilador simple, sino como un elemento que está constantemente siendo influenciado por el resto del sistema. Lo interesante de esta curva es que su comportamiento parece intermedio: no es ni el más dominante ni el más suave. Esto se debe a que el primer péndulo actúa como un elemento de transmisión de energía entre el carro y el segundo péndulo. En algunos intervalos de tiempo, la amplitud de la señal azul aumenta, lo cual sugiere que está recibiendo energía del segundo péndulo; en otros intervalos, su amplitud disminuye, indicando que está transfiriendo energía hacia él. Desde el punto de vista dinámico, esta curva refleja claramente el papel del primer péndulo como un acoplador mecánico, donde su movimiento está condicionado tanto por la base móvil (el carro) como por

el segundo péndulo. Esta doble dependencia es la causa de su comportamiento no uniforme.

Curva naranja — θ_2 : dinámica del segundo péndulo

La curva naranja muestra el comportamiento del segundo péndulo, y es la que presenta las oscilaciones más pronunciadas. Esto no es casualidad, sino una consecuencia directa de su posición en la cadena dinámica. Al estar conectado al extremo del primer péndulo, el segundo péndulo recibe energía amplificada debido a los movimientos combinados del sistema. Se observa que esta curva tiene picos más altos y variaciones más abruptas. Esto indica que el segundo péndulo es el elemento más “energético” del sistema. En términos físicos, esto puede interpretarse como un efecto de acumulación de energía, donde las oscilaciones del primer péndulo se transmiten y amplifican en el segundo. Otro aspecto importante es que la curva naranja no mantiene una relación de fase constante con la curva azul. Esto significa que ambos péndulos no oscilan de manera sincronizada, lo cual es un claro indicador de comportamiento no lineal. En sistemas lineales, las fases

suelen mantenerse constantes; aquí, en cambio, hay desfases variables, lo que evidencia un intercambio dinámico de energía. En resumen, la curva naranja representa el grado de libertad más sensible y más propenso a exhibir comportamiento complejo, siendo un buen indicador de la no linealidad global del sistema.

Curva verde — x : movimiento del carro

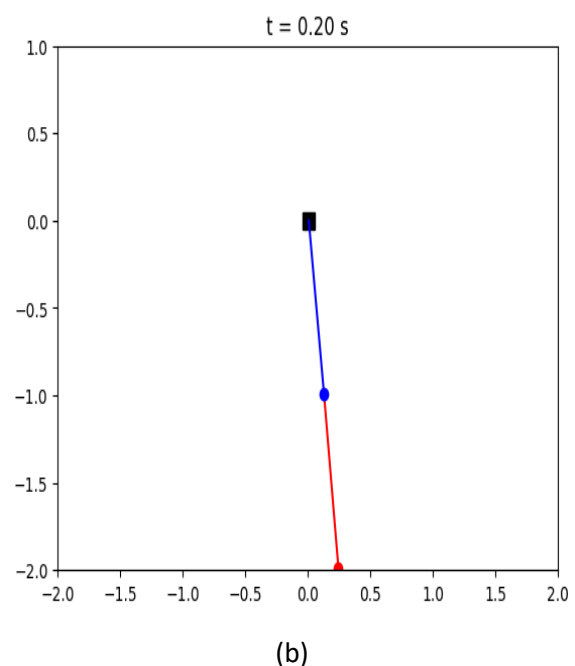
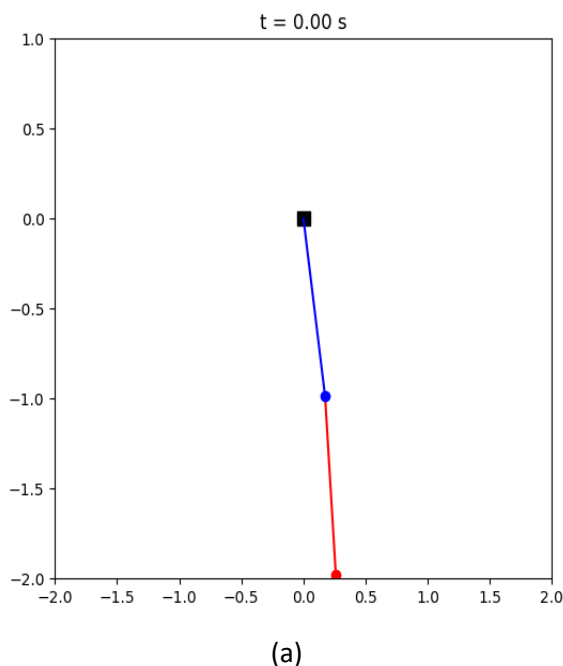
La curva verde corresponde al desplazamiento del carro, y su comportamiento es particularmente interesante porque, a diferencia de los péndulos, sus oscilaciones son más suaves y de menor amplitud. Sin embargo, esto no implica que su dinámica sea simple. El hecho de que el carro oscile, aun cuando no se ha aplicado una fuerza externa explícita en la simulación, indica que está siendo excitado por las fuerzas internas generadas por los péndulos. Este fenómeno es consecuencia directa de los términos de acoplamiento en la ecuación del movimiento del carro, donde aparecen las aceleraciones y velocidades angulares de los péndulos. La suavidad de la curva verde sugiere que el carro actúa como un elemento inercial dominante, es decir, su mayor masa hace que responda de manera más lenta a las excitaciones del sistema. Sin embargo, su movimiento no es independiente, sino que refleja una especie de “promedio dinámico” de las interacciones entre los péndulos.

Además, se puede observar que el movimiento del carro parece seguir, con cierto retraso, las variaciones de las otras dos curvas. Este desfase es característico de sistemas acoplados donde existe transmisión de energía entre distintos modos de vibración.

A diferencia de la gráfica anterior, aquí los colores no representan variables en el tiempo, sino elementos físicos del sistema:

- ● La barra azul corresponde al primer péndulo, el cual actúa como enlace entre el carro y el segundo péndulo.
- ● La barra roja representa el segundo péndulo, que es el elemento más dinámico del sistema.
- ● El punto negro indica el pivote fijo al carro, que define el origen del movimiento rotacional.
- ● y ● los puntos de color corresponden a las masas concentradas, facilitando la identificación de cada grado de libertad.

Esta diferenciación cromática permite visualizar claramente la estructura jerárquica del sistema: el primer péndulo transmite movimiento, mientras que el segundo lo amplifica.



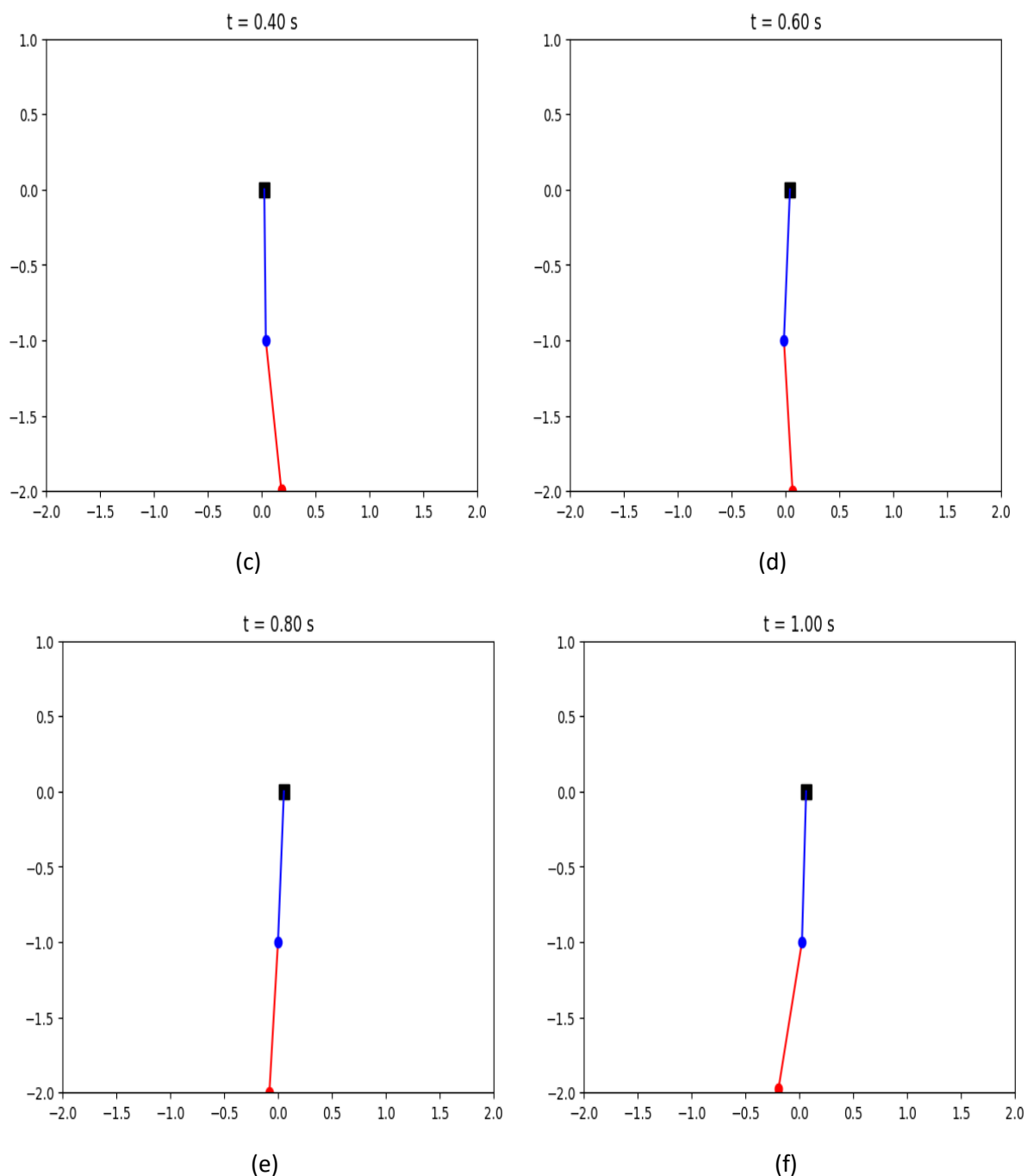


Figura 4. Representaciones instantáneas del sistema de péndulo doble sobre un carro en el tiempo: a) $t = 0.00$ s, b) 0.20 s, c) 0.04 s, d) 0.06 , e) 0.08 s y f) 1.00 s. Fuente: Elaboración propia.

Resultados y discusión

Una vez implementado el modelo dinámico descrito en las ecuaciones (18)–(19) y resuelto numéricamente mediante el esquema de Runge–Kutta de cuarto orden, se obtiene la evolución temporal de las variables de estado del sistema. Los resultados muestran que el comportamiento del péndulo doble sobre un carro es altamente complejo incluso para perturbaciones iniciales

pequeñas. En particular, las respuestas angulares de ambos péndulos no presentan periodicidad simple, sino que exhiben variaciones en amplitud y frecuencia a lo largo del tiempo, lo cual es consecuencia directa de la presencia de términos no lineales en las ecuaciones de movimiento, tales como los productos entre velocidades angulares y funciones trigonométricas, comportamiento consistente con lo reportado en sistemas no lineales clásicos (Strogatz, 2015; Ott, 2002). Al analizar las

trayectorias en el dominio del tiempo, se observa un fenómeno de transferencia de energía entre los dos péndulos. Esta transferencia se manifiesta como una alternancia en las amplitudes de oscilación, donde en ciertos intervalos de tiempo uno de los péndulos domina el movimiento mientras que el otro presenta oscilaciones de menor magnitud. Este comportamiento está directamente relacionado con el acoplamiento dinámico presente en la matriz de inercia $M(q)$, la cual introduce términos cruzados que permiten el intercambio de energía cinética entre los subsistemas, tal como se discute en la teoría de sistemas multibody (Spong et al., 2006).

El análisis en el espacio de fases revela trayectorias que no son cerradas, lo cual indica que el sistema no sigue un movimiento periódico simple. En su lugar, las trayectorias ocupan regiones del espacio de fases de manera irregular, lo cual sugiere la presencia de comportamiento cuasi-caótico, en concordancia con estudios previos en dinámica no lineal (Strogatz, 2015; Ott, 2002). Este tipo de comportamiento confirma que pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden producir respuestas significativamente diferentes, lo cual representa un desafío importante en el diseño de sistemas de control. En cuanto al movimiento del carro, se observa que este responde directamente a las fuerzas inerciales generadas por los péndulos, evidenciando la fuerte interacción entre los grados de libertad del sistema. Este acoplamiento implica que el control del sistema no puede abordarse de manera independiente para cada variable, sino que requiere un enfoque global que considere la dinámica completa del sistema.

Al incorporar el controlador LQR, diseñado a partir de la linealización del sistema, se observa que es posible estabilizar el sistema en una región cercana al punto de equilibrio. La acción de control reduce progresivamente las oscilaciones y conduce el sistema hacia un estado estable, lo cual coincide con los fundamentos del control óptimo descritos en (Ogata, 2010; Slotine et al. 1991). Sin embargo, cuando las perturbaciones iniciales son grandes, el desempeño del controlador se degrada debido a que el modelo lineal deja de representar adecuadamente la dinámica real del sistema. Esta limitación es inherente a los métodos de control lineal aplicados a sistemas no lineales.

Conclusiones

En este trabajo se desarrolló un modelo dinámico completo del sistema de péndulo doble sobre un carro

utilizando el formalismo Lagrangiano, lo cual permitió obtener un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales que describen su comportamiento. La simulación numérica evidenció la complejidad del sistema, caracterizada por la presencia de acoplamientos dinámicos, transferencia de energía entre subsistemas y sensibilidad a las condiciones iniciales, fenómenos ampliamente documentados en la literatura de sistemas no lineales (Khalil, 2002; Strogatz, 2015). El análisis realizado confirma que el sistema no puede ser descrito adecuadamente mediante aproximaciones lineales en todo su dominio de operación, lo que pone de manifiesto la importancia de considerar su naturaleza no lineal en el diseño de estrategias de control. No obstante, el uso de un controlador LQR basado en la linealización del sistema permitió estabilizarlo en una región cercana al equilibrio, demostrando la utilidad de este tipo de técnicas dentro de un rango limitado de operación, en concordancia con la teoría de control óptimo (Ogata, 2010; Slotine et al. 1991). Finalmente, los resultados obtenidos sugieren que, para lograr un control efectivo en un rango más amplio de condiciones, es necesario explorar enfoques de control no lineal que permitan compensar de manera más precisa la dinámica del sistema. Este trabajo constituye una base sólida para futuras investigaciones orientadas al análisis y control avanzado de sistemas dinámicos no lineales.

Anexo A:

Descripción del código de simulación

El código desarrollado tiene como objetivo resolver numéricamente el modelo dinámico del sistema de péndulo doble sobre un carro previamente formulado mediante el formalismo Lagrangiano. Para ello, se implementa una estructura modular que permite definir de manera clara los parámetros físicos del sistema, la función que describe su dinámica y el procedimiento de integración numérica. En una primera etapa, se definen los parámetros físicos del sistema, incluyendo la masa del carro, las masas de los péndulos, las longitudes de cada barra y la aceleración gravitacional. Estos parámetros constituyen la base del modelo matemático, ya que determinan la forma de la matriz de inercia y de los términos no lineales que aparecen en las ecuaciones de movimiento. La selección de valores típicos permite reproducir condiciones realistas y facilita la interpretación física de los resultados.

Posteriormente, se implementa una función que describe la dinámica del sistema. Esta función recibe como entrada el vector de estado, el cual contiene tanto las variables de posición como sus derivadas temporales, es decir, el desplazamiento del carro, las posiciones angulares de los péndulos y sus respectivas velocidades.

Dentro de esta función, se calculan primero las funciones trigonométricas asociadas a los ángulos, lo cual simplifica la escritura de las ecuaciones y reduce el costo computacional al evitar evaluaciones repetidas. A continuación, se construye explícitamente la matriz de inercia del sistema, la cual depende de las coordenadas generalizadas. Esta matriz representa la distribución de masa del sistema y su resistencia al cambio de movimiento, incorporando además los términos de acoplamiento entre el carro y los péndulos, así como entre los propios péndulos. De manera simultánea, se define un vector que agrupa los términos no lineales, incluyendo efectos centrífugos y gravitacionales. Este vector corresponde al lado derecho de la ecuación dinámica en su forma matricial.

El sistema de ecuaciones diferenciales se resuelve entonces mediante la inversión de la matriz de inercia, lo cual permite obtener las aceleraciones del sistema en función del estado actual. Este procedimiento se realiza en cada paso de integración, lo que garantiza que la evolución temporal del sistema refleje adecuadamente su comportamiento no lineal. Una vez definida la dinámica, se establecen las condiciones iniciales del sistema. Estas condiciones incluyen el estado inicial del carro y pequeñas perturbaciones en los ángulos de los péndulos, lo cual permite analizar la respuesta del sistema a partir de una configuración cercana al equilibrio. La elección de estas condiciones es importante, ya que influye directamente en la evolución dinámica y en la posible aparición de comportamientos complejos.

La integración numérica se realiza mediante la función `solve_ivp` de la biblioteca SciPy, la cual implementa métodos de integración avanzados basados en esquemas de Runge-Kutta. Este método permite obtener una solución continua en el tiempo y garantiza una buena precisión en la resolución del sistema. El intervalo de tiempo y la discretización se seleccionan de manera que se capture adecuadamente la dinámica del sistema sin introducir errores significativos. Finalmente, los resultados se procesan para su visualización. Se generan gráficas que muestran la evolución temporal de las variables principales del sistema, incluyendo los ángulos de los péndulos y la posición del carro. Estas gráficas permiten identificar características clave del comportamiento dinámico, como oscilaciones no lineales y transferencia de energía. Adicionalmente, se implementa una animación simple que representa el movimiento físico del sistema, facilitando la interpretación visual de la dinámica. En conjunto, el código proporciona una herramienta completa para el análisis del sistema de péndulo doble sobre un carro, permitiendo no solo resolver las ecuaciones de movimiento, sino también

visualizar e interpretar su comportamiento dinámico de manera clara y coherente con el modelo teórico desarrollado.

```
#
=====
# PÉNDULO DOBLE SOBRE CARRO - SIMULACIÓN
# =====

import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp
import matplotlib.pyplot as plt

#
=====
# 1. PARÁMETROS DEL SISTEMA
#
=====

M = 1.0 # masa del carro
m1 = 0.1 # masa péndulo 1
m2 = 0.1 # masa péndulo 2
l1 = 1.0 # longitud péndulo 1
l2 = 1.0 # longitud péndulo 2
g = 9.81 # gravedad

#
=====
# 2. DINÁMICA DEL SISTEMA
#
=====

def dynamics(t, state):
    """
    state = [x, x_dot, theta1, theta1_dot, theta2, theta2_dot]
    """

    x, x_dot, th1, th1_dot, th2, th2_dot = state

    # Funciones trigonométricas
    c1 = np.cos(th1)
    s1 = np.sin(th1)
    c2 = np.cos(th2)
    s2 = np.sin(th2)
    c12 = np.cos(th1 - th2)
    s12 = np.sin(th1 - th2)

    #
=====
# MATRIZ DE INERCIA M(q)
#
=====

M_mat = np.array([
    [M + m1 + m2, (m1 + m2)*l1*c1, m2*l2*c2],
    [(m1 + m2)*l1*c1, (m1 + m2)*l1**2,
m2*l1*l2*c12],
    [m2*l2*c2, m2*l1*l2*c12, m2*l2**2]
```

```

])
#
=====
# VECTOR DE FUERZAS NO LINEALES
#
=====

B_vec = np.array([
    (m1 + m2)*l1*th1_dot**2*s1 +
m2*l2*th2_dot**2*s2,
    -(m1 + m2)*g*l1*s1 - m2*l1*l2*th2_dot**2*s12,
    -m2*g*l2*s2 + m2*l1*l2*th1_dot**2*s12
])

#
=====
# RESOLUCIÓN DEL SISTEMA
#
=====

q_ddot = np.linalg.solve(M_mat, B_vec)

return [
    x_dot,
    q_ddot[0],
    th1_dot,
    q_ddot[1],
    th2_dot,
    q_ddot[2]
]

#
=====
# 3. CONDICIONES INICIALES
#
=====

state0 = [
    0.0,      # x
    0.0,      # x_dot
    np.deg2rad(10), # theta1
    0.0,      # theta1_dot
    np.deg2rad(5),  # theta2
    0.0       # theta2_dot
]

# Tiempo
t_span = (0, 10)
t_eval = np.linspace(0, 10, 2000)

#
=====
# 4. SIMULACIÓN
#
=====

solution = solve_ivp(
    dynamics,
    t_span,

```

```

    state0,
    t_eval=t_eval,
    method='RK45'
)

#
=====
# 5. RESULTADOS
#
=====

x = solution.y[0]
th1 = solution.y[2]
th2 = solution.y[4]
time = solution.t

#
=====
# 6. GRÁFICAS
#
=====

plt.figure(figsize=(10,6))

plt.plot(time, th1, label=r'$\theta_1$')
plt.plot(time, th2, label=r'$\theta_2$')
plt.plot(time, x, label='x (carro)')

plt.xlabel('Tiempo [s]')
plt.ylabel('Estados')
plt.title('Respuesta del sistema no lineal')
plt.legend()
plt.grid()

plt.show()

#
=====
# 7. ANIMACIÓN SIMPLE
#
=====

x1 = x + l1*np.sin(th1)
y1 = -l1*np.cos(th1)

x2 = x1 + l2*np.sin(th2)
y2 = y1 - l2*np.cos(th2)

plt.figure(figsize=(6,6))

for i in range(0, len(time), 40):
    plt.clf()

    # Carro
    plt.plot(x[i], 0, 'ks', markersize=8)

    # Péndulos
    plt.plot([x[i], x1[i]], [0, y1[i]], 'b-')
    plt.plot([x1[i], x2[i]], [y1[i], y2[i]], 'r-')

```

```
plt.plot(x1[i], y1[i], 'bo')
plt.plot(x2[i], y2[i], 'ro')

plt.xlim(-2, 2)
plt.ylim(-2, 1)
plt.title('t = {time[i]:.2f} s')
plt.pause(0.01)

plt.show()
```

Referencias

- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear systems* (3rd ed.). Prentice Hall.
- Murray, R. M., Li, Z., & Sastry, S. S. (1994). *A mathematical introduction to robotic manipulation*. CRC Press.
<https://doi.org/10.1201/9781315136370>
- Ogata, K. (2010). *Modern control engineering* (5th ed.). Prentice Hall.
- Ott, E. (2002). *Chaos in dynamical systems* (2nd ed.). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511803260>
- Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., & Oriolo, G. (2009). *Robotics: Modelling, planning and control*. Springer.
<https://doi.org/10.1007/978-1-84628-642-1>
- Slotine, J.-J. E., & Li, W. (1991). *Applied nonlinear control*. Prentice Hall.
- Spong, M. W., Hutchinson, S., & Vidyasagar, M. (2006). *Robot modeling and control*. Wiley.
- Strogatz, S. H. (2015). *Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering* (2nd ed.). Westview Press.