

Modelado dinámico de un manipulador robótico de 2 GDL en MATLAB Simscape Multibody

Dynamic modeling of a 2-GDL robotic manipulator in MATLAB Simscape Multibody

Antonio Islas Licona ^a, Libia D. Fernández De Dios ^b, Arturo Cruz Avilés ^c, Jorge Zuno Silva ^d,
Martín Ortiz Domínguez ^e

Abstract:

This work presents the dynamic modeling and numerical simulation of a planar two-degree-of-freedom (2-DOF) robotic manipulator using MATLAB Simscape Multibody. The study integrates both kinematic and dynamic analyses through the Euler–Lagrange formalism in order to describe the nonlinear behavior of the robotic system under different operating conditions. Initially, the geometric structure of the manipulator is developed by considering link dimensions, centers of mass, reference frames, and rotational joints. Subsequently, homogeneous transformation matrices are implemented to obtain the forward kinematic model and determine the spatial position of the end-effector. The dynamic model is derived from the expressions of kinetic and potential energy of each link, incorporating inertial effects, gravitational forces, as well as centrifugal and Coriolis terms, in addition to the joint torques required to produce the manipulator motion. Based on these expressions, the nonlinear differential equations of the system are obtained using the Euler–Lagrange method. A three-dimensional model is then implemented in MATLAB Simscape Multibody to analyze the dynamic response of the manipulator under different motion trajectories. Numerical simulations allow the evaluation of angular displacements, joint velocities, and torque requirements at each joint. The results demonstrate that the developed model accurately represents the dynamic behavior of the robotic system and provides smooth and stable motion during manipulation tasks. Furthermore, the simulation environment constitutes an efficient tool for analysis, validation, and future implementation of advanced control strategies in robotic systems.

Keywords:

2-DOF robotic manipulator, Dynamic modeling, Euler–Lagrange method, MATLAB Simscape Multibody, Robotic simulation

Resumen:

En este trabajo se presenta el modelado dinámico y la simulación numérica de un manipulador robótico planar de dos grados de libertad (2-GDL) utilizando MATLAB Simscape Multibody. El estudio integra el análisis cinemático y dinámico mediante el formalismo de Euler–Lagrange con el propósito de describir el comportamiento no lineal del sistema robótico durante diferentes condiciones de operación. Inicialmente, se desarrolla la estructura geométrica del manipulador considerando las dimensiones de los eslabones, los centros de masa, los marcos de referencia y las articulaciones rotacionales. Posteriormente, se implementan matrices de transformación homogénea para obtener el modelo cinemático directo y determinar la posición espacial del efector final. El modelo dinámico se desarrolla a partir de las expresiones de energía cinética y energía potencial de cada eslabón, incorporando efectos

^a Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo | Escuela Superior de Ciudad Sahagún | Ciudad Sahagún-Hidalgo | México, <https://orcid.org/0009-0001-6357-3661>, Email: is379998@uaeh.edu.mx

^b Tecnológico Nacional de México | Instituto Tecnológico de Tlalnepantla | Tlalnepantla de Baz-Estado de México | México, <https://orcid.org/0009-0002-8481-4492>, Email: libia.fd@tlalnepantla.tecnm.mx

^c Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo | Escuela Superior de Ciudad Sahagún | Ciudad Sahagún-Hidalgo | México, <https://orcid.org/0000-0003-0455-1646>, Email: arturo_cruz8085@uaeh.edu.mx

^d Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo | Escuela Superior de Ciudad Sahagún | Ciudad Sahagún-Hidalgo | México, <https://orcid.org/0000-0002-1997-5399>, Email: jorge_zuno@uaeh.edu.mx

^e Autor de Correspondencia, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo | Escuela Superior de Ciudad Sahagún | Ciudad Sahagún-Hidalgo | México, <https://orcid.org/0000-0003-4475-9804>, Email: martin_ortiz@uaeh.edu.mx

inerciales, gravitacionales, términos centrífugos y de Coriolis, así como los torques articulares necesarios para generar el movimiento del manipulador. A partir de estas expresiones se derivan las ecuaciones diferenciales no lineales del sistema mediante el método de Euler-Lagrange. Posteriormente, se implementa un modelo tridimensional en MATLAB Simscape Multibody para analizar la respuesta dinámica del manipulador durante diferentes trayectorias de movimiento. Las simulaciones numéricas permiten evaluar desplazamientos angulares, velocidades articulares y requerimientos de torque en cada articulación. Los resultados obtenidos muestran que el modelo desarrollado representa adecuadamente el comportamiento dinámico del sistema robótico y proporciona movimientos suaves y estables durante las tareas de manipulación. Asimismo, el entorno de simulación empleado constituye una herramienta eficiente para el análisis, validación y futura implementación de estrategias avanzadas de control en sistemas robóticos.

Palabras Clave:

Manipulador robótico 2-GDL, Modelado dinámico, Método de Euler-Lagrange, MATLAB Simscape Multibody, Simulación robótica

Introducción

Los manipuladores robóticos constituyen una de las tecnologías más importantes dentro de la automatización industrial moderna debido a su capacidad para ejecutar tareas repetitivas, precisas y de alta velocidad en procesos de manufactura, ensamblaje, inspección y manipulación de materiales. El desarrollo de sistemas robóticos ha experimentado un crecimiento significativo gracias a los avances en modelado computacional, sistemas embebidos, sensores inteligentes y algoritmos de control (Craig, 2005). La Figura 1, es una representación tridimensional de un manipulador robótico de dos grados de libertad (2-GDL) con un diseño estilizado tipo CAD, empleando una paleta de colores en tonos gris, azul y acentos en rojo para resaltar elementos clave del sistema. El manipulador está montado sobre una base circular fija de color azul, la cual proporciona estabilidad estructural y permite la rotación del primer eslabón. El primer eslabón, también representado en tonalidades azules, se conecta a la base mediante una articulación rotacional, permitiendo el movimiento angular principal del sistema. Este eslabón presenta una geometría curvada con refuerzos estructurales internos, lo que sugiere un diseño optimizado para soportar esfuerzos mecánicos. El segundo eslabón, de color gris, se encuentra acoplado al extremo del primero mediante una segunda articulación, cuya movilidad permite orientar el efector final en el espacio de trabajo. Los detalles en color rojo se utilizan estratégicamente para destacar componentes funcionales críticos, como las uniones o elementos móviles, facilitando la identificación visual de las zonas donde se concentran las interacciones dinámicas y los esfuerzos mecánicos. En el extremo del manipulador se encuentra el efector final, diseñado para realizar tareas de manipulación.

El entorno incluye plataformas cilíndricas en tonos grises que representan posibles estaciones de trabajo o puntos de operación dentro del espacio de trabajo del manipulador. Sobre una de estas plataformas se ubica un

objeto prismático en color rojo, que simboliza una pieza a manipular, permitiendo ilustrar un escenario típico de aplicación en tareas de pick-and-place.



Figura 1. Representación tridimensional de un manipulador robótico de dos grados de libertad (2-GDL) con diseño tipo CAD, donde se ilustran los eslabones, las articulaciones rotacionales y el efector final, así como un entorno de trabajo con estaciones y una pieza a manipular, destacando mediante colores la estructura mecánica y los elementos funcionales del sistema. Fuente: Elaboración propia.

Dentro de las diferentes configuraciones robóticas existentes, los manipuladores planares de dos grados de libertad (2-GDL) representan una arquitectura fundamental para el estudio de la cinemática, dinámica y control de robots seriales (Spong et al., 2006). Este tipo de manipuladores permite comprender con claridad los fenómenos dinámicos asociados al movimiento de sistemas multicuerpo, incluyendo efectos de inercia, acoplamiento dinámico, gravedad y términos no lineales asociados a la velocidad angular (Siciliano y Khatib, 2016). El análisis de manipuladores robóticos generalmente involucra dos etapas principales: el modelado cinemático y el modelado dinámico. El modelado cinemático permite determinar la posición y

orientación del efector final en función de las variables articulares, mientras que el modelado dinámico incorpora fuerzas y torques responsables del movimiento del sistema (Kelly et al., 2005). Uno de los métodos más utilizados para obtener las ecuaciones dinámicas de manipuladores robóticos es el formalismo de Euler-Lagrange, el cual se basa en principios energéticos y proporciona una metodología sistemática para derivar ecuaciones diferenciales no lineales de sistemas mecánicos multicuerpo (Goldstein, 2002). Esta formulación permite describir con precisión la interacción entre los eslabones del manipulador y los efectos dinámicos generados durante el movimiento.

En años recientes, los entornos de simulación numérica han adquirido gran relevancia en el análisis y validación de sistemas robóticos. MATLAB Simscape Multibody constituye una plataforma eficiente para modelar sistemas multicuerpo tridimensionales, permitiendo integrar articulaciones, cuerpos rígidos, sensores y actuadores dentro de un mismo entorno de simulación (MATLAB, s.f.). Este tipo de herramientas facilita la validación de modelos matemáticos antes de la implementación experimental y reduce costos asociados al desarrollo físico de prototipos robóticos. Diversos autores han utilizado Simscape Multibody para el análisis dinámico de manipuladores robóticos. Zhang et al. (2018) desarrollaron modelos dinámicos de robots seriales utilizando MATLAB/Simulink, obteniendo resultados consistentes con formulaciones analíticas. De manera similar, Patel y George (Patel y George, 2017) analizaron manipuladores planares considerando efectos gravitacionales y acoplamientos dinámicos entre articulaciones. Por lo tanto, el objetivo de este trabajo es desarrollar el modelo cinemático y dinámico completo de un manipulador robótico de 2-GDL utilizando el método de Euler-Lagrange e implementar su simulación numérica en MATLAB Simscape Multibody para analizar su comportamiento dinámico durante diferentes trayectorias de movimiento.

Modelo matemático

Descripción geométrica del manipulador

El sistema robótico considerado en este estudio corresponde a un manipulador planar de dos grados de libertad compuesto por dos eslabones rígidos conectados mediante articulaciones rotacionales. La primera articulación permite el movimiento del eslabón principal respecto a la base fija, mientras que la segunda articulación controla la orientación del segundo eslabón y del efector final.

El modelo geométrico del manipulador se desarrolla considerando:

- longitudes de los eslabones,
- centros de masa,
- masas distribuidas,
- sistemas de coordenadas locales,
- ángulos articulares.

Las coordenadas generalizadas del sistema se definen mediante:

$$q = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

donde:

- θ_1 representa el desplazamiento angular del primer eslabón,
- θ_2 corresponde al desplazamiento angular del segundo eslabón.

Las velocidades articulares están definidas por:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

mientras que las aceleraciones articulares son:

$$\ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

La geometría del sistema constituye la base para el desarrollo del modelo cinemático y dinámico, ya que las longitudes y orientaciones de los eslabones determinan directamente el movimiento del efector final dentro del espacio de trabajo.

Cinemática directa

La cinemática directa permite determinar la posición espacial del efector final en función de las variables articulares del manipulador. Para ello, se emplean matrices de transformación homogénea que describen la relación entre los marcos de referencia asociados a cada eslabón. La matriz de transformación correspondiente al primer eslabón se expresa como:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & l_1 \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & l_1 \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

De manera similar, la transformación homogénea del segundo eslabón se define mediante:

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & l_2 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & l_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

La transformación total del manipulador se obtiene mediante:

$$T_0^2 = A_1 A_2. \quad (6)$$

A partir de esta formulación, las coordenadas del efector final se calculan como:

$$x = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2), \quad (7)$$

$$y = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2). \quad (8)$$

Estas ecuaciones muestran que la posición del efector final depende directamente de la combinación angular de ambos eslabones, permitiendo generar trayectorias dentro del espacio de trabajo del robot. Asimismo, la relación entre velocidades articulares y velocidades lineales del efector final se obtiene mediante la matriz Jacobiana:

$$\dot{x} = J(q)\dot{q}, \quad (9)$$

donde la matriz Jacobiana está dada por:

$$J(q) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

La matriz Jacobiana es fundamental en robótica debido a que permite analizar singularidades, velocidades y control cinemático del manipulador.

Energía cinética del sistema

La energía cinética representa la energía asociada al movimiento de los eslabones del manipulador. Esta

energía depende tanto de las velocidades lineales de los centros de masa como de las velocidades angulares de cada eslabón. La Figura 2 se muestra la representación esquemática de un manipulador robótico planar de dos grados de libertad (2-GDL), diseñado con un estilo técnico limpio y profesional en tonos gris y azul, lo que facilita la interpretación visual de sus elementos mecánicos y variables dinámicas.

El sistema está compuesto por dos eslabones rígidos conectados mediante articulaciones rotacionales, donde el primer eslabón está unido a una base fija y el segundo se conecta al extremo del primero, formando una estructura serial. En la base del manipulador se define el sistema de coordenadas global $\{0\}$, con los ejes x_0 y y_0 , a partir del cual se describen las posiciones y orientaciones del sistema.

El primer eslabón, de longitud l_1 , se caracteriza por su centro de masa ubicado a una distancia l_{c1} desde la articulación base, representado mediante un símbolo distintivo. Este eslabón rota con un ángulo θ_1 , indicado mediante una flecha circular en color azul. El segundo eslabón, de longitud l_2 , se conecta al extremo del primero mediante una segunda articulación, cuyo movimiento está definido por el ángulo θ_2 . De manera similar, su centro de masa se localiza a una distancia l_{c2} , también representado gráficamente. Se incluyen sistemas de coordenadas locales asociados a cada eslabón, lo que permite describir el movimiento relativo y facilita la formulación del modelo cinemático y dinámico. Adicionalmente, la Figura 2 incorpora vectores de referencia que indican las direcciones de las longitudes de los eslabones, así como líneas punteadas que representan las distancias a los centros de masa.

La aceleración gravitacional g se muestra mediante una flecha vertical, señalando su dirección y su influencia en el sistema dinámico. En la parte derecha se incluye un recuadro de parámetros donde se resumen las variables principales del modelo, tales como longitudes de los eslabones, posiciones de los centros de masa, masas y ángulos articulares. Finalmente, en la parte inferior se presentan símbolos explicativos que identifican los elementos clave del diagrama, como centros de masa, sistemas de coordenadas y variables geométricas.

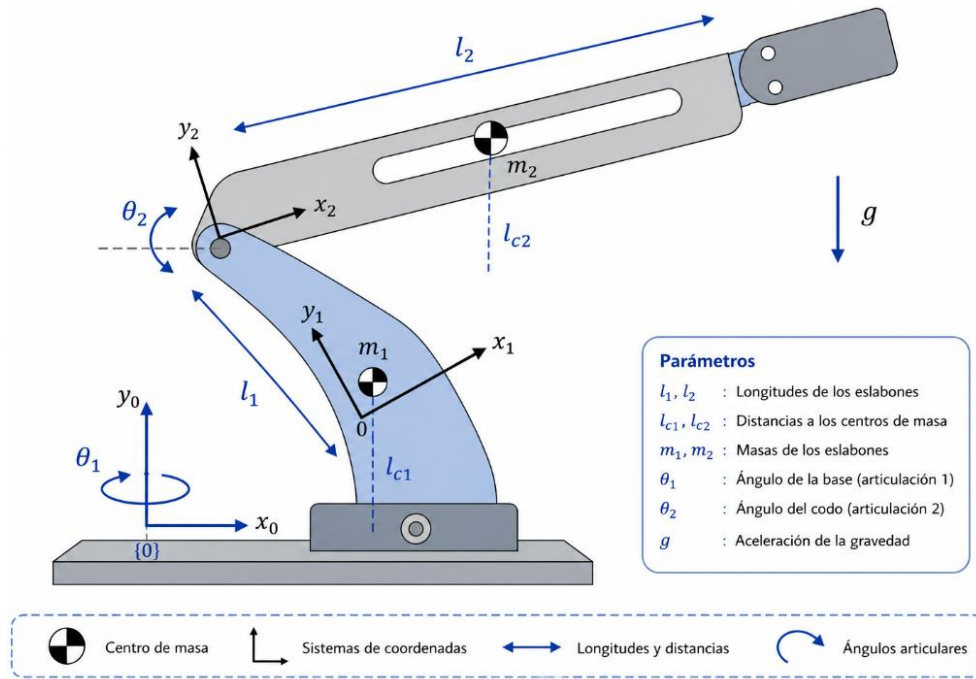


Figura 2. Representación esquemática de un manipulador robótico planar de dos grados de libertad (2-GDL), donde se muestran los sistemas de coordenadas global y locales, las longitudes de los eslabones l_1, l_2 , las posiciones de los centros de masa l_{c1}, l_{c2} , las masas m_1, m_2 , los ángulos articulares θ_1, θ_2 y la dirección de la aceleración gravitacional g . Fuente: Elaboración propia.

La energía cinética del primer eslabón se expresa como:

$$V_1 = m_1 g l_{c1} \sin \theta_1. \quad (14)$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2. \quad (11)$$

Mientras que la energía potencial del segundo eslabón está dada por:

La energía cinética del segundo eslabón se obtiene mediante:

$$V_2 = m_2 g (l_1 \sin \theta_1 + l_{c2} \sin(\theta_1 + \theta_2)). \quad (15)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (v_2^T v_2) + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2. \quad (12)$$

La energía potencial total se define entonces mediante:

$$V = V_1 + V_2. \quad (16)$$

Por lo tanto, la energía cinética total del sistema es:

$$T = T_1 + T_2. \quad (13)$$

La inclusión de la energía potencial es fundamental para considerar el efecto de la gravedad sobre la dinámica del manipulador.

Estas expresiones permiten incorporar los efectos inerciales asociados al movimiento rotacional y traslacional de cada eslabón.

Energía potencial gravitacional

La energía potencial está asociada a la posición vertical de los centros de masa bajo la acción del campo gravitacional. La energía potencial del primer eslabón se expresa como:

Formulación de Euler-Lagrange

El desarrollo dinámico del manipulador se realiza mediante la formulación de Euler-Lagrange, la cual permite obtener las ecuaciones diferenciales no lineales del sistema a partir de principios energéticos.

La función lagrangiana se define como:

$$L = T - V. \quad (17)$$

Aplicando la ecuación de Euler–Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, \quad (18)$$

se obtiene la ecuación dinámica general del manipulador:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) = \tau. \quad (19)$$

La matriz de inercia está dada por:

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

donde:

$$M_{11} = I_1 + I_2 + m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos \theta_2), \quad (21)$$

$$M_{12} = I_2 + m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos \theta_2), \quad (22)$$

$$M_{22} = I_2 + m_2 l_{c2}^2. \quad (23)$$

El vector centrífugo y de Coriolis se expresa como:

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_2 (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) \\ m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Finalmente, el vector gravitacional está dado por:

$$G(q) = \begin{bmatrix} (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \cos \theta_1 + m_2 g l_{c2} \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ m_2 g l_{c2} \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Estas ecuaciones describen completamente el comportamiento dinámico no lineal del manipulador robótico y permiten analizar los requerimientos de torque, aceleraciones articulares y efectos dinámicos asociados al movimiento coordinado de los eslabones. En el Anexo se tiene el programa que resuelve los efectos dinámicos.

Simulación en MATLAB Simscape Multibody

Una vez desarrollado el modelo matemático, se implementó una simulación tridimensional del manipulador robótico utilizando MATLAB Simscape Multibody. Este entorno permite integrar cuerpos rígidos,

articulaciones rotacionales, restricciones mecánicas, sensores y actuadores dentro de una plataforma visual de simulación multicuerpo.

El modelo desarrollado en Simscape Multibody incluyó:

- Eslabones rígidos,
- Articulaciones revolutas,
- Propiedades inerciales,
- Gravedad,
- Entradas de torque,
- Sensores articulares,
- Trayectorias angulares programadas.

La geometría del manipulador se construyó a partir de un modelo CAD simplificado con el propósito de representar adecuadamente el comportamiento físico del sistema durante el movimiento. Asimismo, se definieron condiciones iniciales y trayectorias articulares para evaluar la respuesta dinámica del manipulador durante diferentes tareas de posicionamiento.

Durante la simulación se analizaron:

- desplazamientos angulares,
- velocidades articulares,
- aceleraciones,
- torques requeridos,
- movimiento del efector final,
- comportamiento dinámico global.

La simulación numérica fue resuelta mediante los algoritmos de integración de MATLAB/Simulink, permitiendo obtener resultados temporales continuos del sistema dinámico.

Resultados y discusión

Los resultados obtenidos mostraron que el modelo dinámico desarrollado representa adecuadamente el comportamiento físico del manipulador robótico de 2-GDL. Las trayectorias generadas durante la simulación mostraron movimientos suaves y coordinados entre ambos eslabones, permitiendo posicionar el efector final dentro del espacio de trabajo definido. Se observó que las velocidades articulares evolucionan de forma continua durante el movimiento, evitando cambios bruscos en la dinámica del sistema. Asimismo, los torques calculados en cada articulación presentaron un comportamiento coherente con los efectos gravitacionales e inerciales considerados en el modelo matemático. En Figura 3, presenta el resultado del seguimiento de trayectoria en el espacio cartesiano (x, y) de un manipulador robótico planar de dos grados de libertad (2-GDL), utilizando una

estrategia de control dinámico basada en el método de torque computado (Computed Torque Control, CTC). En la gráfica se comparan dos trayectorias: la trayectoria deseada, representada mediante una línea discontinua, y la trayectoria real del efector final, mostrada como una línea continua. La trayectoria deseada corresponde a una circunferencia de radio constante centrada en el origen, lo cual constituye una referencia típica para evaluar el desempeño de sistemas robóticos en tareas de seguimiento continuo. Durante la mayor parte del movimiento, se observa que la trayectoria real coincide de manera cercana con la trayectoria deseada, lo que indica que el controlador implementado es capaz de compensar adecuadamente los efectos dinámicos del sistema, tales como la inercia, la gravedad y los términos no lineales asociados a las fuerzas centrífugas y de Coriolis.

Sin embargo, en una región específica del espacio de trabajo, particularmente en el sector derecho de la circunferencia, se aprecia una desviación significativa de la trayectoria real respecto a la deseada. Este comportamiento puede atribuirse a la proximidad de una configuración singular del manipulador, donde la matriz

Jacobiana pierde rango y, en consecuencia, se reduce la capacidad del sistema para generar movimientos en ciertas direcciones del espacio cartesiano. Como resultado, el controlador pierde efectividad localmente, produciendo un error de seguimiento que se manifiesta como una salida de la trayectoria. Adicionalmente, esta desviación puede estar influenciada por la falta de regularización en el cálculo del Jacobiano o por la ausencia de técnicas de control robusto que mitiguen los efectos de dichas singularidades. A pesar de este fenómeno, el sistema recupera parcialmente su comportamiento, aunque no logra reincorporarse completamente a la trayectoria deseada dentro del intervalo de tiempo analizado. En términos generales, la figura demuestra que el modelo dinámico y el esquema de control implementado son adecuados para el seguimiento de trayectorias en condiciones regulares de operación, pero también pone en evidencia la necesidad de incorporar estrategias adicionales, como el uso de Jacobianos amortiguados o métodos de evasión de singularidades, para garantizar un desempeño uniforme en todo el espacio de trabajo.

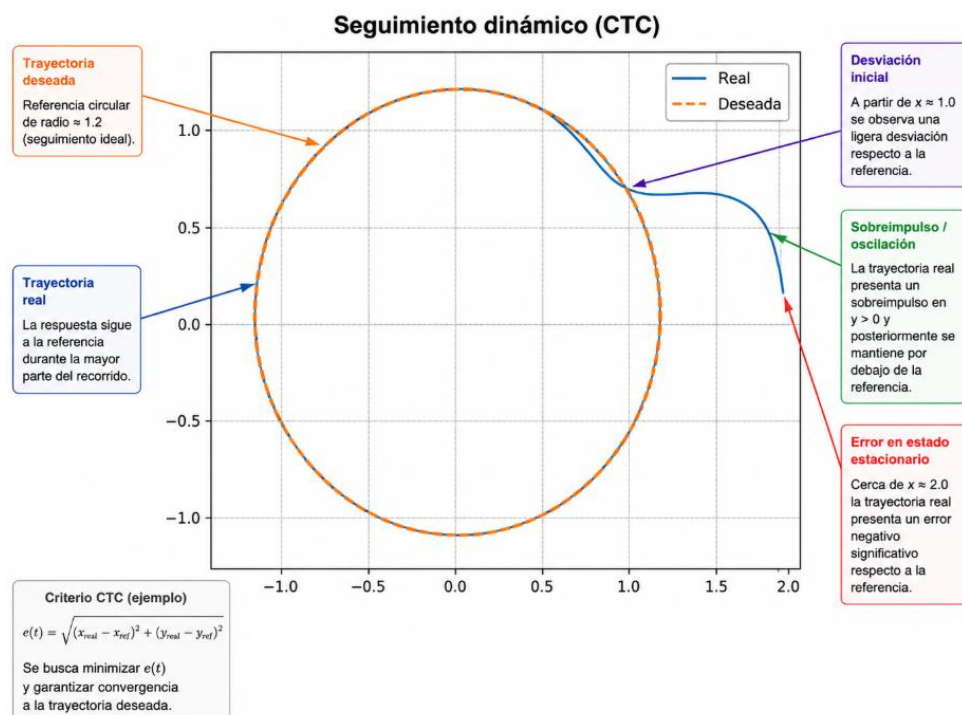


Figura 3. Seguimiento de trayectoria en el espacio cartesiano (x, y) de un manipulador robótico planar de dos grados de libertad (2-GDL) utilizando control dinámico tipo torque computado (CTC). Se compara la trayectoria deseada (línea discontinua) con la trayectoria real (línea continua), observándose un buen desempeño general con desviaciones localizadas asociadas a configuraciones cercanas a singularidades del manipulador. Fuente: Elaboración propia.

Los resultados también evidenciaron la presencia de acoplamiento dinámico entre eslabones, especialmente

durante movimientos rápidos o cambios de dirección. Este comportamiento confirma la naturaleza no lineal del

sistema robótico y la necesidad de emplear modelos dinámicos completos para describir correctamente su respuesta mecánica. El análisis de la matriz de inercia mostró que los términos dinámicos dependen directamente de la configuración angular del manipulador. De igual forma, los términos centrífugos y de Coriolis incrementaron su influencia conforme aumentaron las velocidades articulares.

La plataforma MATLAB Simscape Multibody permitió visualizar de manera realista:

- movimiento de los eslabones,
- trayectorias del efector final,
- interacción dinámica multicuerpo,
- comportamiento temporal del sistema.

Además, el entorno de simulación demostró ser una herramienta eficiente para validar modelos analíticos y analizar sistemas robóticos antes de su implementación experimental.

Conclusiones

En este trabajo se desarrolló el modelado dinámico completo de un manipulador robótico de dos grados de libertad utilizando el método de Euler-Lagrange y su implementación numérica en MATLAB Simscape Multibody. El análisis cinemático permitió determinar la posición y movimiento del efector final mediante matrices de transformación homogénea y la matriz Jacobiana. Posteriormente, el modelo dinámico incorporó efectos inerciales, gravitacionales y términos no lineales asociados al movimiento del sistema multicuerpo. Las simulaciones realizadas mostraron que el manipulador presenta movimientos suaves, estables y físicamente consistentes bajo diferentes condiciones de operación. Asimismo, se comprobó que la plataforma Simscape Multibody constituye una herramienta poderosa para el análisis dinámico y la validación de modelos robóticos.

Finalmente, el trabajo desarrollado establece una base sólida para futuras investigaciones relacionadas con:

- Control PID,
- Control adaptativo,
- Planificación de trayectorias,
- Optimización energética,
- Robótica inteligente,
- Gemelos digitales,
- Integración con algoritmos de inteligencia artificial.

Anexo A:

```
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.animation import FuncAnimation

# -----
# Parámetros
# -----
m1, m2 = 1.0, 1.0
l1, l2 = 1.0, 1.0
lc1, lc2 = 0.5, 0.5
I1, I2 = 0.1, 0.1
g = 9.81

# -----
# Trayectoria deseada (círculo)
# -----
def desired(t):
    r = 1.2
    xd = r*np.cos(t)
    yd = r*np.sin(t)

    dxd = -r*np.sin(t)
    dyd = r*np.cos(t)

    return np.array([xd, yd]), np.array([dxd, dyd])

# -----
# Cinemática
# -----
def forward(theta1, theta2):
    x = l1*np.cos(theta1) + l2*np.cos(theta1+theta2)
    y = l1*np.sin(theta1) + l2*np.sin(theta1+theta2)
    return np.array([x, y])

# -----
# Jacobiano
# -----
def jacobian(theta1, theta2):
    return np.array([
        [-l1*np.sin(theta1)-l2*np.sin(theta1+theta2), -
        l2*np.sin(theta1+theta2)],
        [
        l1*np.cos(theta1)+l2*np.cos(theta1+theta2), l2*np.cos(theta1+theta2)]
    ])

# -----
# Dinámica + Control (CTC)
# -----
def dynamics(t, y):
    theta1, theta2, dtheta1, dtheta2 = y
    dq = np.array([dtheta1, dtheta2])

    # ----- MATRIZ M -----
    M11 = I1 + I2 + m1*lc1**2 + m2*(l1**2 + lc2**2 +
    2*l1*lc2*np.cos(theta2))
    M12 = I2 + m2*(lc2**2 + l1*lc2*np.cos(theta2))
```



```

M = np.array([[M11, M12],
               [M12, I2 + m2*lc2**2]])

# ----- CORIOLIS -----
h = -m2*l1*lc2*np.sin(theta2)
C = np.array([
    h*(2*dtheta1*dtheta2 + dtheta2**2),
    -h*(dtheta1**2)
])

# ----- GRAVEDAD -----
G = np.array([
    (m1*lc1 + m2*l1)*g*np.cos(theta1) +
    m2*g*lc2*np.cos(theta1+theta2),
    m2*g*lc2*np.cos(theta1+theta2)
])

# ----- CONTROL CARTESIANO -----
x = forward(theta1, theta2)
J = jacobian(theta1, theta2)
dx = J @ dq

xd, dxd = desired(t)

e = xd - x
de = dxd - dx

Kp = 150*np.eye(2)
Kd = 30*np.eye(2)

F = Kp @ e + Kd @ de

# CONTROL DINÁMICO CORRECTO
tau = M @ (J.T @ F) + C + G

# ----- DINÁMICA -----
ddq = np.linalg.inv(M) @ (tau - C - G)

return [dtheta1, dtheta2, ddq[0], ddq[1]]
# -----
# Simulación
# -----
y0 = [0.1, 0.1, 0, 0]
t_eval = np.linspace(0, 10, 300)

sol = solve_ivp(dynamics, (0, 10), y0, t_eval=t_eval)

theta1 = sol.y[0]
theta2 = sol.y[1]

# -----
# Cinemática
# -----
x1 = l1*np.cos(theta1)
y1 = l1*np.sin(theta1)

x2 = x1 + l2*np.cos(theta1+theta2)
y2 = y1 + l2*np.sin(theta1+theta2)

# trayectoria deseada
xd = 1.2*np.cos(sol.t)
yd = 1.2*np.sin(sol.t)

# -----
# Gráfica
# -----
plt.figure()
plt.plot(x2, y2, label="Real")
plt.plot(xd, yd, '--', label="Deseada")
plt.legend()
plt.axis("equal")
plt.grid()
plt.title("Seguimiento dinámico (CTC)")
plt.show()

# -----
# Animación
# -----
fig, ax = plt.subplots()
ax.set_xlim(-2, 2)
ax.set_ylim(-2, 2)

line, = ax.plot([], [], 'o-', lw=3)
path, = ax.plot([], [], 'r--')

def update(i):
    line.set_data([0, x1[i], x2[i]], [0, y1[i], y2[i]])
    path.set_data(x2[:i], y2[:i])
    return line, path

ani = FuncAnimation(fig, update, frames=len(sol.t),
                    interval=30)

plt.title("Manipulador con control dinámico")
plt.show()

```

Referencias

- Craig, J. J., (2005) *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, Pearson, 2005.
- Goldstein, H., (2002). *Classical Mechanics*, Addison-Wesley.
- Kelly, R., Santibáñez, V. and Loría, A., (2005). *Control of Robot Manipulators in Joint Space*, Springer.
- MATLAB Simscape Multibody
- Patel, P. and George, K., (2017). "Dynamic analysis of planar robotic manipulators considering nonlinear effects," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 120, pp. 1–15.
- Spong, M. W., Hutchinson, S. and Vidyasagar, M., (2006). *Robot Modeling and Control*, Wiley.
- Siciliano, B. and Khatib, O., (2016). *Springer Handbook of Robotics*, Springer.
- Zhang, Y., Wang, H. and Liu, X., (2018). "Dynamic simulation of robotic manipulators using MATLAB/Simulink," *International Journal of Robotics Research*, vol. 35, no. 4, pp. 455–468.