

Determinación de la longitud de trayectoria de herramienta CNC mediante formulación diferencial de longitud de arco para la optimización del tiempo de mecanizado y consumo energético

Determination of CNC tool path length using a differential arc length formulation to optimize machining time and energy consumption

Carlos A. Venta Gutiérrez ^a, Josephin G. Santillán Zavala ^b, Arturo Cruz Avilés ^c, Jorge Zuno Silva ^d, Martín Ortiz Domínguez ^e

Abstract:

The optimization of tool paths in Computer Numerical Control (CNC) machines is one of the most important aspects of modern manufacturing processes due to its direct influence on productivity, machining time, dimensional accuracy, and energy consumption. Most CAM systems generate complex trajectories using parametric curves, splines, and geometric approximations, making the accurate determination of the actual traveled distance essential for efficient process planning. In this work, a mathematical model based on arc-length theory is developed to determine the real trajectory traveled by a CNC cutting tool during the machining of curved profiles. The formulation begins with the geometric derivation of the differential arc-length element using differential and integral calculus. Subsequently, a general formulation for Cartesian and parametric trajectories commonly employed in CAM systems is established. A parabolic trajectory representative of mold cavities and complex surfaces is analyzed. Based on the calculated arc length, models for machining time, effective feed rate, and energy consumption are developed. Results reveal that the actual traveled distance may significantly differ from projected distances traditionally employed in tool-path planning, leading to noticeable variations in machining time and energy requirements. The proposed methodology represents a useful tool for advanced manufacturing optimization.

Keywords:

Arc length, CNC machining, CAM systems, tool-path optimization, machining time, energy consumption

Resumen:

La optimización de trayectorias en máquinas de Control Numérico Computarizado (CNC) constituye uno de los aspectos más importantes en los procesos modernos de manufactura debido a su influencia directa sobre la productividad, el tiempo de mecanizado, la precisión dimensional y el consumo energético. La mayoría de los sistemas CAM generan trayectorias complejas mediante curvas paramétricas, splines y aproximaciones geométricas, por lo que la determinación precisa de la distancia recorrida por la herramienta resulta fundamental para la planificación eficiente de las operaciones de mecanizado. En este trabajo se desarrolla un modelo matemático basado en la teoría de longitud de arco para determinar la trayectoria real recorrida por una herramienta CNC durante el mecanizado de perfiles curvos. La formulación se inicia con la deducción geométrica del elemento diferencial de longitud utilizando cálculo diferencial e integral. Posteriormente se desarrolla una formulación general para trayectorias cartesianas y paramétricas

^a Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo | Escuela Superior de Ciudad Sahagún | Ciudad Sahagún-Hidalgo | México, <https://orcid.org/0009-0004-6851-251X>, Email: ve407003@uaeh.edu.mx

^b Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo | Escuela Superior de Ciudad Sahagún | Ciudad Sahagún-Hidalgo | México, <https://orcid.org/0009-0006-0587-8754>, Email: sa428628@uaeh.edu.mx

^c Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo | Escuela Superior de Ciudad Sahagún | Ciudad Sahagún-Hidalgo | México, <https://orcid.org/0000-0003-0455-1646>, Email: arturo_cruz8085@uaeh.edu.mx

^d Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo | Escuela Superior de Ciudad Sahagún | Ciudad Sahagún-Hidalgo | México, <https://orcid.org/0000-0002-1997-5399>, Email: jorge_zuno@uaeh.edu.mx

^e Autor de Correspondencia, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo | Escuela Superior de Ciudad Sahagún | Ciudad Sahagún-Hidalgo | México, <https://orcid.org/0000-0003-4475-9804>, Email: martin_ortiz@uaeh.edu.mx

empleadas en sistemas CAM modernos. Se analiza una trayectoria parabólica representativa de perfiles utilizados en moldes, cavidades y superficies complejas. A partir de la longitud de arco se desarrollan modelos para estimar el tiempo de mecanizado, la velocidad efectiva de avance y la energía consumida durante la operación. Los resultados muestran que la distancia real recorrida puede diferir significativamente de las distancias proyectadas convencionalmente utilizadas en la programación de trayectorias, generando variaciones importantes en la estimación de tiempos de producción y consumo energético. La metodología propuesta constituye una herramienta útil para la optimización de procesos de manufactura avanzada.

Palabras Clave:

Longitud de arco, CNC, CAM, optimización de trayectorias, mecanizado, energía de corte, manufactura avanzada

Introducción

La manufactura asistida por computadora ha experimentado una evolución significativa durante las últimas décadas impulsada por el desarrollo de tecnologías CAD/CAM, sistemas CNC de alta precisión y algoritmos avanzados de interpolación geométrica (Groover, 2020). Actualmente, los procesos de mecanizado son capaces de producir componentes con tolerancias micrométricas y geometrías altamente complejas requeridas en sectores industriales estratégicos como el aeroespacial, biomédico, automotriz y energético (Altinas, 2012).

La Figura 1, muestra un centro de mecanizado vertical CNC HAAS VF-2SSYT, ampliamente utilizado en operaciones de fresado, barrenado, ranurado y manufactura de geometrías complejas. El equipo está constituido por una estructura rígida que integra los sistemas de movimiento en los ejes X, Y y Z, permitiendo el posicionamiento preciso de la herramienta respecto a la pieza de trabajo. En la parte central se observa la zona de mecanizado, donde se encuentra la mesa de trabajo equipada con un dispositivo de sujeción (morsa)

destinado a fijar la pieza durante la operación de corte. Sobre esta zona se localiza el husillo principal, encargado de transmitir el movimiento rotacional a la herramienta de corte. En el costado derecho se encuentra el panel de control CNC, desde el cual el operador programa y supervisa las trayectorias de mecanizado, velocidades de corte, avances y demás parámetros operativos. Este sistema interpreta los códigos de programación (G-code y M-code) para coordinar los movimientos de la máquina durante la fabricación de la pieza. En el lado izquierdo se aprecia el área destinada al almacenamiento y cambio de herramientas, permitiendo la ejecución automática de múltiples operaciones sin intervención manual. Asimismo, la máquina incorpora sistemas auxiliares de refrigeración y evacuación de viruta para mejorar la calidad superficial y prolongar la vida útil de las herramientas. Desde el punto de vista de este estudio, el centro de mecanizado representa el sistema físico encargado de ejecutar la trayectoria parabólica propuesta. La herramienta sigue la ruta definida matemáticamente mediante la ecuación $y = ax^2$, recorriendo una distancia real determinada a través de la formulación de longitud de arco, parámetro fundamental para la estimación del tiempo de mecanizado y del consumo energético del proceso.



Figura 1. Centro de mecanizado vertical CNC utilizado para la fabricación de perfiles y cavidades complejas mediante operaciones de fresado. El sistema ejecuta trayectorias programadas por control numérico computarizado, permitiendo reproducir con precisión la geometría definida matemáticamente y evaluar parámetros como longitud de trayectoria, tiempo de mecanizado y consumo energético. Fuente: Elaboración propia.

Uno de los factores más importantes dentro de la manufactura moderna es la correcta definición de las trayectorias de herramienta. La geometría de la trayectoria influye directamente sobre la calidad superficial, precisión dimensional, tiempo de mecanizado y desgaste de la herramienta (Kalpakjian y Schmid, 2018). Por esta razón, la optimización de trayectorias constituye una línea de investigación activa en manufactura avanzada (Davim, 2017). En la mayoría de los sistemas CAM modernos, las trayectorias son generadas mediante interpolaciones lineales, circulares, splines cúbicas y curvas NURBS (Piegl y Tiller, 1997). Aunque estas técnicas permiten describir superficies complejas con gran precisión, la longitud real recorrida por la herramienta frecuentemente es aproximada mediante discretizaciones geométricas, lo cual puede generar diferencias significativas entre la distancia proyectada y la distancia efectivamente recorrida (Hoschek y Lasser, 1993). Desde un punto de vista matemático, la distancia real recorrida por un objeto que sigue una trayectoria curva está definida mediante el concepto de longitud de arco, una de las aplicaciones más importantes del cálculo diferencial e integral (Kreyszig, 2011). Este concepto fue desarrollado inicialmente por Euler y posteriormente ampliado dentro del marco de la geometría diferencial por Gauss y Riemann (do Carmo, 2016). La longitud de arco encuentra aplicaciones en numerosas áreas de la ingeniería, incluyendo robótica (Craig, 2018),

biomecánica (Fung, 1993), diseño de mecanismos (Norton, 2020), dinámica de vehículos (Gillespie, 1992), navegación autónoma (Thrun et al., 2005) y manufactura avanzada (Ferreira, 2019). En particular, dentro de los sistemas CNC, la longitud de arco permite estimar con precisión el recorrido real de la herramienta y establecer relaciones directas con variables operativas como velocidad de avance, tiempo de mecanizado y consumo energético (Bedworth y Henderson, 1991). Diversos investigadores han demostrado que la parametrización basada en longitud de arco mejora significativamente la estabilidad de los algoritmos de interpolación y permite mantener velocidades constantes durante el mecanizado de superficies complejas (Erkorkmaz y Altintas, 2001; Beudaert et al., 2012). Asimismo, estudios recientes indican que la optimización de trayectorias puede reducir el consumo energético entre un 10 % y un 30 % dependiendo de la complejidad geométrica del componente manufacturado (Denkena, 2015). El objetivo del presente trabajo consiste en desarrollar una formulación matemática basada en longitud de arco para determinar la trayectoria real recorrida por una herramienta CNC durante el mecanizado de perfiles curvos y evaluar su influencia sobre el tiempo de mecanizado y el consumo energético.

Fundamentos Teóricos de la Longitud de Arco

y

Elemento diferencial de longitud

Considérese una curva continua definida por:

$$Q(x + dx, y + dy), \quad (3)$$

$$y = f(x), \quad (1)$$

La distancia diferencial entre ambos puntos puede obtenerse mediante el teorema de Pitágoras (ver Figura 2):

Sean dos puntos infinitamente cercanos:

$$P(x, y), \quad (2) \quad (ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2, \quad (4)$$

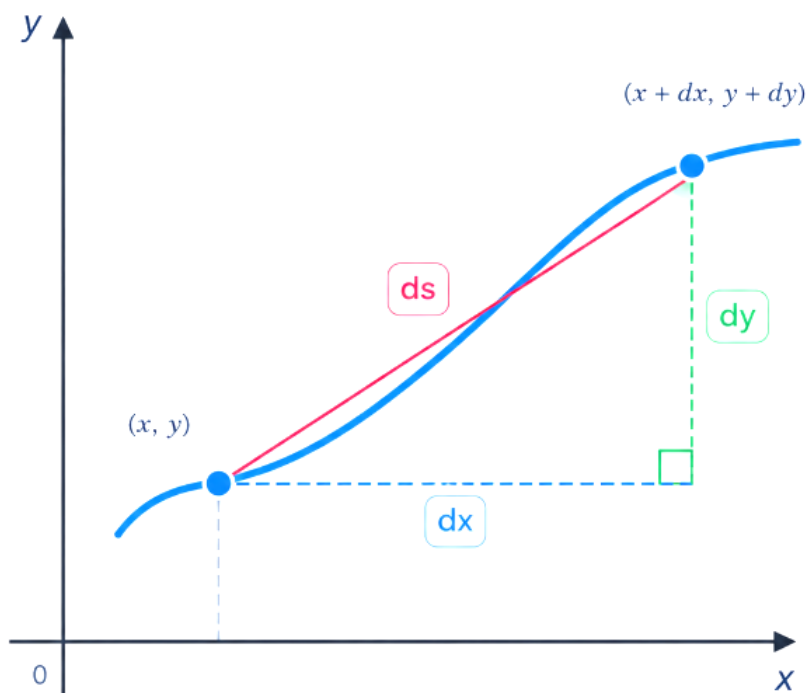


Figura 2. El elemento diferencial de arco (ds) representa un segmento infinitesimal de longitud sobre una curva.

El elemento diferencial de arco (ds) representa un segmento infinitesimal de longitud sobre una curva. Se utiliza para aproximar la distancia real entre dos puntos muy cercanos de una trayectoria curva y constituye la base para el cálculo de la longitud total de una curva mediante integración. Despejando:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}, \quad (5)$$

Factorizando dx :

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx, \quad (6)$$

La longitud total recorrida sobre la curva se obtiene integrando:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx, \quad (7)$$

Formulación paramétrica

Las trayectorias CNC suelen representarse mediante funciones paramétricas:

$$x = x(t), \quad (8)$$

$$y = y(t), \quad (9)$$

Por tanto:

$$dx = \frac{dx}{dt} dt, \quad (10)$$

$$dy = \frac{dy}{dt} dt. \quad (11)$$

Sustituyendo en la expresión diferencial:

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad (12)$$

La longitud total queda:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, \quad (13)$$

Velocidad tangencial

La velocidad instantánea de la herramienta se define como:

$$v = \frac{ds}{dt}. \quad (14)$$

Por tanto:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}, \quad (15)$$

Esta ecuación representa la magnitud del vector velocidad de la herramienta durante el proceso de mecanizado.

Curvatura

La curvatura local de una trayectoria paramétrica está definida por:

$$\kappa = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \quad (16)$$

donde:

- κ es la curvatura.
- $x'y'$ representan derivadas primeras.
- $x''y''$ representan derivadas segundas.

La curvatura constituye un parámetro importante debido a que regiones altamente curvas generan mayores aceleraciones de la herramienta y mayores demandas energéticas durante la interpolación (Farouki, 2008).

Formulación Matemática de Trayectorias CNC

Trayectoria parabólica

Una herramienta de corte CNC, en la Figura 3, muestra una fresa de extremo helicoidal (end mill) utilizada en operaciones de mecanizado por fresado dentro de máquinas CNC. La herramienta está fabricada generalmente de carburo cementado (carburo de tungsteno) o acero rápido (HSS), materiales que proporcionan alta dureza, resistencia al desgaste y estabilidad térmica durante el corte. La parte superior corresponde al vástago cilíndrico, el cual permite la sujeción de la herramienta en el portaherramientas o husillo de la máquina CNC. La parte inferior constituye la zona activa de corte, formada por varias estrías helicoidales (flutes) que generan los filos cortantes encargados de remover material de la pieza de trabajo.

Las hélices cumplen una doble función: facilitar la evacuación de la viruta producida durante el mecanizado y mejorar las condiciones de corte al reducir las fuerzas instantáneas sobre cada filo. Asimismo, la geometría helicoidal contribuye a disminuir vibraciones y mejorar la calidad superficial obtenida en la pieza mecanizada. La punta de la herramienta presenta una configuración adecuada para operaciones de fresado frontal y periférico, permitiendo realizar ranurados, perfilados, cavidades, contorneados y mecanizado de superficies tridimensionales complejas.



Figura 3. Fresa de extremo helicoidal utilizada en operaciones de fresado CNC. La herramienta está compuesta por un vástago cilíndrico y una zona activa de

corte con filos helicoidales encargados de remover material durante el mecanizado de perfiles y cavidades complejas. Su movimiento a lo largo de la trayectoria programada determina la geometría final de la pieza manufacturada.

La Figura 4, presenta la representación bidimensional de un canal parabólico descrito mediante la ecuación:

$$y = ax^2 \quad (17)$$

Desde $x = 0$ hasta $x = L$. Se desea determinar la longitud real de la trayectoria recorrida por la herramienta (longitud de arco), el tiempo de mecanizado y el consumo energético.

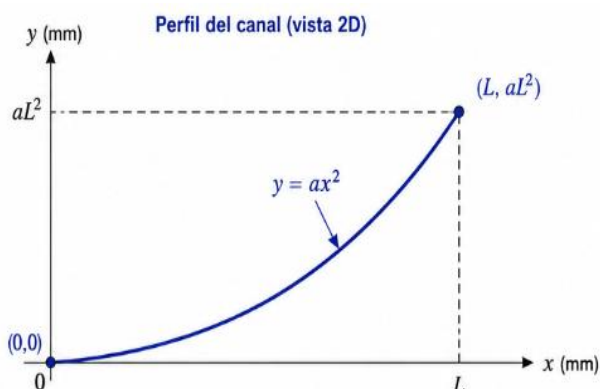


Figura 4. Perfil parabólico bidimensional definido por la ecuación $y = ax^2$, utilizado para representar la trayectoria de mecanizado de una herramienta CNC. El perfil se desarrolla desde el origen $(0, 0)$ hasta el punto (L, aL^2) , donde L corresponde a la longitud proyectada y a controla la curvatura de la trayectoria.

El parámetro geométrico a fue seleccionado igual a 0.01 mm^{-1} , lo que corresponde a una cavidad parabólica con una profundidad máxima de 100 mm para una longitud proyectada de 100 mm. Este valor fue elegido por ser representativo de superficies curvas empleadas en moldes, troqueles y cavidades mecanizadas mediante centros de mecanizado CNC.

$$a = 0.01 \quad (18)$$

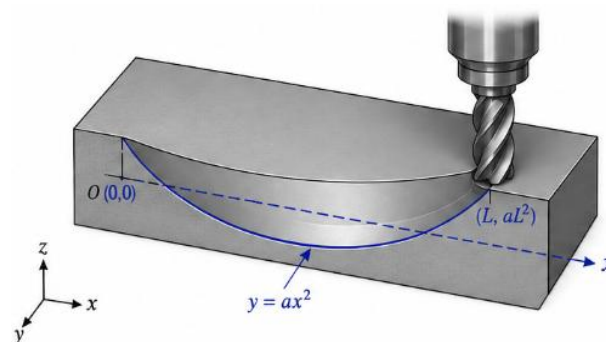


Figura 5. Representación esquemática de una operación de mecanizado CNC para la generación de una cavidad parabólica definida por la ecuación $y = ax^2$. La herramienta de corte sigue una trayectoria curva desde el punto $(0, 0)$ hasta el punto (L, aL^2) , donde L representa la longitud proyectada del perfil. La longitud real recorrida por la herramienta se determina mediante la formulación de longitud de arco.

La pendiente es:

$$\frac{dy}{dx} = 2ax \quad (19)$$

Sustituyendo:

$$\frac{dy}{dx} = 0.02x \quad (20)$$

La longitud de arco queda:

$$L = \int_0^{100} \sqrt{1 + 0.0004x^2} dx \quad (21)$$

La solución exacta es:

$$L = \frac{x}{2} \sqrt{1 + 0.0004x^2} + 25 \sinh^{-1}(0.02x) \Big|_0^{100} \quad (22)$$

Evaluando:

$$L = 147.89 \text{ mm} \quad (23)$$

Metodología Numérica

Con el propósito de evaluar la influencia de la geometría de la trayectoria sobre el tiempo de mecanizado y el consumo energético, se desarrolló un procedimiento numérico basado en la formulación de longitud de arco

presentada anteriormente. La metodología se implementó utilizando algoritmos de integración numérica debido a que, en aplicaciones reales de manufactura, las trayectorias generadas por sistemas CAM generalmente están descritas mediante curvas spline, NURBS o ecuaciones paramétricas cuya integración analítica resulta compleja o imposible de obtener en forma cerrada [20]. Se analizaron perfiles parabólicos representativos de cavidades utilizadas en moldes y troqueles industriales. Para ello se consideraron distintos valores del parámetro geométrico α , permitiendo modificar la curvatura de la trayectoria y evaluar su efecto sobre la distancia total recorrida por la herramienta. Los parámetros empleados se presentan en la Tabla 1:

Tabla 1. Parámetros geométricos y operativos utilizados en la simulación del mecanizado CNC para evaluar la influencia de la curvatura de la trayectoria sobre la longitud de arco, el tiempo de mecanizado y el consumo energético. Fuente: Elaboración propia.

Parámetro	Valor
Longitud proyectada	100 mm
Velocidad de avance	600 mm/min
Fuerza de corte	150 N
Velocidad de corte	2 m/s
Potencia de corte	300 W
Curvatura α	0.005–0.020

La energía total consumida durante el proceso se determinó mediante:

$$E = P_c t_m \quad (24)$$

La Ecuación (22), establece la relación entre la energía consumida durante el proceso de mecanizado, la potencia de corte y el tiempo de mecanizado. Esta expresión se fundamenta en los principios básicos de la energía mecánica, donde la energía total corresponde al producto de la potencia suministrada por el sistema y el tiempo durante el cual dicha potencia es aplicada.

En esta ecuación:

- E representa la energía consumida durante la operación de mecanizado (J).
- P_c es la potencia de corte desarrollada por la máquina herramienta (W).
- t_m corresponde al tiempo total de mecanizado (s).

Desde el punto de vista físico, la ecuación indica que la energía requerida para fabricar una pieza depende directamente de la potencia necesaria para remover

material y de la duración del proceso. Por consiguiente, trayectorias más largas o velocidades de avance más bajas incrementan el tiempo de mecanizado y, en consecuencia, aumentan el consumo energético total. En el presente estudio, esta relación permite vincular la longitud de arco de la trayectoria CNC con la energía consumida durante el mecanizado. Dado que el tiempo de mecanizado depende de la distancia real recorrida por la herramienta, cualquier incremento en la curvatura de la trayectoria genera un aumento en la longitud de arco, produciendo tiempos de operación más elevados y mayores requerimientos energéticos. Interpretación ingenieril: La ecuación $E = P_c t_m$ constituye una herramienta fundamental para estimar los costos energéticos asociados a procesos CNC y evaluar estrategias de optimización de trayectorias orientadas a reducir el consumo de energía y mejorar la eficiencia productiva del sistema de manufactura.

De esta forma, la energía queda directamente relacionada con la longitud de arco:

$$E = \frac{P_c L}{V_f}$$

Esta expresión muestra que cualquier incremento en la longitud real recorrida produce un aumento proporcional del tiempo de mecanizado y de la energía consumida.

Por otro lado, la potencia de corte, se expresa como:

$$P_c = F_c V_c \quad (25)$$

La potencia de corte requerida durante una operación de mecanizado y representa la velocidad con la que se realiza trabajo mecánico para remover material de la pieza de trabajo. Esta relación se deriva directamente de los principios fundamentales de la mecánica, donde la potencia se define como el producto entre una fuerza aplicada y la velocidad a la que dicha fuerza actúa.

En esta expresión:

- P_c es la potencia de corte (W).
- F_c es la fuerza de corte principal ejercida durante el mecanizado (N).
- V_c es la velocidad de corte entre la herramienta y la pieza de trabajo (m/s).

Desde el punto de vista físico, la potencia de corte representa la energía requerida por unidad de tiempo para vencer la resistencia del material y producir la formación de viruta. A medida que aumenta la fuerza de corte o la velocidad de mecanizado, la potencia necesaria también se incrementa proporcionalmente. En

operaciones de fresado CNC, la fuerza de corte depende de diversos factores, entre ellos las propiedades mecánicas del material, la geometría de la herramienta, la profundidad de corte y las condiciones de avance. Por su parte, la velocidad de corte está asociada a la velocidad de rotación del husillo y al diámetro de la herramienta.

El tiempo de mecanizado se representa como:

$$t_m = \frac{L}{V_f} \quad (26)$$

La Ecuación (24), permite determinar el tiempo de mecanizado requerido para que una herramienta CNC recorra una trayectoria determinada durante una operación de manufactura. Esta expresión se deriva de la relación fundamental entre distancia, velocidad y tiempo utilizada en cinemática.

En esta ecuación:

- t_m es el tiempo de mecanizado (s o min).
- L es la longitud real de la trayectoria recorrida por la herramienta (mm).
- V_f es la velocidad de avance de la herramienta (mm/min).

Desde el punto de vista físico, la ecuación establece que el tiempo necesario para completar una operación de mecanizado es directamente proporcional a la distancia recorrida e inversamente proporcional a la velocidad de avance. Por consiguiente, trayectorias más largas producen mayores tiempos de operación, mientras que velocidades de avance más elevadas permiten reducir la duración del proceso. En el contexto de este trabajo, la longitud L no corresponde a una distancia proyectada sobre un eje, sino a la longitud real de arco de la trayectoria parabólica seguida por la herramienta. Esto resulta particularmente importante en operaciones de mecanizado de perfiles curvos, donde la distancia efectiva recorrida puede ser considerablemente superior a la longitud proyectada.

Resultados y Discusión

Influencia de la curvatura sobre la longitud de trayectoria

Los resultados obtenidos para diferentes valores del parámetro de curvatura se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2. Influencia de la curvatura sobre la longitud de arco. Fuente: Elaboración propia.

a	Longitud de arco (mm)
0.005	123.5
0.010	147.9
0.015	181.4
0.020	220.8

Los resultados muestran que la longitud de trayectoria aumenta significativamente conforme se incrementa la curvatura del perfil. Para el intervalo analizado, el incremento alcanza aproximadamente un 79 % respecto a la trayectoria menos curva.

Este comportamiento es consistente con la teoría de geometría diferencial, ya que trayectorias con mayores valores de curvatura presentan mayores pendientes locales y, por tanto, mayores contribuciones al término:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

que aparece en la formulación de longitud de arco (Kreyszig, 2011).

Influencia sobre el tiempo de mecanizado

A partir de la longitud de trayectoria calculada, se determinó el tiempo requerido para completar cada operación (ver Tabla 3).

Tabla 3. Tiempo de mecanizado.

a	Longitud (mm)	Tiempo (s)
0.005	123.5	12.35
0.010	147.9	14.79
0.015	181.4	18.14
0.020	220.8	22.08

Los resultados muestran que el tiempo de mecanizado presenta una dependencia prácticamente lineal respecto a la longitud de arco. Este resultado tiene implicaciones importantes para la manufactura industrial, ya que una subestimación de la longitud real puede generar errores significativos en la programación de producción y en la estimación de costos operativos (Ozturk y Lazoglu, 2009).

Consumo energético

La energía consumida durante el mecanizado se calculó utilizando una potencia constante de corte (ver Tabla 4).

Tabla 4. Energía consumida. Fuente: Elaboración propia.

a	Energía (J)
0.005	3705

0.010	4437
0.015	5442
0.020	6624

Los resultados muestran que la energía consumida aumenta conforme aumenta la longitud recorrida por la herramienta. Esta tendencia coincide con los estudios reportados por Altintas (2012), quienes demostraron que trayectorias más largas producen incrementos significativos en los requerimientos energéticos del sistema CNC. Asimismo, la relación obtenida evidencia que la optimización geométrica de trayectorias puede contribuir directamente a la reducción del consumo energético y a la mejora de la sostenibilidad de los procesos de manufactura (Mori et al., 2011).

Comparación entre distancia proyectada y distancia real

Uno de los aspectos más importantes del presente estudio consiste en la diferencia observada entre la distancia proyectada y la distancia real recorrida.

Para el caso:

$$a = 0.02$$

la distancia proyectada es:

$$L_p = 100 \text{ mm}$$

mientras que la longitud de arco obtenida fue:

$$L = 220.8 \text{ mm}$$

Por tanto:

$$\Delta L = 120.8 \text{ mm}$$

lo que representa una diferencia superior al 120 %. Este resultado demuestra que la utilización exclusiva de distancias proyectadas puede conducir a errores significativos en la estimación de tiempos de producción, costos de mecanizado y consumo energético.

Aplicación industrial

La formulación propuesta puede implementarse directamente en sistemas CAM para:

- Optimización de trayectorias de herramientas.
- Estimación precisa de tiempos de mecanizado.
- Evaluación del consumo energético.
- Determinación de costos de producción.
- Planeación de mantenimiento de herramientas.
- Optimización de estrategias de corte.

Además, el modelo puede extenderse fácilmente al análisis de trayectorias tridimensionales utilizadas en

manufactura de cinco ejes, mecanizado de superficies libres y fabricación de componentes aeroespaciales.

Conclusiones

En este trabajo se desarrolló una formulación matemática basada en la teoría de longitud de arco para determinar la distancia real recorrida por herramientas CNC durante operaciones de mecanizado de perfiles curvos. La deducción realizada a partir del cálculo diferencial permitió obtener expresiones generales aplicables a trayectorias cartesianas y paramétricas comúnmente utilizadas en sistemas CAM modernos. Los resultados mostraron que el incremento de la curvatura produce aumentos significativos en la longitud de trayectoria, generando incrementos proporcionales en el tiempo de mecanizado y en el consumo energético. Para las condiciones analizadas, la longitud de arco alcanzó valores hasta 120 % superiores respecto a la distancia proyectada convencionalmente utilizada, demostrando la importancia de considerar la geometría real de la trayectoria durante la planificación de procesos. Asimismo, se observó que la energía consumida depende directamente de la distancia recorrida por la herramienta, lo que convierte a la longitud de arco en una variable relevante para estrategias de manufactura sostenible y optimización energética.

Finalmente, la metodología desarrollada constituye una herramienta útil para la mejora de procesos de manufactura avanzada y puede extenderse al análisis de trayectorias tridimensionales, interpolación NURBS, mecanizado multieje y optimización de procesos CAM.

Referencias

- Altintas, Y., (2012). *Manufacturing Automation*, Cambridge University Press.
- Bedworth, D. D. and Henderson, M. R., (1991). *Computer Integrated Design and Manufacturing*, McGraw-Hill.
- Beudaert, X., Lavernhe, S., and Tournier, C., (2012). "Feedrate interpolation improvement," *Computer-Aided Design*, 2012.
- Craig, J., (2018). *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, Pearson.
- Davim, J., (2017). *Machining of Complex Sculptured Surfaces*, Springer.
- Denkena, B., (2015). "Energy efficient machining," *CIRP Annals*.
- do Carmo, M., (2016). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Dover.

- Erkorkmaz, Y., and Altintas, Y., (2001). "High speed CNC system design," *International Journal of Machine Tools and Manufacture*.
- Farouki, R. T., (2008). *Pythagorean-Hodograph Curves*, Springer.
- Ferreira, P., (2019). *CNC Machining and Advanced Manufacturing*, CRC Press.
- Fung, Y. C., (1993) *Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues*, Springer.
- Gillespie, T., (1992). *Fundamentals of Vehicle Dynamics*, SAE International.
- Groover, M. P., (2020). *Fundamentals of Modern Manufacturing*, Wiley.
- Hoschek, J. and Lasser, D., (1993). *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*, AK Peters.
- Kalpakjian, S. and Schmid, S., (2018). *Manufacturing Engineering and Technology*, Pearson.
- Kreyszig, E., (2011). *Advanced Engineering Mathematics*, Wiley.
- Mori, M., Fujishima, M., Inamasu, Y., and Oda, Y., (2011). "Energy consumption reduction in machine tools," *CIRP Annals*.
- Norton, R., (1992). *Design of Machinery*, McGraw-Hill, 2020.
- Ozturk, E., and Lazoglu, I., (2009). "Feedrate scheduling strategies in CNC machining," *International Journal of Machine Tools and Manufacture*.
- Piegl, L. and Tiller, W., (1997). *The NURBS Book*, Springer.
- Rogers, D. F., (2001). *An Introduction to NURBS*, Morgan Kaufmann.
- Thrun, S., Burgard, W. and Fox, D., (2005). *Probabilistic Robotics*, MIT Press.