

Análisis de los esfuerzos flexionantes y torsionales máximos en un eje para transmisión de potencia

Analysis of Bending Stress and Maximum Torsion on an Axis for Power Transmission

Iván Espinoza-Luna ^a

Abstract:

This work presents the process to determine the maximum stress in bending and the maximum torsional shear stress in a power transmission shaft. The study was made considering that the loads applied on the shaft are stationary and this do not produce cyclical variations over time. The importance of calculate the bending and torsion stress lies in establishing the necessary requirements for strength and rigidity in the element and prevent a failure compromising its functionality.

Keywords:

Maximum stress in bending, maximum torsional shear stress, shaft, strength, rigidity

Resumen:

El siguiente trabajo presenta el procedimiento para determinar el esfuerzo máximo en flexión y el esfuerzo cortante torsional máximo en un eje de transmisión de potencia. El estudio se realizó considerando que las cargas aplicadas sobre el eje son estacionarias y no producen variaciones cíclicas en el tiempo. La importancia de calcular los esfuerzos de flexión y torsión radica en establecer los requisitos necesarios de resistencia y rigidez en el elemento y evitar que falle comprometiendo su funcionalidad.

Palabras Clave:

Esfuerzo máximo en flexión, esfuerzo cortante torsional, eje, resistencia, rigidez

Introducción

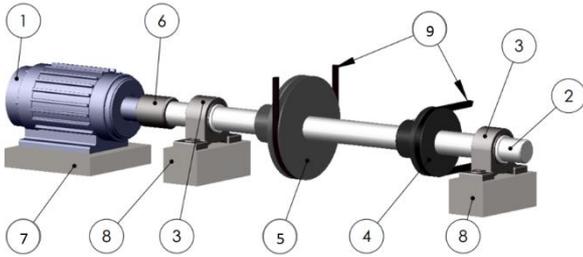
El análisis del diseño de un eje de transmisión de potencia generalmente involucra la implementación de una teoría de falla por fatiga, considerando principalmente los requisitos de potencia, la configuración geométrica del eje, los elementos de transmisión, la resistencia por fatiga y la deflexión por flexión y torsión. La carga sobre los ejes generalmente es una combinación de torsión y flexión, donde una o ambas pueden variar con el tiempo ocasionando una combinación de esfuerzos sobre el elemento.

Caso de estudio

El modelo de estudio propuesto, mostrado en la figura 1, se utiliza para transmitir potencia desde un motor eléctrico hasta ciertos elementos de máquina a través de dos poleas acanaladas en V; está conformado por un sistema de eje-polea unido al motor mediante un acoplamiento rígido acunado, éste tipo de acoplamiento garantiza una eficiente transmisión de torque debido a los ajustes de precisión que se emplean en su montaje. El eje sólido tiene un diámetro de 35 mm y descansa en dos chumaceras simples con cojinetes que soportan carga radial, las poleas en *B* y *C* de diámetro igual a 150 mm y 100 mm respectivamente están sujetas al eje motor por medio de pasadores transversales que además de fijar al elemento, transmiten el torque requerido impidiendo el movimiento axial.

^a Autor de Correspondencia, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Escuela Superior de Ciudad Sahagún,

Email: ivan_espinoza@uaeh.edu.mx



No. Ítem	Descripción
1	Motor eléctrico
2	Eje
3	Chumacera
4	Polea ϕ 100 mm
5	Polea ϕ 150 mm
6	Acoplamiento rígido
7	Bancada del motor
8	Bancada de chumacera
9	Bandas en V

Figura 1. Esquema del sistema para transmisión de potencia

El material del eje se desconoce, aunque dentro de los materiales comunes para fabricar ejes se incluyen aceros de bajo carbono (ANSI 1020-1040), aceros rolados en frío y aceros rolados en caliente. La figura 2 muestra las dimensiones generales del sistema.

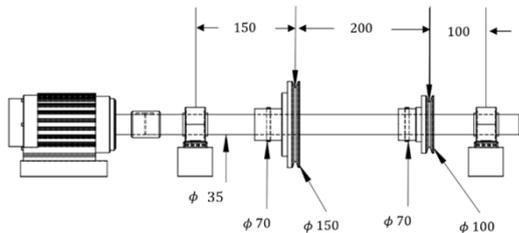


Figura 2. Dimensiones generales en milímetros del sistema

Para realizar el análisis de esfuerzos de flexión y torsión primero se debe calcular el momento flector máximo $M_{m\acute{a}x}$ y el torque máximo $T_{m\acute{a}x}$ producidos por las tensiones en las poleas y las reacciones en los cojinetes de las chumaceras sobre el eje, por lo que se debe bosquejar un diagrama de cuerpo libre que muestre todas fuerzas que actúan sobre el eje (fig. 3).

Partiendo de que el motor transmite una potencia de 5 hp y el eje gira a 480 rpm, el torque T que se desarrolla se puede calcular sabiendo que $P = T \cdot \omega$, donde P es la potencia mecánica y ω la velocidad angular en el eje, así:

$$T = \frac{P}{\omega} \quad (1)$$

La velocidad angular ω se determina a partir de la frecuencia de rotación f que mide las revoluciones por segundo expresadas en Hertz, si una revolución es igual a 2π radianes, la Ec. (1) puede reescribirse como:

$$T = \frac{P}{2\pi f} \quad (2)$$

Incluyendo un factor de conversión y sustituyendo los valores conocidos de potencia y revoluciones por minuto en la Ec. (2):

$$T = \frac{5 \text{ hp} \left(\frac{745.7 \text{ W}}{1 \text{ hp}} \right)}{2\pi \left(480 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \right) \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right)} \approx 75 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (3)$$

Debido a las especificaciones de las chumaceras empleadas en los puntos A y D se van a crear reacciones horizontales y perpendiculares sobre el eje en esos puntos, considerando un sistema cartesiano en el diagrama de cuerpo libre de la figura 3 para analizarlas, para el punto A dichas reacciones serán \vec{A}_z y \vec{A}_y , y \vec{D}_z y \vec{D}_y para el punto D .

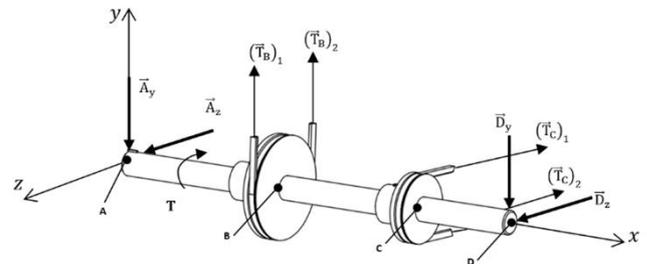


Figura 3. Diagrama de cuerpo libre del sistema

Para simplificar el diagrama de cuerpo libre, se puede cambiar el conjunto de tensiones en las poleas por un sistema de fuerza y par resultante. Para la polea en B (fig. 4a), primero se trasladan las tensiones $(\vec{T}_B)_1$ y $(\vec{T}_B)_2$ al centro de la polea y se agrega un par por cada tensión cuyo momento es igual al momento de dicha tensión con respecto al centro de la polea (fig. 4b). La magnitud de estos momentos es:

$$\text{Para } (\vec{T}_B)_1, \quad |\vec{M}_B| = |(\vec{T}_B)_1| (r_B) \quad (4)$$

$$\text{Para } (\vec{T}_B)_2, \quad |\vec{M}_B| = |(\vec{T}_B)_2| (r_B) \quad (5)$$

Donde r_B es el radio de la polea en **B**, y las tensiones medidas son $|(\vec{T}_B)_1| = 6 \text{ kN}$ y $|(\vec{T}_B)_2| = 8 \text{ kN}$, sustituyendo estos valores en las ecuaciones (4) y (5):

$$\text{Para } (\vec{T}_B)_1, \quad |\vec{M}_B| = 6 \text{ kN}(0.075 \text{ m}) = 0.450 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (6)$$

$$\text{Para } (\vec{T}_B)_2, \quad |\vec{M}_B| = 8 \text{ kN}(0.075 \text{ m}) = 0.600 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (7)$$

La magnitud del par resultante $|\vec{M}_R|_B$ en el punto **B** (fig. 4c) es la resta de los momentos de la Ec. (6) y la Ec. (7), esto es $0.150 \text{ kN} \cdot \text{m}$ debido a que $(\vec{T}_B)_1$ producirá un momento en sentido horario y el momento de $(\vec{T}_B)_2$ será en sentido anti horario. La figura 4 muestra los resultados.

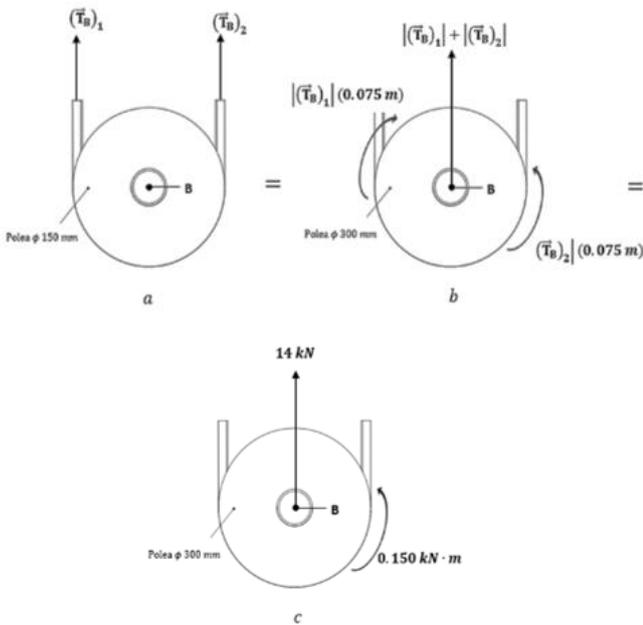


Figura 4. a, b y c diagramas de cuerpo libre de la polea en **B**

De manera similar, para la polea en el punto **C** los momentos producidos por las tensiones $(\vec{T}_C)_1$ y $(\vec{T}_C)_2$ son:

$$\text{Para } (\vec{T}_C)_1, \quad |\vec{M}_C| = |(\vec{T}_C)_1| (r_c) \quad (8)$$

$$\text{Para } (\vec{T}_C)_2, \quad |\vec{M}_C| = |(\vec{T}_C)_2| (r_c) \quad (9)$$

Donde r_c es el radio de la polea en el punto **C**, y las tensiones medidas son $|(\vec{T}_C)_1| = 4 \text{ kN}$ y $|(\vec{T}_C)_2| = 2.5 \text{ kN}$, sustituyendo estos valores en las ecuaciones (8) y (9):

$$\text{Para } (\vec{T}_C)_1, \quad |\vec{M}_C| = 4 \text{ kN}(0.050 \text{ m}) = 0.20 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (10)$$

$$\text{Para } (\vec{T}_C)_2, \quad |\vec{M}_C| = 2.5 \text{ kN}(0.050 \text{ m}) = 0.125 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (11)$$

Nuevamente la magnitud del par resultante $|\vec{M}_R|_C$ en **C** (fig. 5c) es la resta de los momentos de la Ec. (10) y la Ec. (11), obteniendo $|\vec{M}_R|_C = 0.075 \text{ kN} \cdot \text{m}$. La figura 5 muestra los resultados para la polea en **C**

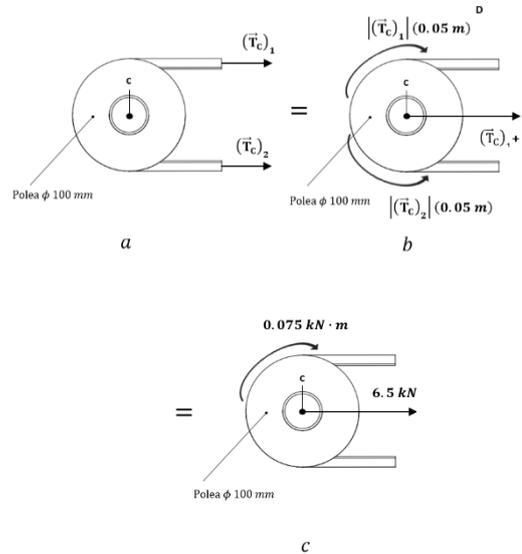


Figura 5. a, b y c diagramas de cuerpo libre de la polea en **C**

En la figura 6 se muestra el diagrama de cuerpo libre simplificado con las fuerzas y torques resultantes de las tensiones en las poleas.

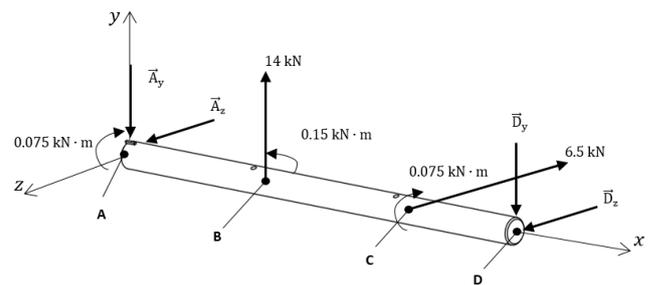


Figura 6. Diagrama de cuerpo libre del eje simplificado

Para calcular las reacciones \vec{A}_z , \vec{A}_y , \vec{D}_z y \vec{D}_y del eje en los cojinetes situados en los puntos **A** y **D**, se deben establecer condiciones de equilibrio representadas por las siguientes ecuaciones.

$$\sum M_{D(eje y)} = 0 \quad (12)$$

$$\sum M_{D(eje z)} = 0 \quad (13)$$

$$\sum F_y = 0 \quad (14)$$

$$\sum F_z = 0 \quad (15)$$

La Ec. (12) establece que todos los momentos alrededor del eje y en el punto D deben ser igual a 0 para mantener el equilibrio estático, por lo que:

$$\sum M_{D(eje y)} = (-0.1 m)\hat{i} \times (-6.5 kN)\hat{k} + (-0.45 m)\hat{i} \times (A_z)\hat{k} = 0 \quad (16)$$

Resolviendo para A_z :

$$-(0.65 kN \cdot m)\hat{j} + (0.45 m)(A_z)\hat{j} = 0$$

$$A_z = 1.445 kN \quad (17)$$

Análogamente la Ec. (13) establece que todos los momentos alrededor del eje z en el punto D deben ser igual a 0 para mantener el equilibrio, así:

$$\sum M_{D(eje z)} = (-0.3 m)\hat{i} \times (14 kN)\hat{j} + (-0.45 m)\hat{i} \times (-A_y)\hat{j} = 0 \quad (18)$$

Resolviendo para A_y :

$$-(4.2 kN \cdot m)\hat{j} + (0.45 m)(A_z)\hat{j} = 0 \rightarrow A_y = 9.334 kN \quad (19)$$

Utilizando el resultado de la Ec. (17) en la Ec. (15) se obtiene:

$$\sum F_z = A_z - 6.5 kN + D_z = 1.445 kN - 6.5 kN + D_z = 0$$

$$D_z = 5.055 kN \quad (20)$$

De igual forma, usando los valores de la Ec. (18) y la Ec. (19) en la Ec. (14) y resolviendo para D_y se obtiene:

$$\sum F_y = -A_y + 14 kN - D_y = -9.334 kN + 14 kN - D_y = 0, D_y = 4.666 kN \quad (21)$$

En la figura 7 se muestran las fuerzas totales, reacciones y momentos torsionales sobre el eje incluyendo el torque transmitido por el motor.

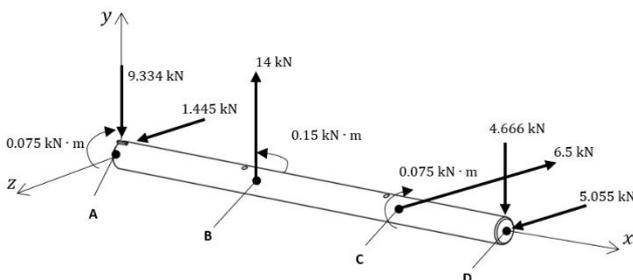


Figura 7. Diagrama de cuerpo libre del eje

Momento flector máximo

El siguiente paso en el análisis es determinar el momento flector máximo $M_{m\acute{a}x}$ mediante la construcción de diagramas de momentos, ya que sólo se encuentran cargas puntuales sobre el eje, éste se puede estudiar como una viga simple redonda.

Debido a que en el eje se encuentran fuerzas dirigidas en los ejes y y z se obtendrán momentos en z (M_z) y momentos en y (M_y) por lo que es necesario construir dos diagramas de momentos orientados en los planos $y-x$ y $z-x$. En la figura 8 se ilustra el diagrama de momentos para el plano $y-x$, y en la figura 9 el diagrama de momentos en el plano $z-x$.

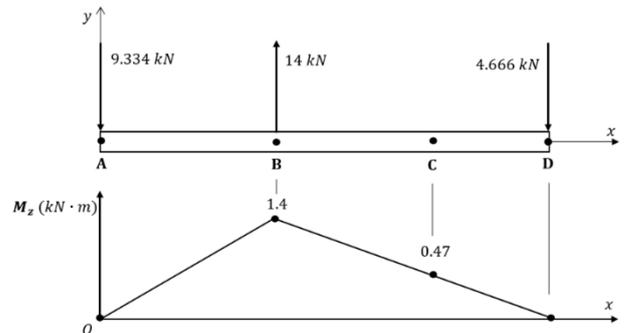


Figura 8. Diagrama de momentos en el plano $y-x$

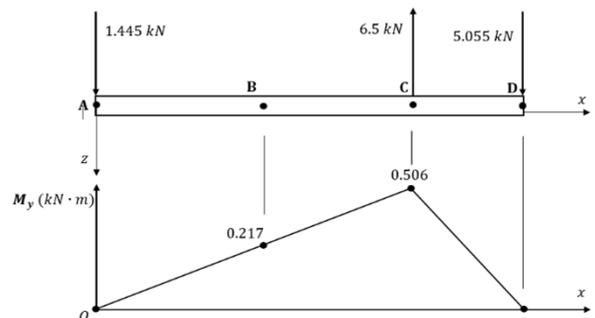


Figura 9. Diagrama de momentos en el plano $z-x$

Se puede observar en la figura 8 que en el plano $y-x$ el momento flector máximo M_z en el eje ocurre en el punto B y en la figura 9 para el plano $z-x$ el momento flector máximo M_y ocurre en el punto C , sin embargo, para obtener el máximo momento flector en cada punto se debe realizar una suma vectorial de las componentes del momento utilizando la siguiente ecuación.

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} \quad (22)$$

El momento flector máximo resultante en el punto **B** utilizando la Ec. (22) es:

$$(M_{m\acute{a}x})_B = \sqrt{(0.217 \text{ kN} \cdot \text{m})^2 + (1.4 \text{ kN} \cdot \text{m})^2} \quad (23)$$

$$(M_{m\acute{a}x})_B = 1.417 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Y en el punto **C**:

$$(M_{m\acute{a}x})_C = \sqrt{(0.506 \text{ kN} \cdot \text{m})^2 + (0.47 \text{ kN} \cdot \text{m})^2} \quad (24)$$

$$(M_{m\acute{a}x})_C = 0.7 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Los diagramas vectoriales del momento flector en los puntos **B** y **C** se muestran en la figura 10, nótese que es fácil calcular el ángulo al que ocurre dicho momento utilizando identidades trigonométricas.

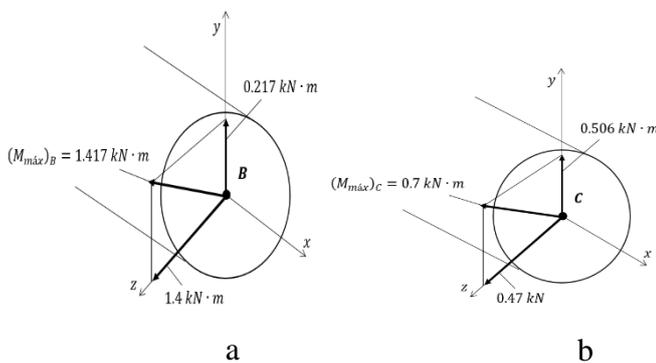


Figura 10. Momento flector máximo en **B**, b) Momento flector máximo en **C**

Dados los resultados de la Ec. (23) y la Ec. (24) se deduce que el momento flector máximo en el eje se localiza en el punto **B** y es de magnitud igual a $1.417 \text{ kN} \cdot \text{m}$.

Diagrama de torque

Con la finalidad de calcular el torque máximo $T_{m\acute{a}x}$ en el sistema, se construye el diagrama de torque producido a lo largo del eje, iniciando con el torque transmitido por el motor e incluyendo los torques (momentos torsionales) de las poleas en **B** y **C**. La figura 11 ilustra el diagrama de torque.

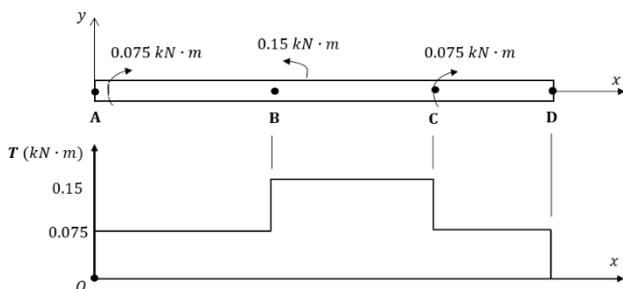


Figura 11. Diagrama de torque para el eje

De la figura anterior se obtiene que el torque máximo desarrollado en la flecha es de magnitud igual a:

$$T_{m\acute{a}x} = 0.15 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (25)$$

Esfuerzo máximo en flexión

Para calcular el esfuerzo nominal σ_{nom} en flexión en el eje se emplea la siguiente ecuación:

$$\sigma_{nom} = \frac{M_{m\acute{a}x} c}{I} = \frac{M_{m\acute{a}x} d/2}{\pi d^4/64} \rightarrow \sigma_{nom} = \frac{32M_{m\acute{a}x}}{\pi d^3} \quad (26)$$

Donde I es el momento inercial centroidal de la sección circular del eje y c la distancia a la fibra neutra equivalente al radio del eje.

Debido a que existe un cambio repentino en la geometría del eje (barrenos $\phi 7 \text{ mm}$) en los puntos donde están sujetadas las poleas (secciones **A – A** y **B – B** de la figura 12) mediante pasadores, existirán concentraciones de esfuerzos.

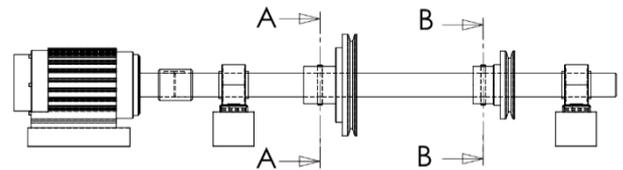


Figura 12. Secciones **A – A** y **B – B** del eje donde existen concentraciones de esfuerzos

En el punto **B** se localiza el momento flector máximo (figura 10) y en las secciones **A – A** y **B – B** se encuentran las máxima concentraciones de esfuerzos, el esfuerzo máximo en flexión $\sigma_{m\acute{a}x}$ ocurrirá en la sección **A – A** a la derecha de la polea en **B** y a 90° del vector que describe el momento flector máximo. En consecuencia $\sigma_{m\acute{a}x}$ se relaciona con la Ec. (26) mediante un factor de concentración de esfuerzo a flexión K_t como:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = K_t \sigma_{nom} \quad (27)$$

$$\sigma_{m\acute{a}x} = K_t \frac{32M_{m\acute{a}x}}{\pi d^3} \quad (28)$$

El factor de concentración de esfuerzos a flexión K_t depende del diámetro de los barrenos y del diámetro del eje, generalmente los valores que toma K_t existen en tablas generadas experimentalmente. Para este caso la relación del diámetro del barreno para el pasador y del eje es:

$$\frac{0.07 \text{ m}}{0.35 \text{ m}} = 0.2 \quad (29)$$

Localizando éste valor en una tabla de concentraciones de esfuerzos se obtiene un valor para K_t igual a 3.1, sustituyendo este valor y la magnitud del momento flector de la Ec. (23) en la Ec. (28) se obtiene el esfuerzo máximo en flexión para el eje:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = (3.1) \frac{32(1.417 \text{ kN} \cdot \text{m})}{\pi(0.35 \text{ m})^3} = 1043.6 \text{ kPa} \quad (30)$$

Esfuerzo cortante torsional máximo

La ecuación para calcular el esfuerzo cortante torsional nominal τ_{nom} es:

$$\tau_{nom} = \frac{T_{m\acute{a}x} c}{J} = \frac{T_{m\acute{a}x} d/2}{\pi d^4/32} \rightarrow \tau_{nom} = \frac{16T_{m\acute{a}x}}{\pi d^3} \quad (31)$$

Donde J es el momento polar de inercial de la sección circular del eje y depende del diámetro del mismo. Nuevamente, el esfuerzo cortante torsional máximo $\tau_{m\acute{a}x}$ ocurre en las secciones $A - A$ y $B - B$ del eje mostradas en la figura 12 donde existen concentraciones de esfuerzos producidas por los barrenos en esos puntos. Análogamente a la Ec. (27), la ecuación para obtener $\tau_{m\acute{a}x}$ es:

$$\tau_{m\acute{a}x} = K_{tg} \tau_{nom} \quad (32)$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = K_{tg} \frac{16T_{m\acute{a}x}}{\pi d^3} \quad (33)$$

En este caso K_{tg} es un factor de concentración de esfuerzo a torsión y al igual que K_t depende del diámetro de los barrenos y del diámetro del eje (Ec. 29), su valor en tabas es de 3.8 para este caso de estudio. Sustituyendo los valores de $T_{m\acute{a}x}$ de la Ec. (25) en la Ec. (33)

$$\tau_{m\acute{a}x} = (3.8) \frac{16(0.15 \text{ kN} \cdot \text{m})}{\pi(0.35 \text{ m})^3} = 68 \text{ kPa} \quad (34)$$

Resultados y discusiones

El cálculo del esfuerzo máximo en flexión $\sigma_{m\acute{a}x}$ y el esfuerzo cortante torsional máximo $\tau_{m\acute{a}x}$ se realizó considerando las concentraciones de esfuerzos sobre las superficies del eje, donde se pudo observar que dichos esfuerzos superan a los esfuerzos nominales siendo $\sigma_{m\acute{a}x} = 1043.6 \text{ kPa}$ y $\tau_{m\acute{a}x} = 68 \text{ kPa}$. Debido a las bajas revoluciones por minuto a las que trabaja el eje, su geometría y la distribución de carga, el esfuerzo cortante torsional máximo $\tau_{m\acute{a}x}$ tiene una magnitud menor al

esfuerzo flexionante calculado. Finalmente para garantizar la fiabilidad del diseño del eje se deben calcular los esfuerzos principales producidos por la combinación del esfuerzo normal y cortante en el elemento.

Conclusiones

En este trabajo se desarrolló un método para conocer el esfuerzo máximo en flexión y el esfuerzo cortante torsional en un eje para transmisión de potencia. Se puede concluir que el eje está sometido a un gran esfuerzo flexionante en comparación al esfuerzo torsional que desarrolla por lo que es más probable que comience a fallar por flexión ocasionando deflexiones críticas en la ubicaciones de los cojinetes y poleas. El eje sólido puede ser remplazado por un eje hueco debido a que el esfuerzo cortante torsional es inversamente proporcional al momento polar de inercia y se debe incluir un análisis de teoría de falla para concluir si el material usado en el eje es el adecuado en relación a sus propiedades de resistencia a la fluencia por tensión y cortante

Referencias

- [1] R. L. Norton, Diseño de Máquinas, México: Prentice Hall, 2011.
- [2] R. G. Budynas y J. K. Nisbet, Diseño en ingeniería mecánica de Shigley, México: McGraw-Hill, 2012.
- [3] R. L. Mott, Diseño de Elementos de Máquinas, México: Pearson, 2006.
- [4] F. P. B. E. Johnston, J. T. DeWolf y D. F. Mazurek, Mecánica de Materiales, México: McGraw-Hill, 2013.
- [5] R. C. Hibbeler, Mecánica de Materiales, México: Pearson, 2011.
- [6] R. L. Mott, Resistencia de Materiales, México: Pearson, 2009.
- [7] J. M. Gere y B. J. Goodno, Mecánica de Materiales, México: Cengage Learning, 2009.
- [8] J. L. Meriam y L. G. Kraige, Mecánica para ingenieros. Estática, España: Reverté, 1999.
- [9] F. P. Beer, J. E Russell Johnston, D. F. Mazurek y E. R. Eisenberg, mecánica Vectorial para Ingenieros. Estática, México: McGraw-Hill, 2010.