

# Aplicación de las Ecuaciones Diferenciales a las Vibraciones no Amortiguadas con Excitación Armónica

## Application of Differential Equations to Non-Damped Vibrations with Harmonic Excitation

*Iván Espinoza Luna<sup>a</sup>*

---

### Abstract:

The present job shows the method to determine the response of a mass-spring system subjected to a non-damped forced vibration, in the first part the equation of movement that governs the system is determined by the application of Newton's laws of motion, then the differential equation is solved using its characteristic equation; also, this job shows Laplace's method of transforming to solve differential equations and a phenomenon that can occur in the study of non-damped vibrations with harmonic excitation called resonance.

### Keywords:

*Vibration, equation, motion, resonance*

---

### Resumen:

En el presente trabajo se expone el procedimiento para determinar la respuesta de un sistema masa-resorte sometido a una vibración forzada no amortiguada, en la primera parte se determina la ecuación de movimiento que gobierna dicho sistema mediante la aplicación de las leyes de movimiento de Newton, posteriormente se soluciona la ecuación diferencial utilizando su ecuación característica; también se muestra el método de transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales y un fenómeno que se puede presentar en el estudio de vibraciones forzadas con excitación armónica no amortiguadas llamado resonancia.

### Palabras Clave:

*Vibración, ecuación, movimiento, resonancia*

---

### Introducción

La importancia del uso de ecuaciones diferenciales radica en la modelación de sistemas físicos, todos los sistemas estables o transitorios pueden ser descritos parcialmente o en su totalidad mediante el uso de ecuaciones diferenciales que predigan su comportamiento en el tiempo. En la actualidad existen diversos métodos de solucionar una ecuación diferencial relacionados al tipo de ecuación que se pretenda solucionar.

Conocer una relación que exprese el movimiento de sistemas físicos es de gran ayuda en la ingeniería y una de las áreas donde se tiene extensa aplicación es en el modelado de sistemas vibratorios. Una vibración se puede definir como cualquier movimiento que se repite después de un intervalo de tiempo. 1

Las vibraciones se pueden clasificar como libres y forzadas, y amortiguadas y no amortiguadas; específicamente en este trabajo se estudiará el tipo de vibración forzada no amortiguada. Se dice que un sistema mecánico o estructural experimenta vibración forzada con excitación armónica siempre que se suministra energía externa armónica durante la vibración un ejemplo de este tipo de vibración se presenta en las estructuras de puentes en las que la energía externa es suministrada mediante la fuerza del viento provocando oscilaciones. 1

En el desarrollo de las ecuaciones de movimiento del siguiente análisis se utilizará un sistema de referencia inercial cartesiano considerando que los desplazamientos verticales hacia abajo y en consecuencia las funciones de movimiento como velocidad y aceleración serán positivos.

---

<sup>a</sup> Autor de Correspondencia, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Escuela Superior Ciudad Sahagún, Email: [ivan\\_espinoza@uaeh.edu.mx](mailto:ivan_espinoza@uaeh.edu.mx)

### Vibración con excitación armónica no amortiguada

El análisis comienza determinando la ecuación de movimiento que gobierna al sistema masa-resorte mostrado en la figura 1.

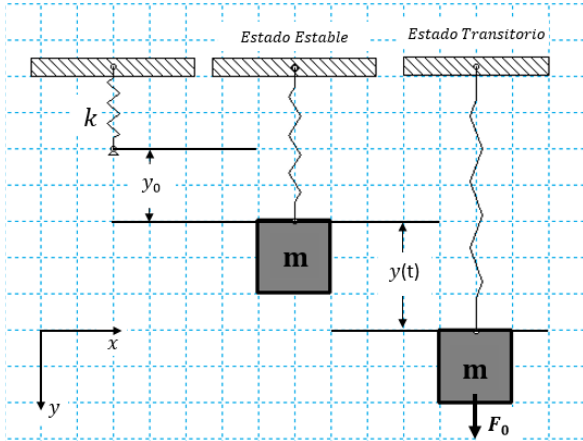


Figura 1. Sistema masa-resorte

Primero se estudia el sistema en estado estable donde la única fuerza que actúa sobre el sistema es su propio peso  $W$ , del diagrama de cuerpo libre de la figura 2 y utilizando la primera ley de movimiento de Newton se obtienen las siguientes relaciones:

$$\sum F_{sistema} = 0 \quad (1)$$

$$W - F_s = 0 \quad (2)$$

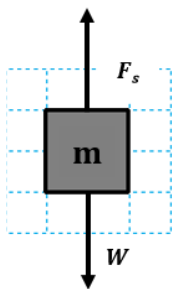


Figura 2. Diagrama de cuerpo libre del sistema masa-resorte

Donde  $F_s$  es la fuerza de reacción ejercida por el resorte y proporcional a su constante de elasticidad  $k$  como se enuncia en la ley de Hooke:

$$F_s = ky_0 \quad (3)$$

Para el sistema de la figura 1,  $y_0$  representa la deformación del resorte producida solamente por el peso de la masa. Sustituyendo la Ec. (3) en la Ec. (2) se obtiene:

$$W = ky_0 \quad (4)$$

Ahora se analiza el sistema en estado transitorio donde el sistema masa-resorte se encuentra en una vibración forzada no amortiguada sometido a una excitación armónica  $F_0$  de magnitud  $f_0$  y frecuencia  $\omega_f$ , es decir,  $F_0 = f_0 \cos(\omega_f t)$ . La segunda ley de movimiento de Newton para el diagrama de cuerpo libre de la figura 3 es:

$$\sum F = m\ddot{y}(t) \quad (5)$$

Donde  $\ddot{y}(t)$  representa la aceleración de la masa  $m$  en el tiempo  $t$ .

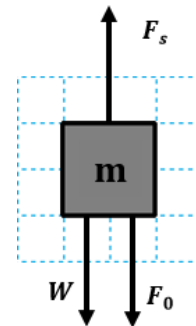


Figura 3. Diagrama de cuerpo libre del sistema masa-resorte con excitación armónica

Sustituyendo las fuerzas que actúan sobre la masa en la Ec. (5):

$$W - F_s + F_0 = m\ddot{y}(t) \quad (6)$$

En este momento se debe considerar para la fuerza de reacción del resorte  $F_s$  la deformación inicial producida por el peso de la masa  $y_0$  más un segundo alargamiento  $y(t)$  para el estado transitorio (figura 1) en el tiempo como:

$$F_s = k[y(t) + y_0] \quad (7)$$

Sustituyendo las Ecs. (4) y (7) en la Ec. (6)

$$ky_0 - k[y(t) + y_0] + F_0 = m\ddot{y}(t) \quad (8)$$

Simplificando la Ec.(8):

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = F_0 \quad (9)$$

La Ec. (9) representa la ecuación de movimiento que rige al sistema mostrado de la figura 1, reescrita de otra manera la Ec. (9) se convierte en:

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + ky(t) = f_0 \cos(\omega_f) \quad (10)$$

### Solución de la Ecuación Diferencial

Es evidente que la Ec. (10) es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden primer grado lineal en la variable  $y(t)$  homogénea y de coeficientes constantes, por lo que la solución general  $y_G(t)$  es la suma de una solución asociada a la ecuación diferencial homogénea  $y_h(t)$  cuando la excitación armónica  $F_0 = 0$  y una solución particular  $y_p(t)$  para la ecuación completa donde la excitación armónica  $F_0 \neq 0$ , es decir, la solución se expresa como:

$$y_G(t) = y_h(t) + y_p(t) \quad (11)$$

### Solución de la Ecuación Diferencial Homogénea Asociada

Primero se determina  $y_h(t)$  considerando  $F_0 = 0$  utilizando la siguiente ecuación:

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + ky(t) = 0 \quad (12)$$

La Ec. (12) representa la ecuación característica de un movimiento armónico simple para un sistema vibratorio libre no amortiguado. Utilizando la ecuación característica de la Ec. (12) se obtiene:

$$mr^2 + k = 0 \quad (13)$$

Resolviendo la Ec. (13) para  $r$ , que representa las raíces de la ecuación auxiliar, se obtienen dos valores  $r_1$  y  $r_2$  complejos como:

$$r_{1,2} = \pm \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} i \quad (14)$$

Definiendo la siguiente relación:

$$\omega_n = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} \quad (15)$$

Donde en el análisis de sistemas vibratorios  $\omega_n$  representa la frecuencia natural de vibración de la masa en estado estable producida por la oscilación armónica durante un periodo definido. Puesto que se han obtenido dos raíces complejas en consecuencia se derivan dos soluciones de la Ec. (12),  $y_{h1}(t)$  y  $y_{h2}(t)$  de la siguiente forma:

$$y_{h1,2}(t) = C e^{r_{1,2}t} \quad (16)$$

La forma de la Ec. (16) revela la naturaleza de la solución debido a que la única función elemental no trivial cuya

derivada es una constante múltiple de sí misma es la función exponencial  $e^{rt}$ . Utilizando la relación de la Ec. (15) en la Ec. (14), las dos soluciones son: 2

$$y_{h1}(t) = C_1 e^{\omega_n i t} \quad (17)$$

$$y_{h2}(t) = C_2 e^{-\omega_n i t} \quad (18)$$

Donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes que se determinan a partir de las condiciones iniciales del sistema. Se puede comprobar por sustitución que las Ecs. (17) y (18) son funciones solución de la Ec. (12). Usando el principio de superposición que establece que si dos funciones son solución de una ecuación diferencial entonces la suma de esas funciones también será una solución de la ecuación diferencial [3], es decir, si  $y_{h1}(t)$  y  $y_{h2}(t)$  son solución de la Ec. (12) entonces la adición también satisface la ecuación como:

$$y_h(t) = y_{h1}(t) + y_{h2}(t) \quad (19)$$

Combinando las Ecs. (17) y (18) en la Ec. (19) se obtiene la familia de soluciones  $y(t)$  diparamétrica de la Ec. (12)

$$y_h(t) = C_1 e^{\omega_n i t} + C_2 e^{-\omega_n i t} \quad (20)$$

En la práctica resulta conveniente evitar el uso de números complejos en la interpretación de sistemas físicos en movimiento por lo que aún se puede seguir trabajando la Ec. (20), utilizando la identidad de Euler

$$e^{\theta i t} = \cos(\theta t) + i \sin(\theta t) \quad (21)$$

Y la identidad expandida para un número complejo [4]:

$$e^{\gamma + \theta i t} = e^{\gamma} e^{\theta i t} = e^{\gamma} [\cos(\theta t) + i \sin(\theta t)] \quad (22)$$

Para la cual  $\gamma$  y  $\theta i$  representan una parte real e imaginaria respectivamente. De las Ecs. (21) y (22) se pueden establecer las siguientes relaciones:

$$e^{-\theta i t} = \cos(-\theta t) + i \sin(-\theta t) \quad (23)$$

$$e^{-\theta i t} = \cos(\theta t) - i \sin(\theta t) \quad (24)$$

$$e^{\gamma - \theta i t} = e^{\gamma} e^{-\theta i t} = e^{\gamma} [\cos(\theta t) - i \sin(\theta t)] \quad (25)$$

Debido a que los exponenciales de  $e$  en la Ec. (20) no incluyen términos contenidos en los reales ( $\gamma = 0$ ), las Ecs. (22) y (25) se pueden reescribir sustituyendo  $\theta = \omega_n$  como:

$$e^{\omega_n i t} = \cos(\omega_n t) + i \sin(\omega_n t) \quad (26)$$

$$e^{-\omega_n t} = \cos(\omega_n t) - i \sin(\omega_n t) \quad (27)$$

Sustituyendo las Ecs. (26) y (27) en la Ec. (20)

$$y_h(t) = C_1[\cos(\omega_n t) + i \sin(\omega_n t)] + C_2[\cos(\omega_n t) - i \sin(\omega_n t)] \quad (28)$$

Factorizando las funciones  $\cos(\omega_n t)$  y  $\sin(\omega_n t)$ :

$$y_h(t) = \cos(\omega_n t) (C_1 + C_2) + \sin(\omega_n t) (iC_1 - iC_2) \quad (29)$$

Estableciendo que la suma de dos constantes es una nueva constante mediante:

$$C_1 + C_2 = A \quad (30)$$

$$iC_1 - iC_2 = B \quad (31)$$

Sustituyendo las Ecs. (30) y (31) en la Ec. (29)

$$y_h(t) = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t) \quad (32)$$

La Ec. (32) también es solución de la Ec. (12) sólo que ahora se han reemplazado los números imaginarios por funciones trigonométricas donde es más fácil observar el comportamiento de la oscilación del sistema vibratorio periódico en un gráfico como el de la figura 4.

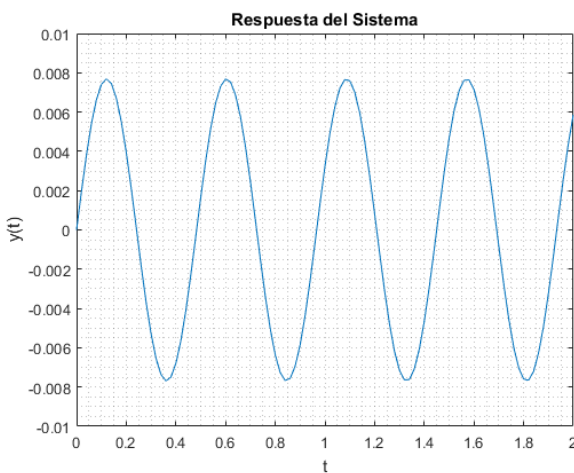


Figura 4. Gráfico de un movimiento armónico simple

### Método de la Transformada de Laplace para un Movimiento Armónico

La Ec. (32) también se puede obtener mediante el método de la Transformada de Laplace. Sabiendo que la transformada  $\mathcal{L}$  de la función  $y(t)$  es otra función  $F(s)$  [2], por definición esto es:

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \int_0^{-\infty} e^{-st} y(t) dt = F(s) \quad (33)$$

Utilizando la definición anterior para obtener la transformada  $\mathcal{L}$  de la primera derivada  $\dot{y}(t)$  de la función  $y(t)$ , se escribe:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = \int_0^{-\infty} e^{-st} \frac{dy(t)}{dt} dt \quad (34)$$

Resolviendo la integral de Ec. (34) por partes:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = [e^{-st} y(t)]_0^{-\infty} + s \int_0^{-\infty} e^{-st} y(t) dt \quad (35)$$

El último término de la Ec. (35) es la definición descrita para  $F(s)$  en la Ec. (33), sustituyendo este término en la Ec. (35):

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = [e^{-st} y(t)]_0^{-\infty} + sF(s) \quad (36)$$

sabiendo que  $e^{-\infty} \rightarrow 0$ , la Ec. (36) se simplifica como:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = sF(s) - y(0) \quad (37)$$

La Ec. (37) muestra la transformada  $\mathcal{L}$  de la primera derivada  $\dot{y}(t)$  de la función  $y(t)$ .

Siguiendo el mismo procedimiento anterior se puede calcular la transformada  $\mathcal{L}$  de la segunda derivada  $\ddot{y}(t)$  de la función  $y(t)$ , la cual es:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2 y(t)}{dt^2}\right\} = \int_0^{-\infty} e^{-st} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} dt \quad (38)$$

Resolviendo la integral de la Ec. (38) por partes:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2 y(t)}{dt^2}\right\} = \left[ e^{-st} \frac{dy(t)}{dt} \right]_0^{-\infty} + s \int_0^{-\infty} e^{-st} \frac{dy(t)}{dt} dt \quad (39)$$

El último término de la Ec. (39) representa la transformada  $\mathcal{L}$  de la primera derivada  $\dot{y}(t)$  (Ec. (34)), es decir,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2 y(t)}{dt^2}\right\} = \left[ e^{-st} \frac{dy(t)}{dt} \right]_0^{-\infty} + s \mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} \quad (40)$$

Sustituyendo el resultado de la Ec. (37) en la Ec. (40):

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} = s^2F(s) - sy(0) - \dot{y}(0) \quad (41)$$

La Ec. (41) muestra la transformada  $\mathcal{L}$  de la segunda derivada  $\ddot{y}(t)$  de la función  $y(t)$ .

Para obtener la respuesta de un sistema en movimiento armónico se debe transformar la Ec. (12) como:

$$\mathcal{L}\left\{m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + ky(t) = 0\right\} \quad (42)$$

Utilizando el teorema de linealidad, la Ec. (42) se puede reescribir como:

$$m\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} + k\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{0\} \quad (43)$$

Utilizando las Ecs. (33) y (41), para determinar la transformada de la función  $y(t)$  y su segunda derivada  $\ddot{y}(t)$  respectivamente, en la Ec. (43) se obtiene:

$$m[s^2F(s) - sy(0) - \dot{y}(0)] + kF(s) = 0 \quad (44)$$

Considerando las condiciones iniciales para un tiempo inicial  $t = 0$

$$y(t)_{t=0} = y(0) = y_0 \quad (45)$$

$$\dot{y}(t)_{t=0} = \dot{y}(0) = \dot{y}_0 \quad (46)$$

Donde  $y_0$  y  $\dot{y}_0$  son el desplazamiento y velocidad inicial de la masa respectivamente. Sustituyendo las condiciones iniciales en la Ec. (44) se obtiene:

$$m[s^2F(s) - sy_0 - \dot{y}_0] + kF(s) = 0 \quad (47)$$

Resolviendo para  $F(s)$ :

$$F(s) = \frac{msy_0}{ms^2 + k} + \frac{m\dot{y}_0}{ms^2 + k} \quad (48)$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace en la Ec. (48):

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{msy_0}{ms^2 + k} + \frac{m\dot{y}_0}{ms^2 + k}\right\} \quad (49)$$

Sabiendo que la transformada inversa de Laplace de la función  $F(s)$  es la función  $y(t)$  [2], es decir,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \quad (50)$$

Nuevamente aplicando el teorema de linealidad en la Ec. (49):

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{msy_0}{ms^2 + k}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{m\dot{y}_0}{ms^2 + k}\right\} \quad (51)$$

La Ec. (51) puede reescribirse como:

$$y(t) = y_0\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + \frac{k}{m}}\right\} + \dot{y}_0\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + \frac{k}{m}}\right\} \quad (52)$$

Resolviendo las transformadas inversas en la Ec. (52) se obtiene:

$$y(t) = y_0\cos\left[\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}t\right] + \dot{y}_0\frac{1}{\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}}\sin\left[\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}t\right] \quad (53)$$

Recordando la definición de la frecuencia natural  $\omega_n$  de la Ec. (15) y sustituyendo esta relación en la Ec. (53):

$$y(t) = y_0\cos(\omega_n t) + \frac{\dot{y}_0}{\omega_n}\sin(\omega_n t) \quad (54)$$

Donde se han obtenido valores directos para las constantes  $A$  y  $B$  de la Ec. (32) en función de las condiciones iniciales del sistema. Es importante mencionar que la Ec. (32) y la Ec. (54) sólo se pueden utilizar para sistemas que experimenten una vibración libre no amortiguada; para sistemas en vibración libre armónicamente excitada éstas constantes tendrán valores diferentes pues se debe considerar el efecto de la vibración forzada como se desarrollará más adelante en este trabajo.

### Solución Particular de la Ecuación no Homogénea

Ahora se determinará la solución particular  $y_p(t)$  cuando la excitación armónica  $F_0 \neq 0$ , mediante el método de coeficientes indeterminados, sabiendo que  $F_0 = f_0 \cos(\omega_f t)$  la solución tendrá la forma:

$$y_p(t) = a \sin(\omega_f t) + b \cos(\omega_f t) \quad (55)$$

Donde  $a$  y  $b$  son constantes que se deben determinar en la solución, primero se obtiene la primera y segunda derivada de  $y_p(t)$  como:

$$\dot{y}_p(t) = a\omega_f \cos(\omega_f t) - b\omega_f \sin(\omega_f t) \quad (56)$$

$$\ddot{y}_p(t) = -a\omega_f^2 \sin(\omega_f t) - b\omega_f^2 \cos(\omega_f t) \quad (57)$$

Por sustitución de las Ecs. (56) y (57) en la Ec. (10) se obtiene:

$$m[-a\omega_f^2 \sin \omega_f t - b\omega_f^2 \cos \omega_f t] + k[a \sin \omega_f t + b \cos \omega_f t] = f_0 \cos \omega_f t \quad (58)$$

En la Ec. (58) se pueden factorizar las funciones seno y coseno ya que son términos semejantes para encontrar las constantes  $b$  y  $a$  mediante la igualación de coeficientes. Factorizando en la Ec. (58):

$$b \cos(\omega_f t)(-m\omega_f^2 + k) + a \sin(\omega_f t)(-m\omega_f^2 + k) = f_0 \cos(\omega_f t) \quad (59)$$

Para que se cumpla la Ec. (59) las siguientes relaciones deben ser verdaderas:

$$b \cos(\omega_f t)(-m\omega_f^2 + k) = f_0 \cos(\omega_f t) \quad (60)$$

$$a \sin(\omega_f t)(-m\omega_f^2 + k) = 0 \quad (61)$$

De las Ecs. (60) y (61) se obtiene el valor de  $b$  y  $a$  como:

$$b = \frac{f_0}{-m\omega_f^2 + k} \quad (62)$$

$$a = 0 \quad (63)$$

Sustituyendo los valores de las Ecs. (62) y (63) en la Ec. (55) se obtiene la solución particular  $y_p(t)$  descrita como:

$$y_p(t) = \frac{f_0}{-m\omega_f^2 + k} \cos(\omega_f t) \quad (64)$$

Retomando que la solución general de la Ec. (10) es la suma de la solución asociada a la ecuación diferencial homogénea  $y_h(t)$  y la solución particular  $y_p(t)$ , la solución general se obtiene sustituyendo las Ecs. (32) y (64) en la Ec. (11)

$$y_G(t) = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t) + \frac{f_0}{-m\omega_f^2 + k} \cos(\omega_f t) \quad (65)$$

Utilizando la relación de la Ec. (15) de la frecuencia natural  $\omega_n$  en el segundo término del lado derecho de la Ec. (65), se puede reescribir la ecuación como:

$$y_G(t) = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t) + \frac{f_0}{m(\omega_n^2 - \omega_f^2)} \cos(\omega_f t) \quad (66)$$

Si se deriva la Ec. (66) respecto del tiempo se obtiene la velocidad de la masa como:

$$\dot{y}_G(t) = -A\omega_n \sin(\omega_n t) + B\omega_n \cos(\omega_n t) - \omega_f \frac{f_0}{m(\omega_n^2 - \omega_f^2)} \sin(\omega_f t) \quad (67)$$

Las Ecs. (66) y (67) muestran la respuesta de un sistema en vibración no amortiguada con excitación armónica.

Para determinar las constantes  $A$  y  $B$  de la Ec. (66) se deben sustituir las condiciones iniciales del sistema en las Ecs. (66) y (67). Recordando que para un tiempo  $t = 0$ ;  $y_G(t) = y_0$  y  $\dot{y}_G(t) = \dot{y}_0$  donde  $y_0$  y  $\dot{y}_0$  son el desplazamiento y velocidad inicial de la masa respectivamente, se tiene:

$$y_0 = A + \frac{f_0}{m(\omega_n^2 - \omega_f^2)} \quad (68)$$

$$\dot{y}_0 = B\omega_n \quad (69)$$

Resolviendo para las constantes  $A$  y  $B$ :

$$A = y_0 - \frac{f_0}{m(\omega_n^2 - \omega_f^2)} \quad (70)$$

$$B = \frac{\dot{y}_0}{\omega_n} \quad (71)$$

Sustituyendo los valores de las Ecs. (70) y (71) en la Ec. (66)

$$y_G(t) = \left[ y_0 - \frac{f_0}{m(\omega_n^2 - \omega_f^2)} \right] \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{y}_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t) + \frac{f_0}{m(\omega_n^2 - \omega_f^2)} \cos(\omega_f t) \quad (72)$$

Factorizando términos semejantes en la Ec. (72)

$$y_G(t) = y_0 \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{y}_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t) + \frac{f_0 [\cos(\omega_f t) - \cos(\omega_n t)]}{m(\omega_n^2 - \omega_f^2)} \quad (73)$$

La Ec. (73) muestra la respuesta del sistema en vibración forzada no amortiguada de la figura 1 en cualquier tiempo  $t$ . Por lo tanto, el movimiento completo se expresa como la suma de curvas seno y coseno de diferentes frecuencias como se muestra en la figura 5. 1

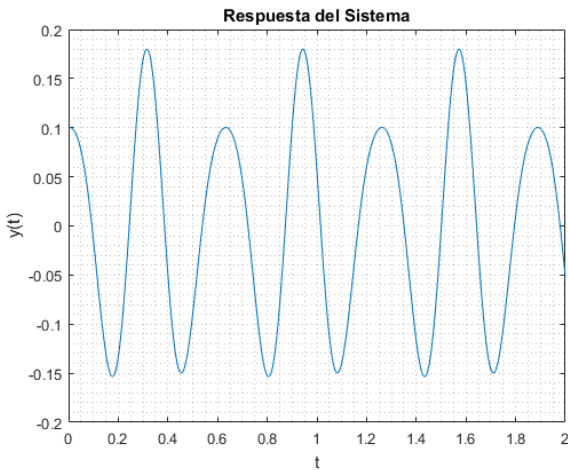


Figura 5. Gráfico de una vibración forzada sin amortiguamiento

### Respuesta en resonancia

Existe un fenómeno llamado resonancia que se produce cuando la frecuencia natural  $\omega_n$  se iguala a la frecuencia de la fuerza de excitación armónica  $\omega_f$ . Éste fenómeno ocasiona que la amplitud de movimiento crezca en el tiempo como se muestra en la figura 3 provocando grandes daños como deflexiones a los sistemas que experimentan este tipo de vibración, principalmente en sistemas mecánicos, máquinas y estructuras. Para conocer la respuesta del sistema en resonancia ( $\omega_n \rightarrow \omega_f$ ) se debe evaluar el límite del segundo término del lado derecho de la Ec. (73) mediante la regla de L'Hospital como sigue: 1

$$\lim_{\omega_f \rightarrow \omega_n} \frac{\frac{d[\cos(\omega_f t) - \cos(\omega_n t)]}{d\omega_f}}{\frac{d(\omega_n^2 - \omega_f^2)}{d\omega_f}} = \lim_{\omega_f \rightarrow \omega_n} \frac{-t \sin(\omega_f t)}{-2\omega_f} = \frac{t \sin(\omega_n t)}{2\omega_n} \quad (74)$$

Sustituyendo el último término de la Ec. (74) en la Ec. (73):

$$y_G(t) = y_0 \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{y}_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t) + \frac{t f_0 \sin(\omega_n t)}{2m\omega_n} \quad (75)$$

Factorizando términos semejantes en la Ec. (75):

$$y_G(t) = y_0 \cos(\omega_n t) + \frac{1}{\omega_n} \left( \dot{y}_0 + \frac{t f_0}{2m} \right) \sin(\omega_n t) \quad (76)$$

La Ec. (76) muestra la respuesta de un sistema en resonancia cuando  $\omega_f \rightarrow \omega_n$ , cuyo comportamiento es el

de la figura 6, donde se puede observar el crecimiento de la amplitud de movimiento en el tiempo para este fenómeno.

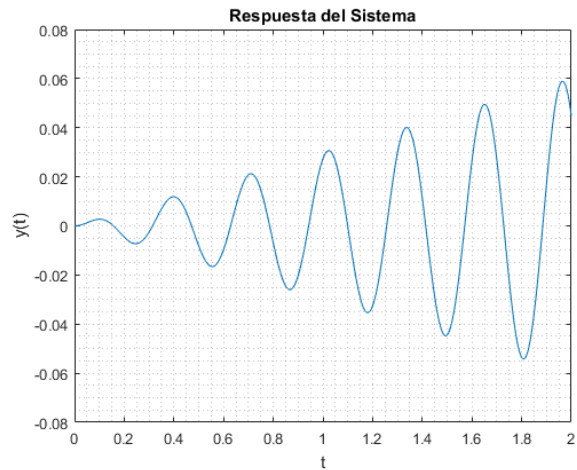


Figura 6. Gráfico de una vibración forzada sin amortiguamiento en resonancia

### Conclusión

En este trabajo se analizó un sistema masa-resorte en vibración no amortiguada forzada mediante las leyes de movimiento de Newton y se obtuvo la relación matemática que describe su comportamiento. Se puede concluir que el uso de ecuaciones diferenciales que modelen sistemas físicos, como sistemas vibratorios, es de gran ayuda en la ingeniería debido a que predecir su comportamiento en el tiempo es de suma importancia para garantizar diseños de estructuras y sistemas mecánicos funcionales, seguros y confiables.

### Referencias

- [1] Rao y S. S, Vibraciones Mecánicas, Quinta ed., México: Pearson Education, 2012.
- [2] D. G. Zill y M. R. Cullen, ECUACIONES DIFERENCIALES con problemas con valores en la frontera, 7 ed., México: Cengage Learning, 2009.
- [3] C. H. Edwards y D. E. Penney, Ecuaciones diferenciales Y problemas con valor en la frontera, 4 ed., México: Pearson Educación, 2009.
- [4] W. E. Boyce y R. C. DiDrma, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, 10 ed., United States of America: Wiley, 2012.
- [5] W. J. Bottega, Vibrations Engineering, New York: Tylor and Francis, 2006.