https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/sahagun/issue/archive

Ingenio y Conciencia Boletín Científico de la Escuela Superior Ciudad Sahagún

Publicación semestral, Vol. 7, No. 14 (2020) 58-61

ISSN: 2007-784X

Aplicación de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden a mezclas

Application First-Order Linear Differential Equations to Mixtures

Iván Espinoza Luna [a]

Abstract:

Differential equations have great application in the engineering field because their use as mathematical models of time-transient physical systems. Knowing the response of a physical system and being able to predict its behavior will facilitate the design of stable and reliable environments. The purpose of this paper is to analyse an application of the first order linear differential equations arises when studying a uniform mixing tank with constant volumetric flows and the concentration remains homogeneous in the tank. In the present study a equation to know the amount of solute mass present in the tank at any time was calculate.

Keywords:

Differential equation, engineering, mathematical models, design

Resumen:

Las ecuaciones diferenciales tienen gran aplicación en el campo de la ingeniería debido a su uso como modelos matemáticos de sistemas físicos transitorios en el tiempo. Conocer la respuesta de un sistema físico y poder predecir su comportamiento facilitará el diseño de entornos estables y confiables. El propósito de este trabajo es analizar una aplicación de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden que surge al estudiar un tanque de mezclado uniforme con flujos volumétricos constantes y donde la concentración se mantiene homogénea en el tanque. En el presente estudio se determinó una ecuación para conocer la cantidad de masa de soluto presente en el tanque en cualquier instante de tiempo.

Palabras Clave:

Ecuaciones diferenciales, ingeniería, modelos matemáticos, diseño

Introducción

Este trabajo presenta el análisis de un tanque de mezclado de una solución utilizando ecuaciones diferenciales lineales de primer orden solucionables mediante el uso de un factor de integración.

En la primera parte se analizan las razones de entrada y salida de masa en el tanque para flujos volumétricos distintos, desarrollando como solución una ecuación algebraica solucionable en un instante de tiempo dentro de un intervalo acotado, con la restricción de que el flujo de entada es mayor al de salida por lo que el taque comenzará a derramar solución cuando se llene. Posteriormente considerando flujos iguales, se propone la solución para cualquier instante de tiempo.

Desarrollo

Si se considera un tanque de mezclado por agitación uniforme, que en un tiempo inicial $t = 0$ contiene una solución de una sustancia conocida (salmuera) como el que se muestra en la figura 1, y que se está llenando de la misma solución, pero con una concentración c_1 constante y a un flujo volumétrico $\dot{V}_1$ igualmente constante. Se puede determinar la cantidad de masa $m(t)$ de soluto en el tanque en cualquier instante de tiempo conociendo la concentración c_2 y el flujo volumétrico de salida $\dot{V}_2$.

[a] Autor de Correspondencia, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, https://orcid.org/0000-0001-9272-8506, Email: ivan_espinoza@uaeh.edu.mx

Fecha de recepción: 01/04/2020, Fecha de aceptación: 02/05/2020, Fecha de publicación: 05/07/2020

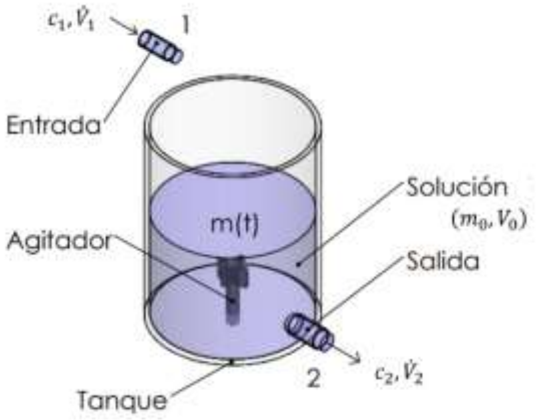

Figura 1. Tanque de mezclado

El análisis comienza con una suposición simple acerca de que la masa de soluto en el tanque $m(t)$ es igual a la diferencia de la masa de soluto que entra m_1 y la masa m_2 que sale del tanque, es decir:

$$m(t) = m_1 - m_2 \quad (1)$$

El incremento Δm durante un intervalo de tiempo Δt se puede expresar como:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{m_1 - m_2}{\Delta t} \quad (2)$$

Si se considera el límite cuando $\Delta t \longrightarrow 0$ lo que indica la razón de cambio instantánea de $m(t)$, la Ec. (2) se convierte en:

$$\frac{dm(t)}{dt} = \frac{dm_1}{dt} - \frac{dm_2}{dt} \quad (3)$$

La Ec. (3) expresa que la razón de entrada de soluto menos la razón de salida de soluto es igual a la razón de cambio de soluto en el tanque, lo cual expone la hipótesis inicial. En el desarrollo de la Ec. (3) primero se analizará la razón de entrada y posteriormente la razón de salida de la solución.

Si la concentración de una solución es igual a la masa del soluto por unidad de volumen de disolvente, la masa m_1 se obtiene mediante la siguiente relación:

$$m_1 = c_1 V_1 \quad (4)$$

Y la razón de cambio en el tiempo:

$$\frac{dm_1}{dt} = \frac{dc_1 V_1}{dt} \quad (5)$$

Debido a que c_1 se considera un parámetro constante en el análisis y que el flujo volumétrico $\dot{V}_1$ es:

$$\frac{dV_1(t)}{dt} = \dot{V}_1 \quad (6)$$

La Ec. (5) se reduce a:

$$\frac{dm_1}{dt} = c_1 \dot{V}_1 \quad (7)$$

Recordando que c_1 y $\dot{V}_1$ se consideran como datos constantes en el análisis. De manera similar para la razón de salida se tiene:

$$\frac{dm_2}{dt} = c_2 \dot{V}_2 \quad (8)$$

Se hace la suposición de que la concentración de salida c_2 de la solución es igual a la concentración en el tanque, por lo que c_2 se puede expresar como:

$$c_2(t) = m(t)/V_T \quad (9)$$

Donde V_T, $c_2(t)$ y $m(t)$ son el volumen de solución en el tanque, la concentración y la masa del soluto en cualquier instante de tiempo t en el tanque respectivamente. El volumen de solución en el tanque V_T es igual al volumen inicial V_0 más el volumen que entra y menos el volumen que sale, es decir:

$$V_T = V_0 + V_1 - V_2 \quad (10)$$

Recordando que el flujo volumétrico constante es:

$$V = \dot{V} t \quad (11)$$

La ecuación (11) se convierte en:

$$V_T = V_0 + (\dot{V}_1 - \dot{V}_2)t \quad (12)$$

Sustituyendo la Ec. (12) en la Ec. (9):

$$c_2(t) = \frac{m(t)}{V_0 + (\dot{V}_1 - \dot{V}_2)t} \quad (13)$$

Y la Ec. (13) usando la relación de la Ec. (8):

$$\frac{dm_2}{dt} = \frac{\dot{V}_2}{V_0 + (\dot{V}_1 - \dot{V}_2)t} m(t) \qquad (14)$$

Finalmente remplazando los valores de la Ec. (3) por los obtenidos en las Ecs. (7) y (14):

$$\frac{dm(t)}{dt} = c_1\dot{V}_1 - \frac{\dot{V}_2}{V_0 + (\dot{V}_1 - \dot{V}_2)t} m(t) \qquad (15)$$

La Ec. (15) se puede reescribir como:

$$\frac{dm(t)}{dt} + \frac{\dot{V}_2}{V_0 + (\dot{V}_1 - \dot{V}_2)t} m(t) = c_1\dot{V}_1 \qquad (16)$$

La Ec. (16) es una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden, primer grado, con coeficientes constantes que modela el sistema de mezclado del tanque de la figura 1 expresando la cantidad de soluto en el tanque en unidad de masa.

La solución de la Ec. (16) se obtiene determinando un factor integrante apropiado, el cual es:

$$e^{\int \frac{\dot{V}_2}{V_0+(\dot{V}_1-\dot{V}_2)t}dt} = e^{\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1-\dot{V}_2} \ln|V_0+(\dot{V}_1-\dot{V}_2)t|}$$
$$= [V_0 + (\dot{V}_1 - \dot{V}_2)t]^{\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1-\dot{V}_2}} \qquad (17)$$

Multiplicado la Ec. (16) por el factor integrante obtenido en la Ec. (17):

$$[V_0 + (\dot{V}_1 - \dot{V}_2)t]^{\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1-\dot{V}_2}} m(t) =$$
$$\int [V_0 + (\dot{V}_1 - \dot{V}_2)t]^{\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1-\dot{V}_2}} \cdot c_1\dot{V}_1 \, dt \qquad (18)$$

La solución de la integral en el segundo miembro de la Ec. (18), aplicando las fórmulas básicas de integración, es:

$$\int [V_0 + (\dot{V}_1 - \dot{V}_2)t]^{\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1-\dot{V}_2}} \cdot c_1\dot{V}_1 \, dt =$$
$$\frac{c_1\dot{V}_1 \cdot [V_0 + (\dot{V}_1 - \dot{V}_2)t]^{\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1-\dot{V}_2}+1}}{(\dot{V}_1 - \dot{V}_2)\left(\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1 - \dot{V}_2} + 1\right)} + C_1 \qquad (19)$$

Simplificando la Ec. (19):

$$\int [V_0 + (\dot{V}_1 - \dot{V}_2)t]^{\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1-\dot{V}_2}} \cdot c_1\dot{V}_1 \, dt =$$
$$c_1[V_0 + (\dot{V}_1 - \dot{V}_2)t]^{\frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_1-\dot{V}_2}} + C_1 \qquad (20)$$

Sustituyendo la Ec. (20) en la Ec. (18) y resolviendo para $m(t)$:

$$m(t) = \frac{c_1[V_0 + (\dot{V}_1 - \dot{V}_2)t]^{\frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_1-\dot{V}_2}} + C_1}{[V_0 + (\dot{V}_1 - \dot{V}_2)t]^{\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1-\dot{V}_2}}} \qquad (21)$$

$$m(t) = c_1[V_0 + (\dot{V}_1 - \dot{V}_2)t]$$
$$+ \frac{C_1}{[V_0 + (\dot{V}_1 - \dot{V}_2)t]^{\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1-\dot{V}_2}}} \qquad (22)$$

Donde C_1 en la Ec. (22) es una constante de integración y se determina considerando que en un tiempo inicial $t = 0$ la masa $m(t)$ es igual a la masa inicial m_0 en el tanque, la condición inicial del sistema se expresa como:

$$t = 0 \longrightarrow m(t) = m_0 \qquad (23)$$

Sustituyendo la relación de la Ec. (23) en la Ec. (22):

$$m_0 = c_1V_0 + \frac{C_1}{V_0^{\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1-\dot{V}_2}}} \qquad (24)$$

El valor de la constante C es:

$$C_1 = (m_0 - c_1V_0)V_0^{\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1-\dot{V}_2}} \qquad (25)$$

Sustituyendo la Ec. (25) en la Ec. (22):

$$m(t) = c_1[V_0 + (\dot{V}_1 - \dot{V}_2)t] \qquad (26)$$
$$+ \frac{(m_0 - c_1V_0)V_0^{\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1-\dot{V}_2}}}{[V_0 + (\dot{V}_1 - \dot{V}_2)t]^{\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1-\dot{V}_2}}}$$

Simplificando en la Ec. (26):

$$m(t) = c_1[V_0 + (\dot{V}_1 - \dot{V}_2)t]$$
$$+ (m_0 - c_1V_0)\left[\frac{V_0}{V_0 + (\dot{V}_1 - \dot{V}_2)t}\right]^{\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1-\dot{V}_2}} \qquad (27)$$

Con la Ec. (27) se puede calcular la masa del soluto $m(t)$ en el tanque de mezclado (figura 1) en un instante de tiempo t considerando los flujos volumétricos de entrada y salida diferentes.

Si se considera $V_{máx}$ como el volumen máximo de solución que puede tener el tanque antes de que se desborde, entonces el tiempo en el que la solución se derramará se puede obtener mediante la Ec. (12) considerando $\dot{V}_1 > \dot{V}_2$:

$$V_{máx} = V_0 + (\dot{V}_1 - \dot{V}_2)t$$
$$t = \frac{V_{máx} - V_0}{\dot{V}_1 - \dot{V}_2} \tag{28}$$

Sustituyendo la Ec. (28) en la Ec. (27):

$$m(t) = c_1 V_{máx} + (m_0 - c_1 V_0)\left(\frac{V_0}{V_{máx}}\right)^{\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1 - \dot{V}_2}} \tag{29}$$

La Ec. (29) se puede utilizar para conocer la cantidad de soluto cuando el tanque está completamente lleno. La concentración en el tanque c_T utilizando la Ec. (13) es:

$$c_T = \frac{m(t)}{V_{máx}} \tag{30}$$

Y sustituyendo la Ec. (29) en la Ec. (30):

$$c_T = c_1 + \frac{(m_0 - c_1 V_0)\left(\frac{V_0}{V_{máx}}\right)^{\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1 - \dot{V}_2}}}{V_{máx}} \tag{31}$$

Flujos volumétricos de salida y entrada iguales

Para el caso en el que los flujos de salida y entrada son iguales y constantes la Ec. Diferencial (16) se expresa como:

$$\frac{dm(t)}{dt} + \frac{\dot{V}_2}{V_0} m(t) = c_1 \dot{V}_1 \tag{32}$$

Y siguiendo el mismo método de solución, el factor de integración es:

$$e^{\int \frac{\dot{V}_2}{V_0} dt} = e^{\frac{\dot{V}_2}{V_0} t} \tag{33}$$

Por lo que la solución de la Ec. (33) se expresa como:

$$e^{\frac{\dot{V}_2}{V_0} t} m(t) = \int e^{\frac{\dot{V}_2}{V_0} t} \cdot c_1 \dot{V}_1 \, dt \tag{34}$$

Resolviendo la Ec. (34):

$$e^{\frac{\dot{V}_2}{V_0} t} m(t) = \frac{V_0 e^{\frac{\dot{V}_2}{V_0} t} \cdot c_1 \dot{V}_1}{\dot{V}_2} + C_2 \tag{35}$$

La constante C_2 se calcula utilizando la condición inicial de la Ec. (23) como:

$$m_0 = \frac{V_0 \cdot c_1 \dot{V}_1}{\dot{V}_2} + C_2,$$
$$C_2 = m_0 - \frac{V_0 \cdot c_1 \dot{V}_1}{\dot{V}_2} \tag{36}$$

Sustituyendo la Ec. (36) en la Ec. (35):

$$e^{\frac{\dot{V}_2}{V_0} t} m(t) = \frac{V_0 \cdot c_1 \dot{V}_1}{\dot{V}_2}\left(e^{\frac{\dot{V}_2}{V_0} t} - 1\right) + m_0 \tag{37}$$

Resolviendo la Ec. (37) para $m(t)$ y considerando que $\dot{V}_1 = \dot{V}_2$:

$$m(t) = c_1 V_0 \left(1 - e^{-\frac{\dot{V}_2}{V_0} t}\right) + m_0 e^{-\frac{\dot{V}_2}{V_0} t} \tag{38}$$

Con la Ec. (38) se puede calcular la masa del soluto $m(t)$ en el tanque de mezclado (figura 1) en cualquier instante de tiempo t considerando los flujos volumétricos de entrada y salida iguales.

Conclusiones

Con la aplicación de la Ec. (27) se puede calcular la masa del soluto $m(t)$ en el tanque de mezclado mostrado en la figura 1 en un instante de tiempo t considerando los flujos volumétricos de entrada y salida diferentes; se debe observar que cuando transcurre un largo periodo de tiempo, es decir, $t \longrightarrow \infty$ y $\dot{V}_1 > \dot{V}_2$ ocurre que $m(t) \longrightarrow \infty$ debido a que el tanque comenzará a desbordarse porque entrará una mayor cantidad de solución en comparación con la solución que sale. La Ec. (27) es válida antes de que se derrame la solución por el tanque, es decir en un tiempo menor al descrito por la Ec. (28).

Con la aplicación de la Ec. (38) se puede calcular la masa del soluto $m(t)$ en el tanque de mezclado en cualquier instante de tiempo t pero considerando ahora los flujos volumétricos de entrada y salida iguales. Se debe tener en cuenta en la Ec. (38) que cuando $\dot{V}_1 < \dot{V}_2$, $m(t) =\longrightarrow -\infty$ puesto que la masa en el tanque será casi nula si se escapa una mayor solución a diferencia de la que entra. Para la Ec. (38), cuando $t \longrightarrow \infty$ la masa en el tanque es $m(t) = c_1 V_0$, es decir que tomara un valor constante y la concentración límite de soluto en el tanque será c_1.

Referencias

[1] Y. A. Cengel y W. J. Palm III, Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias, México: McGraw-Hill, 2014.

[2] R. Y. C. G. Bronson, Ecuaciones Diferenciales, 3 ed., México: Mc Graw Hill, 2008.

[3] I. Carmona Jover y E. Filio López, Ecuaciones diferenciales, 5 ed., México: Pearson Educación, 2011.

[4] C. H. Edwards y D. E. Penney, Ecuaciones diferenciales Y problemas con valor en la frontera, 4 ed., México: Pearson Educación, 2009.

[5] D. G. Zill y W. S. Wright, Matemáticas avanzadas para Ingeniería, México: McGraw-Hill, 2012.

[6] D. G. Zill y M. R. Cullen, Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera, 7 ed., México: Cengage Learning, 2009.