

Torsión

Torsion

Martín Ortiz-Domínguez^a, Arturo Cruz-Avilés^b, Aliza Marcelo-Sandra^c, Angélica M. Uribe-Miguel^d

Abstract:

In this laboratory practical the torsional angle (γ) of a cylindrical rod will be determined, through the expressions of arc length, and in combination with the torsional shear stress and Hooke's law for torsion, estimate the shear modulus (G) of a material.

Keywords:

Shear stress, shear modulus, Hooke's law, angle of torsion

Resumen:

En la presente práctica de laboratorio se determinará el ángulo de torsión (γ) de una varilla cilíndrica, a través de las expresiones de longitud de arco, y en combinación con el esfuerzo cortante torsional y la ley de Hooke para torsión, estimar el módulo al cortante (G) de un material.

Palabras Clave:

Esfuerzo cortante, módulo a cortante, ley de Hooke, ángulo de torsión

Introducción

Lo primero que se considera para poder establecer el significado del término torsión es conocer su origen etimológico. En este sentido, hay que determinar que deriva del latín "torsio", que puede traducirse como "torcer" y que es fruto de dos partes claramente delimitadas: El verbo "torquere", que es sinónimo de "torcer" y "hacer girar". El sufijo "-ion", que es equivalente a "acción y efecto". Torsión es un término que alude al acto y el resultado de torcer. El concepto suele referirse específicamente a aquello que se tuerce en sentido helicoidal (como hélice). En el ámbito de

la ingeniería, la torsión mecánica consiste en la aplicación de un momento de fuerza sobre el eje longitudinal de una pieza prismática. En el ámbito de la ingeniería, la torsión mecánica consiste en la aplicación de un momento de fuerza sobre el eje longitudinal de una pieza prismática (Beléndez, et al. 2002).

La barra de torsión se emplea en los automóviles para conectar los ejes de la suspensión. Esta pieza de acero busca conseguir que el chasis se mueva lo menos posible cuando el vehículo gira. La barra de torsión, de este modo, incrementa la estabilidad del automóvil al conservar sin alteraciones su geometría. Los resortes de

^a Autor de Correspondencia, Licenciatura en Ingeniería Mecánica, Escuela Superior de Ciudad Sahagún, UAHE, Tepeapulco, Hidalgo, México, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4475-9804>, Email: martin_ortiz@uaeh.edu.mx;

^b Licenciatura en Ingeniería Mecánica, Escuela Superior de Ciudad Sahagún, UAHE, Tepeapulco, Hidalgo, México, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0455-1646>, Email: arturo_cruz8085@uaeh.edu.mx;

^c Estudiante de Licenciatura en Ingeniería Mecánica, Escuela Superior de Ciudad Sahagún, UAHE, Tepeapulco, Hidalgo, México, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1777-7399>, Email: ma365982@uaeh.edu.mx;

^d Estudiante de Licenciatura en Ingeniería Mecánica, Escuela Superior de Ciudad Sahagún, UAHE, Tepeapulco, Hidalgo, México, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4165-2219>, Email: ur420515@uaeh.edu.mx;

torsión, por otra parte, trabajan mediante giros. De este modo, almacenan energía mecánica al ser girados, que luego devuelven cuando se liberan. Para determinar el ángulo de torsión de una barra cilíndrica de un material, es necesario considerar el esquema de una máquina de torsión como se presenta en la Figura 1 (Luchéis, s.f.; Gere, 2002; Beléndez, et al. 2002).

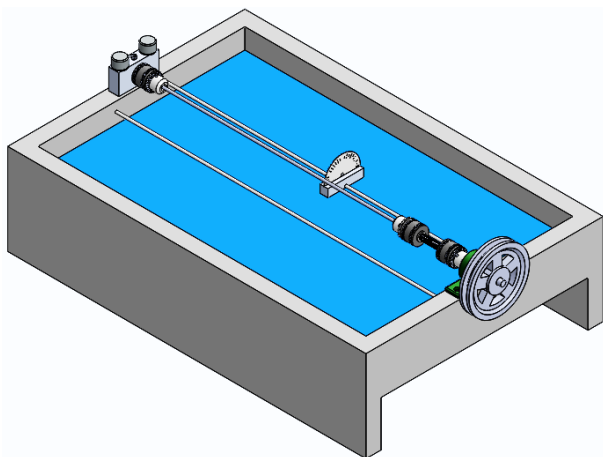


Figura 1. Esquema de una máquina de torsión.

Fuente: Elaboración propia.

Objetivo general

Determinar el ángulo de torsión (γ) de una varilla cilíndrica, a través de las expresiones de longitud de arco, y en combinación con el esfuerzo cortante torsional y la ley de Hooke para torsión, estimar el módulo cortante (G) de un material.

Objetivos específicos

- Determinar el momento polar de inercia de una barra sólida ($J = \pi d^4 / 32$), a través de la consideración de un elemento de área dA y cálculo básico integral, para determinar el esfuerzo cortante torsional.
- Determinar el esfuerzo cortante torsional, a través de la consideración de una pequeña área anular, dA , de la flecha, la definición básica de esfuerzo cortante ($\tau = dF / dA$), la definición del par torsión ($dT = dF \times r$) generado por la fuerza y cálculo básico integral, para determinar el ángulo de torsión (γ).

Aplicaciones prácticas

Industria automotriz

El cigüeñal está fabricado de una aleación de acero. Posee como característica principal una gran resistencia mecánica a la torsión, ya que éste necesita resistir la fuerza de empuje ejercida por los pistones durante el ciclo de expansión (ver Figura 2). Algunos de ellos se construyen de forma hueca en su interior para permitir ser anchos y resistentes conservando un peso liviano. Su función consiste en transformar el movimiento de la biela en movimiento rotatorio. Se encuentra sobre el cárter por debajo de los cilindros, siendo sostenido por casquetes, denominados también cojinetes. Una de las características primordiales del cigüeñal es su equilibrio estático, distribuyendo todo su peso de forma uniforme alrededor del eje; y equilibrio dinámico para eliminar cualquier vibración generada durante su giro a causada de la fuerza ejercida por las bielas. Para este fin se los construye con unas masas metálicas, los contrapesos, que se presentan en posiciones opuestas a la posición de los codos de las bielas. Así al girar cuando el motor está en funcionamiento la fuerza centrífuga generada es totalmente uniforme.

Las partes torneadas por las cuales el cigüeñal es fijado al bloque del motor se denominan casquetes de bancada, mientras que las secciones de acoplamiento de las bielas son conocidas como casquetes o cojinetes de biela. Entre los casquetes de bancada y los casquetes de las bielas se encuentran los llamados codos (también conocidos como brazos del cigüeñal). Presentan además en los codos unos conductos a través de los cuales el lubricante de los casquetes de bancada es dirigido hacia los casquetes de las bielas. Las fuerzas explosivas de los pistones y las de inercia en las piezas de movimiento recíproco son de intensidad variable. Esta variación de torsión produce torsión en el cigüeñal, es decir, se produce vibración a causa de la torsión. La vibración es más notoria en los cigüeñales largos que en los cortos y a determinadas velocidades de giro (velocidad crítica). En algunos motores se usa un amortiguador de vibraciones en la parte delantera del cigüeñal para absorber las vibraciones de éste.

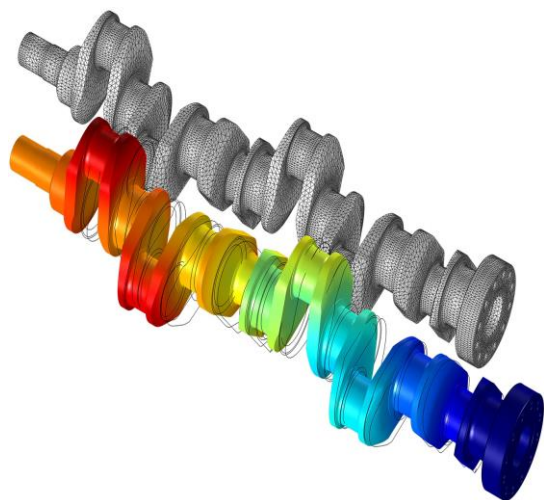


Figura 2. Simulación mecánica de un cigüeñal.

Fuente: Elaboración propia.

En condiciones normales de operación, el diferencial del eje trasero permite que una rueda en el eje gire más rápidamente que la otra cuando se requiera (ejemplo, al tomar una curva) y a la vez transmitir la tracción proveniente del motor a cada rueda. En una curva, la rueda externa a la curva girará a mayor velocidad que la interna, porque recorre mayor distancia. El diferencial funciona perfectamente mientras que las dos ruedas están en contacto con la superficie del piso. Sin embargo, si alguna de ellas pierde el contacto con el piso o patina, la tracción se va a esa rueda haciendo que esta patine mientras que la que está con más adherencia al piso permanecerá inmóvil; el camión no podrá desplazarse debido a esta pérdida de tracción. Su función es transmitir la tracción proveniente de la caja de cambios hacia los dos ejes traseros y a la vez compensar las fuerzas y giros de cada eje. La tracción se transmitirá en mayor porcentaje por el eje que presenta menor resistencia al giro. Sin embargo, la importancia de estudiar la torsión en de los ejes de un vehículo es vital (ver Figura 3), no sólo en lo que se refiere a la propia seguridad del vehículo y sus ocupantes, sino también en lo referente al buen comportamiento de su conjunto estructural, que se traduce en que si el diseño es correcto, se disminuye la probabilidad que ocurran desgastes prematuros, roturas o fallos de otros componentes y sistemas asociados (suspensión, neumáticos, bastidor...).

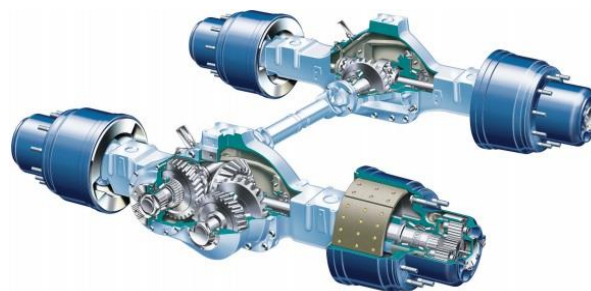


Figura 3. Eje trasero de un camión.

Fuente: Elaboración propia.

Industria metal-mecánica

La metalmecánica en definición abarca las máquinas industriales y herramientas proveedoras de partes a las demás industrias metálicas, siendo el metal y las aleaciones de hierro su insumo básico para la utilización en bienes de capital productivo. La importancia de la Metalmecánica y Maquimetálica radica en que provee de maquinarias e insumos a la mayoría de las actividades económicas para su reproducción, entre ellas, la industria manufacturera, construcción, complejo automotriz, minería, agricultura entre muchas otras.

Un torno (del latín tornus, que a su vez procede de un vocablo griego que significa “vuelta” o “giro”) es una máquina compuesta por un cilindro que gira alrededor de su eje por la acción de ruedas o palancas, y que actúa sobre la resistencia a través de una cuerda que se va enrollando en el cilindro. En la industria metalmecánica, el torno es la herramienta que permite mecanizar piezas de forma geométrica (ver Figura 4). Estos dispositivos se encargan de hacer girar la pieza mientras otras herramientas de corte son empujadas contra su superficie, lo que permite cortar la viruta según las condiciones requeridas.

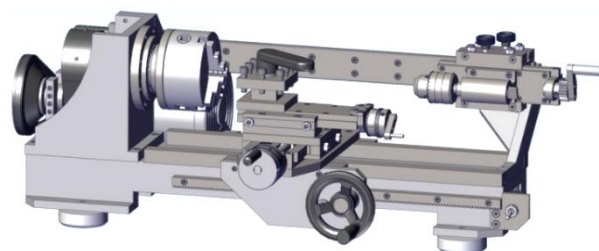


Figura 4. El torno metalúrgico tiene dos ejes de trabajo. La herramienta de corte se desplaza sobre rieles paralelos al eje de giro de la pieza (el eje Z), mientras que, sobre estos rieles, hay otro carro que se mueve en dirección radial a la pieza que se torneá (es decir, sobre el eje X).

Fuente: Elaboración propia.

Suspensión automotriz

Un resorte amortigua los efectos de las irregularidades y los impactos de la carretera, convirtiéndolos en vibraciones. El resorte sometido a torsión forma un vínculo importante entre los componentes individuales de la suspensión, conectando las masas suspendidas y no suspendidas en el vehículo (ver Figura 5). Las masas no suspendidas incluyen los componentes del vehículo situados entre la carretera y el resorte, es decir, las ruedas, el freno y partes de la suspensión y dirección de la rueda. Todos los demás componentes del vehículo se clasifican como masas de resorte e incluyen la carrocería del automóvil, el tren de transmisión y las partes restantes de la suspensión y dirección de la rueda. En términos de la comodidad de la suspensión de un automóvil, la regla básica es que cuanto menor es la relación de masa no suspendida de los resortes, mayor es la comodidad.



Figura 5. Suspensión automotriz.

Fuente: Elaboración propia.

Sierra con reductor de engrane de una sola etapa

Torsión se refiere a la carga de un miembro que tiende a hacerlo girar o torcerlo. Semejante carga se llama par de torsión, momento torsional, par de torsión o par. Cuando se aplica un par de torsión a un miembro se desarrolla un esfuerzo cortante en su interior y se crea una deformación torsional; el resultado es un ángulo de torsión de un extremo del miembro con respecto al otro. Un ejemplo conocido de un miembro torsional es una flecha circular,

propulsada por un motor eléctrico, que suministra potencia por medio de un engrane a otro. La Figura 6 muestra un dibujo de una posible configuración. Su operación se describe a continuación. El motor utiliza energía eléctrica para producir un par de torsión motriz en su flecha de salida. La flecha del motor está conectada a la flecha de entrada del reductor de velocidad de engranes mediante un acoplamiento flexible. Este permite transmitir el par de torsión al mismo tiempo que elimina cualquier tendencia de flexionar la flecha o hacer que se desarrollen cargas axiales. Cuando el motor gira al mismo tiempo que desarrolla un par de torsión, transmite potencia a las flechas del sistema mostrado (Gere y Timoshenko, 1998; Sthyamoorthy, 1998; Timoshenko y Goondier, 1998).

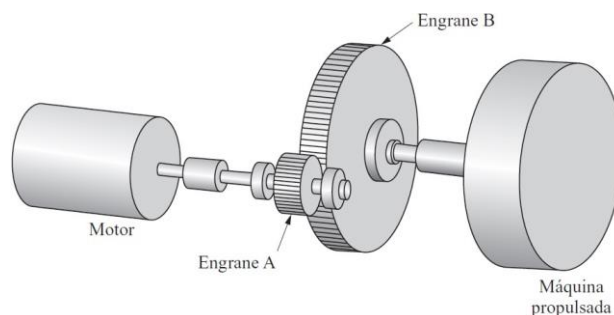


Figura 6. Disposición general de la propulsión de una sierra con reductor de engranes de una sola etapa.

Fuente: Elaboración propia.

Teoría

Deducción del ángulo de torsión

En la Figura 7 se observa que, para valores pequeños de γ , puede expresarse la longitud de arco AA' como $AA' = L\gamma$. Pero, por otra parte, se tiene que $AA' = r\phi$.

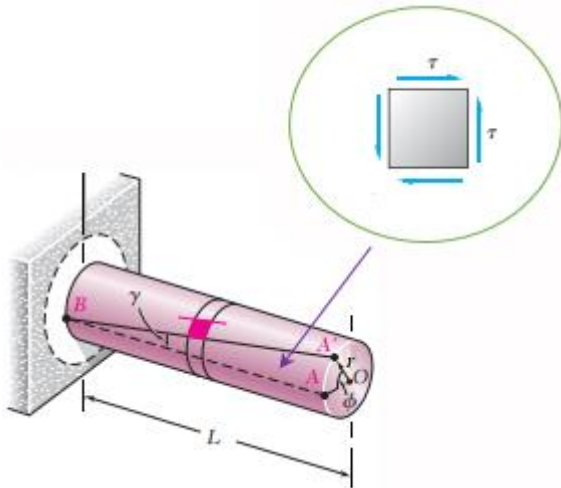


Figura 7. Esfuerzo cortante torsional en una barra circular.

Fuente: Elaboración propia.

De la Figura 7, se tiene que:

$$\tan \gamma = \frac{AA'}{L} \quad (1)$$

Despejando a AA' de la Ec. (1), se tiene:

$$AA' = L \tan \gamma \quad (2)$$

Por otro lado, se tiene que se puede expresar en una serie de Taylor de la siguiente manera:

$$\tan \gamma = \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} = \frac{\gamma - \frac{\gamma^3}{3!} + \frac{\gamma^5}{5!} - \frac{\gamma^7}{7!} + \frac{\gamma^9}{9!} + \dots}{1 - \frac{\gamma^2}{2!} + \frac{\gamma^4}{4!} - \frac{\gamma^6}{6!} + \frac{\gamma^8}{8!} - \frac{\gamma^{10}}{10!} + \dots} \quad (3)$$

Si el ángulo de torsión $\gamma \ll 1$ (mucho menor que uno) entonces la Ec. (3), se transforma en:

$$\tan \gamma = \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} = \frac{\gamma}{1} = \gamma \quad (4)$$

Sustituyendo la Ec. (4), en la Ec. (2), se tiene:

$$AA' = L \gamma \quad (5)$$

Asimismo en la tapa de la barra circular de la Figura 7, obtenemos la siguiente expresión:

$$\tan \phi = \frac{AA'}{r} \quad (6)$$

Despejando a AA' de la Ec. (6), se tiene:

$$AA' = r \tan \phi \quad (7)$$

Aplicando la misma técnica de la Ec. (3) en la Ec. (7), se obtiene:

$$AA' = r \phi \quad (8)$$

Ahora lo que hacemos es igualar las Ecs. (5) y (8), de la siguiente manera:

$$L \gamma = r \phi \quad (9)$$

Despejando a γ de la Ec. (9), se obtiene:

$$\gamma = \frac{r \phi}{L} \quad (10)$$

Ahora vamos a hacer un análisis de los radios interior (r) y exterior (c) de la flecha que se muestra en la Figura 8.



Figura 8. Esfuerzo cortante torsional en una barra circular.

Fuente: Elaboración propia.

Si

$$r = c \quad (11)$$

El ángulo de torsión es máximo ($\gamma_{m\acute{a}x}$), es decir. Si sustituimos la Ec. (11) en la Ec. (10), encontramos que:

$$\gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L} \quad (12)$$

De la Ec. (10), despejamos a:

$$\frac{\phi}{L} = \frac{\gamma}{r} \quad (13)$$

De la misma forma lo hacemos en la Ec. (12):

$$\frac{\phi}{L} = \frac{\gamma_{\max}}{c} \quad (14)$$

Igualando las Ecs. (13) y (14), se tiene:

$$\gamma = \frac{r}{c} \gamma_{\max} \quad (15)$$

Si a la Ec. (15), la multiplicamos por el módulo al cortante (G), en ambos la dos, se tiene:

$$G\gamma = \frac{r}{c} G\gamma_{\max} \quad (16)$$

La Ec. (33) se conoce como la ley de Hooke para torsión, es decir:

$$\tau = \frac{r}{c} \tau_{\max} \quad (17)$$

Es de hacerse notar que el esfuerzo cortante τ actúa de manera uniforme en una pequeña área anular, dA , de la flecha, como se ilustra en la Figura 9. Ahora bien, como la fuerza es igual al esfuerzo por el área, la fuerza en el área dA es:

$$dF = \tau dA = \underbrace{\tau_{\max}(r/c)}_{\text{esfuerzo}} \times \underbrace{dA}_{\text{área}} \quad (18)$$

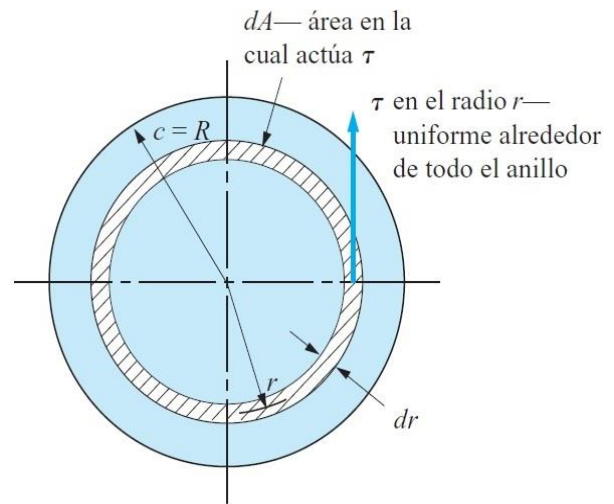


Figura 9. Esfuerzo cortante torsional τ en el radio r que actúa en el área.

Fuente: Elaboración propia.

El siguiente paso es considerar que el par de torsión dT generado por esta fuerza es el producto de dF por la distancia radial a dA . Entonces

$$dT = dF \times r = \underbrace{\tau_{\max}(r/c)}_{\text{fuerza}} dA \times \underbrace{r}_{\text{radio}} = \tau_{\max}(r^2/c) dA \quad (19)$$

Esta ecuación es el par de torsión resistente interno desarrollado en el área pequeña dA . El par de torsión total en toda la superficie sería la suma de todos los pares de torsión individuales que actúan en todas las áreas de la sección transversal. El proceso de sumar se realiza mediante la técnica matemática de integración, ilustrada como sigue:

$$T = \int_A dT = \int_A \tau_{\max} \frac{r^2}{c} dA \quad (20)$$

En el proceso de integración, los términos constantes tales como τ_{\max} y c pueden salir del signo de integración, y la ecuación se escribe como

$$T = \frac{\tau_{\max}}{c} \int_A r^2 dA \quad (21)$$

En mecánica, el término $\int r^2 dA$ recibe el nombre de momento polar de inercia y se identifica con el símbolo J . La Ec. (21) puede escribirse como

$$T = \frac{\tau_{m\acute{a}x} J}{c} \quad (22)$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{Tc}{J} \quad (23)$$

Combinando las Ecs. (16) y (23), se tiene:

$$G\gamma \frac{c}{r} = \frac{Tc}{J} \quad (24)$$

$$G = \frac{Tr}{J\gamma} \quad (25)$$

Sustituyendo la Ec. (13) en la Ec. (25), se obtiene:

$$G = \frac{TLr}{J\phi r} = \frac{TL}{J\phi} \quad (26)$$

Materiales y procedimiento

La Figura 10 muestra un aparato comercialmente disponible que facilita la prueba y demostración. Se aplica un par de torsión colgando pesos conocidos en el extremo de un brazo unido al extremo de la varilla o tubo hueco que está libre para girar. El par de torsión aplicado simplemente se calcula con la definición básica de par de torsión.

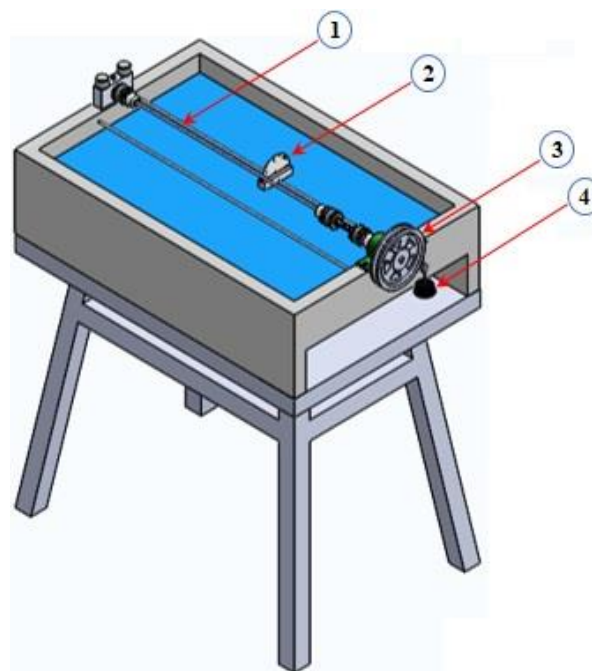


Figura 10. Descripción general del equipo de torsión. 1: Varilla o tubo hueco que se va a someter a acción de torsión, 2: Transportador de acero inoxidable que permite estimar el ángulo de torsión de un miembro sometido a torsión, 3: Polea de aluminio conectada a la varilla o tubo hueco donde se aplica el par de torsión, 4: Porta pesas donde se colocan las pesas para provocar la torsión en la varilla o tubo hueco.

Fuente: Elaboración propia.

1.- Varilla o tubo hueco: se emplea para someterse a la acción de la torsión.



Figura 11. Varilla o tubo hueco.

Fuente: Elaboración propia.

2.- Transportador de acero inoxidable: es un instrumento que mide ángulos en grados y que viene en dos

presentaciones básicas: Transportador con forma semicircular graduado en 180° o 360°.



Figura 12. Transportador de acero inoxidable.

Fuente: Elaboración propia.



Figura 14. Báscula de precisión.

Fuente: Elaboración propia.

3.- Porta pesas: es usado para colocar las pesas para provocar la torsión en la varilla o tubo hueco.



Figura 13. Porta pesas.

Fuente: Elaboración propia.

5.- Polea: se emplea para transmitir el par torsión. Consiste en una rueda con un canal en su periferia, por el cual pasa una cuerda que gira sobre un eje central.



Figura 15. Polea.

Fuente: Elaboración propia.

4.- Báscula de precisión: permite determinar con precisión las masas con geometría cilíndrica. Asimismo, podemos obtener una legibilidad en el rango de 1 mg (0.001 g) a 1 g, o de 0-3 decimales.

Procedimiento experimental

Equipo de protección individual a utilizar:

- Bata blanca
- Botas de seguridad
- Guantes de látex blandos
- Gafas de protección

Aspectos importantes del dispositivo a utilizar (ver Figura 10):

Para efectuar mediciones cuantitativas se requiere una estructura rígida para mantener fijo un extremo de un miembro, tal como una varilla o un tubo cilíndrico, al mismo tiempo que se permite que el otro se mantenga en su lugar, aunque libre para girar a medida que se aplica un par de torsión a dicho extremo. Se requiere una forma de medir el par de torsión aplicado y la deformación torsional (ángulo de torsión). La Figura 10 muestra un aparato comercialmente disponible que facilita la prueba y demostración. Se aplica un par de torsión colgando pesos conocidos en el extremo de un brazo unido al extremo de la varilla que está libre para girar. El par de torsión aplicado simplemente se calcula con la definición básica de par de torsión,

$$T = Fr \quad (27)$$

Donde:

T = Par de torsión aplicado

F = Fuerza aplicada en el extremo del brazo

r = Distancia perpendicular desde la línea de acción de la fuerza hasta el centro de la varilla

1. Asegurarse de que no tenga ninguna carga (predeterminada) en el porta pesas antes de medir el torque.
2. Limpiar la mesa de trabajo.

Procedimiento para llevar a cabo el experimento de determinación del ángulo de torsión γ . Lee cuidadosamente los siguientes pasos, si tienes alguna duda pregunta a tu docente o encargado de laboratorio correspondiente:

1. Leer el manual teórico de la práctica proporcionado por el docente o encargado de laboratorio para entender los principios fundamentales de la teoría de torsión.
2. Visualizar y conocer todos los componentes del dispositivo (ver Figura 10).
3. La deformación angular se mide sobre una escala de transportador fijo con un indicador sujeto a la varilla.
4. Diseñe un experimento con el cual pueda registrar los datos siguientes:
 - Descripción general de la varilla o tubo que se va a someter a acción de torsión.
 - Material del cual está hecha la varilla.
 - Diámetro de la varilla junto con el diámetro interno, si se utiliza un tubo hueco.
 - Longitud entre el punto donde la varilla se mantiene fija y el punto donde se aplica el par de torsión.
5. Sin que se coloque masa alguna en el porta pesas, determine la posición cero del indicador apoyándose en la graduación del transportador.
6. Coloca en el porta pesas la primera masa que se indica en la Tabla 1.
7. Con la balanza determinar la masa de cada una de las pesas calibradas.
8. Lentamente lleva la masa hasta su nueva posición de equilibrio (evita que oscile).
9. En la Tabla 1, incluya lo siguiente por cada punto de dato:
 - Fuerza incremental aplicada en el brazo.
 - Longitud del brazo del momento de torsión.
 - Longitud L a lo largo de la superficie externa de la varilla.
 - Par de torsión calculado ($T = Fr$).
 - Ángulo de torsión.
10. Retira la masa.
11. Repite los pasos del 5 al 10.

Resultados

Las lecturas se pueden tabular en la forma descrita en las Tabla 1. Los resultados se pueden calcular de acuerdo con la teoría dada.

Tabla 1. Datos de ensayos posibles con diferentes rangos de carga-ángulo de torsión (γ).

Fuente: Elaboración propia.

Número de ensayos posibles	Masa ideal pesas (g)	Fuerza incremental aplicada al brazo (N)	Longitud del brazo del momento de torsión (m)	Longitud a lo largo de la superficie externa de la varilla (m)	Par de torsión $T = \vec{F} \times \vec{r}$ (N.m)	Ángulo de torsión γ (N.m)	Módulo al cortante del material $G = Tr / J\gamma$ (Pa)
1	5						
2	10						
3	15						
4	20						
5	25						
6	30						
7	35						
8	40						

Simulación

Con ayuda del software ANSYS (es una herramienta simulación CAE multifísico para análisis y simulación por elementos finitos (FEA). Incluye las fases de pre-proceso, resolución y post-proceso en una única plataforma de trabajo. Ansys ejecuta análisis a piezas o conjuntos usados en ingeniería y diseño mecánico que están sometidos a uno o varios fenómenos físicos de manera individual o simultánea) se hace una simulación de torsión.

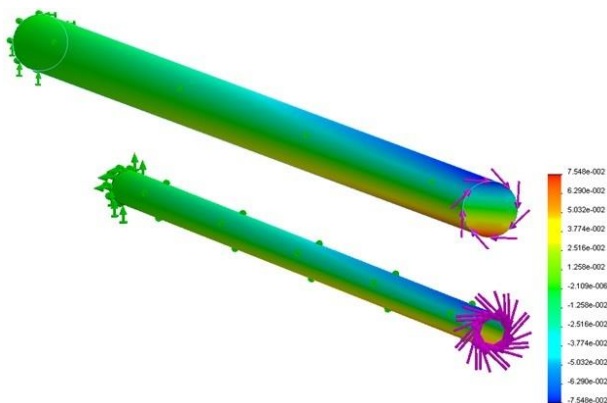


Figura 16. Simulación de torsión con ANSYS.

Fuente: Elaboración propia.

Conclusiones

Se determinó teóricamente el momento polar de inercia de una barra sólida ($J = \pi d^4 / 32$), a través de la consideración de un elemento de área dA y cálculo básico integral, para determinar el esfuerzo cortante torsional y el esfuerzo torsional, a través de la consideración de un elemento de área anular dA , de la flecha, la definición básica de esfuerzo cortante ($\tau = dF / dA$), la definición de par torsión ($dT = dF \times r$) generado por la fuerza y cálculo básico integral, para determinar el ángulo de torsión (γ)

Referencias

- Beléndez, T., Neipp, C. y Beléndez, A., (2002). Revista Brasileira de Ensino de Física, 24; 399.
- Beléndez, T., Neipp, C. y Beléndez, A., (2002). Eur. J. Phys., 29; 371.
- Gere J. (2002). *Mecánica de Materiales*. 5ª edición. Thomson Learning Editores.
- Gere J. y Timoshenko, S. (1998). *Mecánica de Materiales*, Thomson Editores, México.
- Luchéis, D. (S.F.). *Ensayos Mecánicos de los Materiales Metálicos*, Labor.
- Sthyamoorthy, M., (1998). *Nonlinear Analysis of Structures*, CRC Press LLC, Boca Raton.
- Timoshenko, S. y Goodier, J. N. (1998). *Theory of Elasticity*, Mc Graw Hill, New York.