

Aplicaciones de la relación afín e ideal en Álgebra Computacional

Applications of the affine and ideal relation in Computational Algebra

Milagros E. Carrasco Merlo ^a, Modesta E. Peralta Centeno ^b, Clifford J. Herrera Castrillo ^c

Abstract:

The objective of this scientific essay is the study of the application of the affine and ideal relationship in computational algebra, on what is an affine subspace (or linear variety) working with vectors to solve problems in abstract algebra, data analysis providing skills for the understanding of interactive tools to teach mathematics that are fundamental in computational algebra, especially in areas such as algebraic geometry and number theory, and to better understand the relationships between different geometric structures. In algebraic geometry, affine relations help model curves and surfaces of Euclidean space where straight lines are preserved under affine transformations while ideals are used to study algebraic properties that allow the study of points at infinity, covering a wide range of problems and areas of study including physics, chemistry, engineering and computer science fundamental to the analysis and manipulation of algebraic structures using computational techniques.

Keywords:

Application, tools, relationships, geometry

Resumen:

El objetivo de este ensayo científico es el estudio de la aplicación de la relación afín e ideal en álgebra computacional, sobre lo que es un subespacio afín (o variedad lineal) trabajando con vectores para resolución de problemas en álgebra abstracta, análisis de datos brindando habilidades para la comprensión de herramientas interactivas para enseñar matemática que son fundamentales en álgebra computacional especialmente en áreas como geometría algebraica y teoría de números, y entender mejor las relaciones entre diferentes estructuras geométricas. En geometría algebraica, las relaciones afines ayudan a modelar curvas y superficies del espacio euclidiano donde las líneas rectas se conservan bajo transformaciones afines mientras que los ideales son utilizados para estudiar propiedades algebraicas que permite el estudio de los puntos en el infinito, abarcando una amplia gama de problemas y áreas de estudios incluyendo la física, la química, ingeniería y ciencias de la computación fundamentales para el análisis y la manipulación de estructuras algebraicas mediante técnicas computacionales.

Palabras Clave:

Aplicación, herramientas, relación, geometría.

Introducción

El álgebra computacional se ha consolidado como un campo fundamental dentro de las matemáticas aplicadas (Mairena Aráuz et al., 2024), orientado al estudio y manipulación

simbólica de estructuras algebraicas mediante algoritmos implementados en sistemas computacionales. Esta disciplina permite abordar problemas complejos que surgen en diversas áreas del conocimiento, tales como la ingeniería, la física, la criptografía y la ciencia de datos, donde el tratamiento algebraico de la información resulta esencial (Cox et al., 2015).

^a Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua (UNAN-Managua) | Centro Universitario Regional Estelí (CUR-Estelí) | Estelí-Estelí | Nicaragua, <https://orcid.org/0009-0006-1625-9860>, Email: milagroscarrascomerlo@gmail.com

^b Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua (UNAN-Managua) | Centro Universitario Regional Estelí (CUR-Estelí) | Estelí-Estelí | Nicaragua, <https://orcid.org/https://orcid.org/0009-0000-9148-1740>, Email: modesperalta2020@gmail.com

^c Autor de Correspondencia, Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua (UNAN-Managua) | Centro Universitario Regional Estelí (CUR-Estelí) | Estelí-Estelí | Nicaragua, <https://orcid.org/0000-0002-7663-2499>, Email: cliffor.herrera@unan.edu.ni

En este contexto, el estudio de la relación afín y la teoría de ideales adquiere especial relevancia, ya que ambas constituyen herramientas fundamentales para comprender la estructura de los sistemas algebraicos y su interpretación geométrica (Blandón-Chavarría et al., 2025). Tal como plantean las autoras del presente trabajo, el uso de estructuras afines permite trabajar con vectores y relaciones entre puntos, facilitando la modelación de problemas matemáticos en distintos entornos, especialmente en aquellos donde intervienen representaciones geométricas y analíticas. En este sentido, la noción de espacio afín generaliza las propiedades de los espacios vectoriales al eliminar la necesidad de un origen fijo, lo que amplía su aplicabilidad en diversos problemas de modelación (Hartshorne, 1977).

Por otra parte, el concepto de ideal en álgebra abstracta proporciona una herramienta potente para la resolución de sistemas de ecuaciones polinomiales, así como para el análisis estructural de anillos (Benavides Mendoza et al., 2026; Alaniz Martínez et al., 2026). Como señalan las autoras, los ideales permiten descomponer problemas algebraicos complejos en componentes más manejables, lo que resulta clave en la factorización polinómica y en la comprensión del comportamiento de funciones algebraicas. Esta perspectiva se fortalece en el ámbito del álgebra computacional, donde los ideales se convierten en el eje central para el desarrollo de algoritmos eficientes orientados a la resolución de sistemas algebraicos (Adams & Loustaunau, 1994).

Asimismo, la conexión entre la geometría y el álgebra se hace evidente a través del estudio de las variedades algebraicas, las cuales se definen como el conjunto de soluciones de sistemas de ecuaciones polinomiales. Desde esta perspectiva, las relaciones afines permiten modelar estructuras geométricas en espacios euclidianos, mientras que los ideales facilitan el análisis algebraico de dichas estructuras (Suárez-Rugama & Herrera Castrillo, 2025). Esta dualidad entre lo geométrico y lo algebraico se formaliza mediante resultados fundamentales como el teorema de Nullstellensatz, que establece una correspondencia entre ideales y conjuntos algebraicos, constituyendo uno de los pilares de la geometría algebraica moderna (Eisenbud, 1995).

En coherencia con lo anterior, se destaca que el desarrollo del álgebra computacional ha permitido la creación de herramientas tecnológicas que facilitan la resolución de problemas matemáticos mediante sistemas especializados como CoCoA, Singular y Mathematica, los cuales implementan algoritmos avanzados para el manejo de polinomios, ideales y estructuras algebraicas. Estas aplicaciones no solo optimizan los procesos de cálculo, sino que también fortalecen la enseñanza de las matemáticas al permitir una interacción más dinámica con los conceptos abstractos (Herrera-Castrillo, 2024; Herrera & López, 2025; Manzanares-Balmaceda et al., 2025).

Desde una perspectiva formativa, resulta importante señalar que el aprendizaje de estos conceptos contribuye significativamente al desarrollo del pensamiento lógico-matemático, permitiendo a

los estudiantes establecer conexiones entre el lenguaje algebraico y situaciones reales. De esta manera, el álgebra computacional no solo se configura como una herramienta técnica, sino también como un medio para potenciar competencias analíticas y de resolución de problemas en distintos contextos educativos y profesionales.

En este sentido, el presente ensayo tiene como objetivo analizar las aplicaciones de la relación afín y los ideales en el ámbito del álgebra computacional, destacando su importancia tanto en la resolución de problemas matemáticos como en el desarrollo de herramientas tecnológicas que contribuyen al avance del conocimiento científico.

Desarrollo

Relación afín y espacio afín

Para comprender la relación afín en el contexto del álgebra computacional es necesario partir de la noción de espacio afín. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K (por ejemplo, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o $\mathbb{Q}$). Un espacio afín A asociado a V es un conjunto de puntos sobre el cual se define una operación de diferencia entre puntos que produce vectores de V (Madueño Sanz, 2023).

Esta relación se expresa mediante la ecuación

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P \quad (1)$$

donde:

- $P, Q \in A$ son puntos del espacio afín,
- $\overrightarrow{PQ} \in V$ es el vector desplazamiento que va de P a Q ,
- el símbolo “ $-$ ” representa la operación que asigna a dos puntos un vector.

A diferencia de los espacios vectoriales, en un espacio afín no existe un origen privilegiado, lo cual permite modelar situaciones geométricas más generales (Herrera Castrillo, 2025).

Si se fija un punto $P_0 \in A$, cualquier otro punto $P \in A$ puede escribirse como:

$$P = P_0 + v \quad (2)$$

donde:

- $v \in V$ es un vector,
- el símbolo “ $+$ ” indica la acción del espacio vectorial sobre el espacio afín.

Como se ilustra en la Figura 1, cada punto del espacio afín puede interpretarse como una traslación de un vector respecto a un punto de referencia

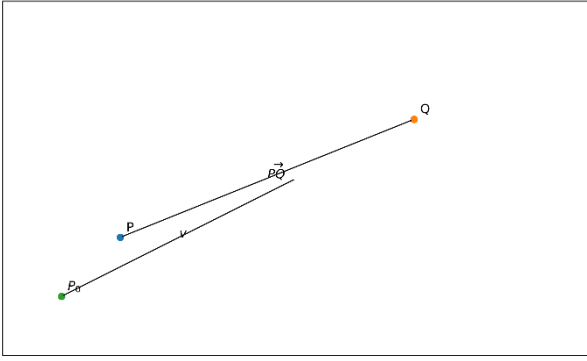


Figura 1. Representación de un espacio afín como traslación de un espacio vectorial

Ideales en anillos de polinomios

Sea K un cuerpo y $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ el anillo de polinomios en n variables (Kolman & Hill, 2006).

Un subconjunto $I \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ es un ideal si cumple:

$$f, g \in I \Rightarrow f + g \in I \quad (3)$$

$$f \in I, h \in K[x_1, \dots, x_n] \Rightarrow hf \in I \quad (4)$$

donde:

- f, g, h son polinomios,
- “ $\in$ ” significa “pertenece a”,
- “ $\subseteq$ ” indica inclusión de conjuntos.

Los ideales son conjuntos cerrados bajo suma y multiplicación por elementos del anillo (Cox et al., 2015).

Si un ideal es generado por un conjunto finito de polinomios $\{f_1, \dots, f_m\}$, se escribe:

$$I = \langle f_1, f_2, \dots, f_m \rangle \quad (5)$$

donde:

- “ $\langle \cdot \rangle$ ” denota el ideal generado,
- los f_i son los generadores del ideal.

Variedades algebraicas y sistemas de ecuaciones

Sea $S \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$. La variedad algebraica afín asociada se define como:

$$V(S) = \{a \in K^n \mid f(a) = 0, \forall f \in S\} \quad (6)$$

Donde:

- K^n es el espacio de n -tuplas,
- $a = (a_1, \dots, a_n)$ es un punto,
- $f(a)$ representa la evaluación del polinomio en ese punto,

- “ $\forall$ ” significa “para todo”.

Esta ecuación formaliza la idea original: resolver un sistema de ecuaciones es encontrar los puntos que anulan todos los polinomios (Lluis, 1962).

Por ejemplo, el sistema

$$f_1(x, y) = 0 \quad (7)$$

$$f_2(x, y) = 0 \quad (8)$$

Define la intersección de dos curvas en el plano. Como se muestra en la Figura 2, la solución del sistema corresponde a la intersección de las curvas definidas por las ecuaciones (7) y (8).

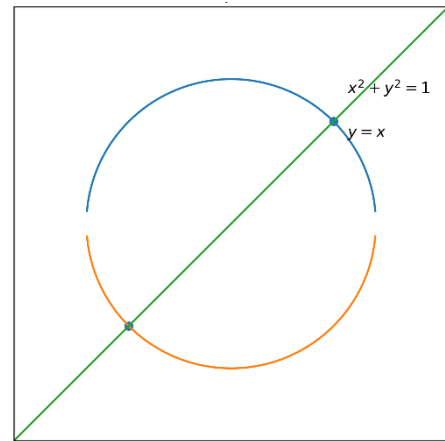


Figura 2. Intersección de curvas que define una variedad algebraica

Término principal e ideales monomiales

Dado un orden monomial (por ejemplo, lexicográfico), el término principal de un polinomio f se define como:

$$LT(f) \quad (9)$$

donde:

- “LT” proviene de *leading term* (término líder),
- representa el monomio de mayor orden en f .

El conjunto de términos principales de un ideal I es:

$$LT(I) = \{LT(f) \mid f \in I\} \quad (10)$$

y el ideal generado por ellos:

$$\langle LT(I) \rangle \quad (11)$$

Este concepto es clave para el paso hacia bases de Gröbner (Mairena Aráuz et al., 2024).

Bases de Gröbner y resolución algorítmica

Las bases de Gröbner constituyen el núcleo computacional del enfoque desarrollado en el manuscrito.

Un conjunto $G = \{g_1, \dots, g_t\} \subset I$ es una base de Gröbner si:

$$\langle \text{LT}(g_1), \dots, \text{LT}(g_t) \rangle = \langle \text{LT}(I) \rangle \quad (12)$$

donde:

- los g_i son generadores especiales del ideal,
- esta igualdad garantiza que el sistema puede simplificarse.

Este resultado permite transformar sistemas complejos en otros equivalentes pero más simples, lo que justifica su implementación en sistemas computacionales (Alaniz Martínez et al., 2026). En la Tabla 1 se presentan algunos sistemas de álgebra computacional utilizados para implementar estos algoritmos

Tabla 1. Sistemas de álgebra computacional y aplicaciones

Sistema	Tipo	Aplicación principal	URL
CoCoA	Especializado	Ideales, álgebra conmutativa y polinomios	https://cocoa.dima.unige.it
Singular	Especializado	Geometría algebraica, singularidades y bases de Gröbner	https://www.singular.uni-kl.de
Mathematica	Propósito general	Cálculo simbólico, modelación matemática y visualización	https://www.wolfram.com/mathematica

Relación entre ideales y geometría algebraica

Uno de los resultados más importantes que fortalece la base teórica del trabajo es el teorema de Nullstellensatz:

$$I(V(I)) = \sqrt{I} \quad (13)$$

donde:

- $I(V(I))$ es el ideal de los polinomios que se anulan en la variedad,
- $\sqrt{I}$ es el radical del ideal,
- el radical incluye todos los polinomios cuya potencia pertenece a I .

Este resultado formaliza la correspondencia entre estructuras algebraicas y geométricas, consolidando la idea planteada en el manuscrito original.

Aplicaciones en álgebra computacional

El álgebra computacional permite resolver sistemas mediante algoritmos eficientes (Hartshorne, 1977). Por ejemplo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad (14)$$

donde:

- la primera ecuación representa una circunferencia,
- la segunda una recta,
- su solución corresponde a los puntos de intersección.

Estos sistemas pueden resolverse mediante sustitución, eliminación o bases de Gröbner, lo cual evidencia la utilidad práctica del enfoque.

Conclusiones

El estudio de la relación afín y la teoría de ideales en el ámbito del álgebra computacional permite comprender de manera integrada la conexión entre estructuras algebraicas y su interpretación geométrica. La formalización de los espacios afines como conjuntos de puntos asociados a espacios vectoriales, sin un origen fijo, amplía las posibilidades de modelación matemática en contextos diversos.

Por otra parte, los ideales en anillos de polinomios constituyen una herramienta fundamental para la resolución de sistemas algebraicos, al facilitar su análisis estructural y su tratamiento mediante procedimientos algorítmicos. En este sentido, el uso de bases de Gröbner representa un avance significativo, ya que permite simplificar sistemas complejos y hacer viable su resolución computacional.

Asimismo, la noción de variedad algebraica como conjunto de soluciones de sistemas polinomiales consolida la relación entre álgebra y geometría, formalizada a través de resultados como el teorema de Nullstellensatz, que establece correspondencias entre ideales y conjuntos algebraicos.

En el plano aplicado, los sistemas de álgebra computacional posibilitan la implementación eficiente de estos conceptos, contribuyendo a la resolución de problemas en distintos campos científicos y tecnológicos. En consecuencia, el estudio del álgebra computacional no solo fortalece el rigor matemático, sino que también favorece el desarrollo del pensamiento lógico y la capacidad de análisis en la resolución de problemas complejos.

Referencias

- [1] Adams, W., & Loustaunau, P. (1994). *An Introduction to Gröbner Bases*. Graduate Studies in Mathematics. <https://bookstore.ams.org/gsm-3>

- [2] Alaniz Martínez, O. D., Canales Espinoza, Á. J., & Herrera Castrillo, C. J. (2026). Desarrollo del conocimiento computacional en aplicaciones de la implicitización polinomial. *Padi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*, 13(26), 10-15. <https://doi.org/10.29057/icbi.v13i26.14408>
- [3] Benavides Mendoza, D., Rugama Hernández, M. d., & Herrera Castrillo, C. J. (2026). Algoritmo de Buchberger en el cálculo de bases de Gröbner. *Boletín Científico INVESTIGIUM de la Escuela Superior de Tizayuca*, 11(22), 33–38. <https://doi.org/10.29057/esti.v11i22.15595>
- [4] Blandón-Chavarría, Z. J., Ortez-Peralta, A. J., & Herrera-Castrillo, C. J. (2025). Fundamentos y Aplicaciones de las Bases de Gröbner en la Resolución de Ecuaciones Polinomiales. *Ciencia e Interculturalidad*, 34(2), 59-75. <https://doi.org/10.5377/rci.v34i2.20537>
- [5] Cox, D., Little, J., & O'Shea, D. (2015). Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-16721-3>
- [6] Eisenbud, D. (1995). *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*. Springer. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4612-5350-1>
- [7] Hartshorne, R. (1977). *Algebraic Geometry*. Springer. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4757-3849-0>
- [8] Herrera Castrillo, C. J. (2025). Reflexiones y retos en la enseñanza del Análisis Matemático: Un Estudio comparativo en Física-Matemática y Matemática. *Revista Educación*, 23(26), 11-29. <https://doi.org/10.51440/unsch.revistaeducacion.2025.26.541>
- [9] Herrera, C. J., & López, O. S. (2025). Retos y desafíos en el aprendizaje del álgebra polinomial y lineal en la carrera de Matemáticas. *Revista Multi-Ensayos*, 11(21), 42-64. <https://doi.org/10.5377/multiensayos.v11i21.20081>
- [10] Herrera-Castrillo, C. J. (2024). Eficacia del sistema computacional CoCoA para la organización del pensamiento oral y escrito. *Revista Científica Esteli*, 13(2), 72-92. <https://doi.org/10.5377/esteli.v13i2.19809>
- [11] Kolman, B., & Hill, D. (2006). *Álgebra Lineal*. Pearson Educación. <https://www.cs.buap.mx/~sandoval/ALaverano2013/AlgebraLineal.pdf>
- [12] Lluís, E. (1962). Variedades algebraicas con ciertas condiciones en sus tangentes. *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, 7(2), 47-56. [https://www.boletin.math.org.mx/pdf/2/7/BSMM\(2\).7.47-56.pdf](https://www.boletin.math.org.mx/pdf/2/7/BSMM(2).7.47-56.pdf)
- [13] Madueño Sanz, M. (2023). Geometría del conjunto de rectas del espacio tridimensional real. *[Tesis de Grado]*. Universidad de Cantabria. <https://repositorio.unican.es/xmlui/handle/10902/29850>
- [14] Mairena Aráuz, J. J., Hudiel Fuentes, I. L., & Herrera-Castrillo, C. J. (2024). Teorema de los ceros de Hilbert: aplicaciones de sus versiones débiles y fuertes. *Ciencias matemáticas*, 38(1), 85-95. <https://zenodo.org/records/15292987/files/RCM+Vol.37,+No.1,+2024,+pp.85-95.pdf?download=1>
- [15] Manzanares-Balmaceda, A. I., García-Castro, M., Flores-Vallejos, D. I., Briones-Rugama, Y. Y., & Herrera-Castrillo, C. J. (2025). Uso del Máximo Común Divisor en el análisis de polinomios univariados en Álgebra Computacional. *Revista Oratores*, 1(23), 146–166. <https://doi.org/10.37594/oratores.n23.1814>
- [16] Suárez-Rugama, E. A., & Herrera Castrillo, C. J. (2025). Proceso de normalización de las Bases de Datos relacionales. *Ciencia Huasteca Boletín Científico de la Escuela Superior de Huejutla*, 13(26), 35–39. <https://doi.org/10.29057/esh.v13i26.13474>