https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/xikua/issue/archive

XIKUA Boletín Científico de la Escuela Superior de Tlahuelilpan

Publicación semestral, Vol. 13, No. 26 (2025) 45-49

Xikua

ISSN: 2007-4948

Método Störmer-Verlet contra ODE45: Una comparación en la resolución del péndulo simple

Störmer-Verlet method versus ODE45: A comparison in solving the simple pendulum

Alfredo Garcia Gonzalez[a]

Abstract:

The simple pendulum is a dynamic system widely studied in physics and engineering due to its conceptual simplicity and the rich variety of physical phenomena it exhibits. To analyze its behavior, it is common to use numerical methods to solve its equations of motion. This work presents a comparison between two numerical approaches: the Störmer-Verlet method and MATLAB's ODE45 function.

While ODE45 is appreciated for its ease of use and accuracy across a wide range of problems, the Störmer-Verlet method stands out for its ability to conserve the system's energy and its symplectic properties, which are essential in the simulation of conservative systems. The results obtained with both methods are presented, and their advantages, limitations, and suitability for studying the simple pendulum are discussed, highlighting the conditions under which the Störmer-Verlet method offers superior performance in terms of stability and energy conservation.

Keywords:

Haga clic o pulse aquí para escribir texto.Simple pendulum, numerical methods, Störmer-Verlet, ODE45, symplectic integrator, energy conservation, conservative systems, numerical integration, dynamical systems, stability analysis.

Resumen:

El péndulo simple es un sistema dinámico ampliamente estudiado en física e ingeniería debido a su simplicidad conceptual y a la riqueza de fenómenos físicos que presenta. Para analizar su comportamiento, es común recurrir a métodos numéricos que permitan resolver sus ecuaciones de movimiento. En este trabajo se realiza una comparación entre dos enfoques numéricos: el método Störmer-Verlet y la función ODE45 de MATLAB.

Mientras que ODE45 es apreciado por su facilidad de uso y precisión en una amplia gama de problemas, el método Störmer-Verlet destaca por su capacidad para conservar la energía del sistema y sus propiedades simplécticas, características esenciales en la simulación de sistemas conservativos. Se presentan los resultados obtenidos con ambos métodos y se discuten sus ventajas, limitaciones y adecuación para el estudio del péndulo simple, resaltando las condiciones en las que el método Störmer-Verlet ofrece un desempeño superior en términos de estabilidad y conservación de la energía.

Palabras Clave:

Péndulo simple, métodos numéricos, Störmer-Verlet, ODE45, integrador simpléctico, conservación de la energía, sistemas conservativos, integración numérica, sistemas dinámicos, análisis de estabilidad.

Introducción

El péndulo simple es uno de los sistemas dinámicos clásicos más estudiados en física e ingeniería, ya que, a pesar de su aparente simplicidad, permite explorar fenómenos como la periodicidad, la estabilidad y la conservación de la energía [1]. El estudio de su comportamiento resulta fundamental para comprender conceptos más complejos en sistemas no lineales y conservativos.

Debido a que, en la mayoría de los casos, las ecuaciones de movimiento del péndulo simple no

[a] Autor de Correspondencia, universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Pachuca de Soto, Hidalgo, México, https://orcid.org/0000-0001-8391-5334, Email: ga354877@uaeh.edu.mx

Fecha de recepción: 15/04/2025, Fecha de aceptación: 04/05/2025, Fecha de publicación: 05/07/2025

DOI: https://doi.org/10.29057/xikua.v13i26.14933

admiten una solución analítica exacta para grandes amplitudes, es necesario recurrir a métodos numéricos para obtener aproximaciones precisas de su evolución temporal [2]. Entre las herramientas más utilizadas se encuentra la función ODE45 de MATLAB, basada en el método de Runge-Kutta de orden variable, conocida por su precisión y eficiencia en una amplia gama de problemas.

Sin embargo, en sistemas conservativos como el péndulo simple, donde la conservación de la energía es crucial, resulta conveniente emplear métodos que mantengan mejor esta propiedad a lo largo del tiempo de simulación [3]. En este contexto, el método Storm-Verlet, un integrador simpléctico ampliamente usado en dinámica molecular y física computacional ofrece una alternativa atractiva por su capacidad para conservar la energía y su estabilidad numérica a lo largo de simulaciones prolongadas.

El propósito de este trabajo es comparar el desempeño de ambos métodos en la resolución de las ecuaciones de movimiento del péndulo simple, evaluando su precisión, estabilidad y capacidad para conservar la energía, con el objetivo de determinar su adecuación en el estudio de sistemas dinámicos conservativos.

Péndulo simple

Deducción de la ecuación de movimiento del péndulo simple usando la mecánica newtoniana y la ley de conservación la energía (*E*=*K*+*V*).

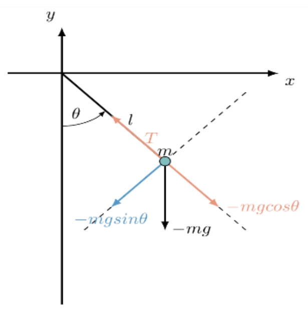

Figure 1. Diagrama de cuerpo libre del péndulo simple

A partir de la segunda ley de Newton tenemos que $\sum$ (Fuerzas en x) $= m$ ∗a

Donde $\frac{a = d^2\,(longitud\ de\ arco)}{dt}$ y $longitud\ de\ arco = l\theta$

Por lo tanto, la ecuación de movimiento para el péndulo simple está dada por

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} sin\theta = 0$$

Por otro lado, usando la ley de la conservación de la energía tenemos, denotando por *K* la energía cinética y por *V* la energía potencial. Tenemos que

$$E = K + V = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl(1 - cos\theta)$$

Dado que la energía es constante y la longitud es mayor que cero, la ecuación anterior la podemos escribir como

$$C = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{g}{l}(1 - cos\theta), \qquad donde\ C = \frac{E}{ml^2}$$

Ecuación de Hamilton y método de Störmer-Verlet

Si $q = \theta$ y $p = \dot{\theta}$ entonces el sistema de primer orden asociado a la ecuacion de movimiento del péndulo simple es $q' = p, p' = \frac{-g}{l} sinq$, sí $H(p,q) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{g}{l}(1 - cosq)$, entonces $p' = -\frac{\partial H}{\partial q}$ y $q' = \frac{\partial H}{\partial p}$. Por lo que el sistema de primer orden es un sistema Hamiltoniano y la dupla conjugada (p, q) tiene un grado de libertad [4].

El método de Störmer-Verlet es un integrador numérico simpléctico utilizado para resolver sistemas hamiltonianos de la forma obtenida y consiste en actualizar de forma intercalada las variables *p* y *q* mediante el siguiente esquema:

$$p_{n+1/2} = p_n - \left(\frac{h}{2}\right)\frac{\partial H}{\partial q}(q_n)$$
$$q_{n+1} = q_n + h\frac{\partial H}{\partial q}(p_{n+1/2})$$
$$p_{n+1} = p_{n+1/2} - \left(\frac{h}{2}\right)\partial\frac{\partial H}{\partial q}(q_{n+1})$$

donde *h* es el tamaño del paso temporal [5][6][7].

Metodología

Para comparar el desempeño de los métodos ODE45 y Störmer-Verlet en la resolución numérica del péndulo simple, se implementó un esquema de simulación controlado en MATLAB, considerando tanto la precisión de las soluciones como la capacidad de cada método para conservar la energía total del sistema en el tiempo.

Se empleó la función ODE45 de MATLAB (2024a), basada en el método de Runge-Kutta de orden variable (4/5), configurada con las tolerancias por defecto y control automático del tamaño de paso. Este método se eligió por su eficiencia y capacidad de ajustar dinámicamente el paso temporal para garantizar precisión local en cada iteración, además de su popularidad en la comunidad científica.

Para el método Störmer-Verlet se consideró la formulación hamiltoniana del sistema y el integrador simpléctico se implementó utilizando el esquema mencionado en la sección anterior.

Condiciones de simulación

Se consideraron las siguientes condiciones para ambos métodos:

- Longitud del péndulo: $l = 1\,m$
- Masa del péndulo: $m = 1\,kg$
- Aceleración gravitacional: $g = 9.81\,m/s^2$
- Condiciones iniciales:
  - $\theta(0) = (3.05, 2.62, 2.18, 1.75, 1.40, 1.05, 0.70, 0.35, 0.26)\,rad$
  - $\dot{\theta}(0) = 0\,m/s^2$
- Intervalo temporal: $t \in [0,100]$
- Tamaño de paso:
  - $ODE45{:}\ 0.01s$
  - $Störmer - Verlet{:}\ h = 0.01$

Criterios de comparación

Se evaluaron los siguientes aspectos:

- Conservación de la energía total usando el Hamiltoniano obtenido y su variación relativa respecto a su valor inicial.
- Estabilidad numérica ante variaciones del ángulo inicial.
- Precisión de la trayectoria angular
- Costo computacional, medido como tiempo de ejecución para un mismo intervalo de simulación.

Implementación

Ambos métodos se programaron en MATLAB R2024a. ODE45 se utilizó mediante su llamada estándar, mientras que Störmer-Verlet se implementó de manera manual siguiendo el esquema antes descrito. Los resultados se graficaron analizando el mapa fase ($\theta\ vs\ \dot{\theta}$) para analizar las trayectorias angulares, la energía total, y el error relativo en función del tiempo.

Resultados

Usando los códigos en lenguaje m e implementando en un caso la función ODE45 y en el otro el algoritmo del método Störmer-Verlet se utilizaron los valores para $\theta\ y\ \dot{\theta}$ en el tiempo para calcular la energía correspondiente $E(t)$.

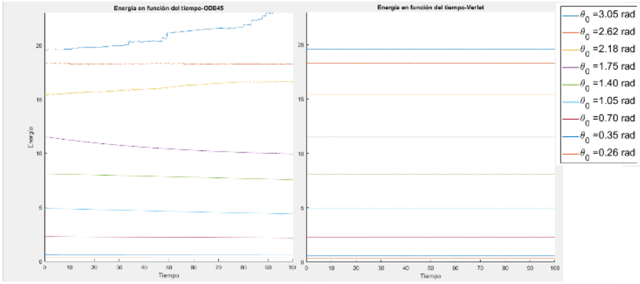

Figura 2. Graficas del valor de la energía en ambos métodos

El error relativo esta dado por $e_{r(t)} = \frac{|E(t)-E(0)|}{|E(0)|}$

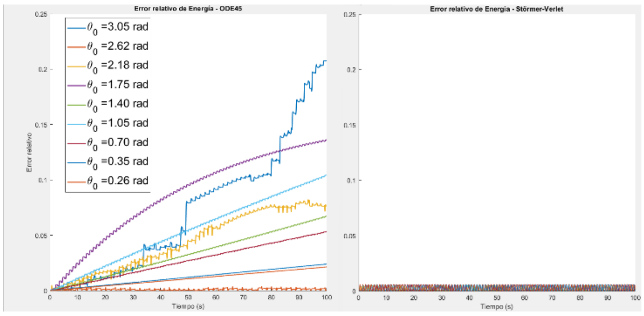

Figura 3. Graficas de errores relativos en ambos métodos

Comparamos los mapas fase obtenidos con cada método con el fin de comparar la precisión de la trayectoria angular.

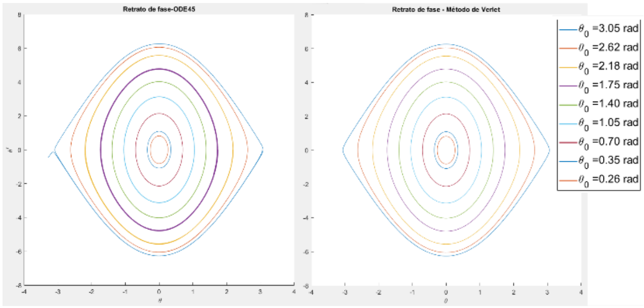

Figura 4. Mapas fase obtenidos en ambos métodos.

Finalmente, para el costo computacional se modificó el código principal para ejecutar 10 veces cada método, para obtener el tiempo promedio y un intervalo de confianza del *95%* y se obtuvieron los siguientes valores:

Tabla 1. Costo computacional.

Método	Tiempo	IC (mín.)	IC (máx.)

	medio (s)		
Störmer-Verlet	0.13892	0.11959	0.15824
ODE45	0.12137	0.11447	0.12828

Discusión

Conservación de energía

ODE45, al ser un método de propósito general basado en Runge-Kutta, presenta perdida\ganancia en la energía total a lo largo del tiempo, especialmente para ángulos iniciales grandes. Lo cual provoca que la energía no se conserve de manera adecuada.

Störmer-Verlet, diseñado específicamente para sistemas conservativos (Hamiltonianos), mostró una conservación de energía notablemente mejor. La energía total permanece prácticamente constante en el tiempo, incluso para grandes ángulos. Esto se debe a que es un método sin integrador explícito de energía, pero su estructura simétrica y de segundo orden permite que las oscilaciones en la energía se mantengan acotadas y oscilantes alrededor del valor real, sin tendencia creciente.

Error Relativo de Energía

ODE45 presenta un error creciente o con mayor dispersión conforme pasa el tiempo y aumenta el ángulo inicial. Este comportamiento se acentúa para valores iniciales mayores, debido a que la no linealidad de $sin(\theta)$ hace que los errores locales de integración se acumulen.

Störmer-Verlet mantiene un error relativo bajo (por debajo de *0.01*) y estable en todo el dominio temporal, con ligeras oscilaciones, pero sin tendencia creciente. Esto refuerza su propiedad favorable para sistemas conservativos.

Retratos de Fase

ODE45 genera retratos de fase suaves, pero en ángulos grandes se aprecia ligera dispersión de las trayectorias debido a la acumulación de error numérico.

Störmer-Verlet muestra trayectorias cerradas, consistentes y simétricas alrededor del origen, reflejando una conservación adecuada de las constantes de movimiento.

Tiempo computacional

Aunque ODE45 fue ligeramente más rápido en promedio, la diferencia no es significativa (usando t-test). Además, considerando que Störmer-Verlet garantiza mejor conservación de energía y estabilidad geométrica, esta pequeña penalización temporal es aceptable para simulaciones donde estas propiedades son esenciales [8].

Conclusiones

La comparación entre los métodos numéricos ODE45 y Störmer-Verlet en la resolución del péndulo simple permite concluir que, si bien ambos pueden resolver adecuadamente las ecuaciones de movimiento en intervalos de tiempo limitados, presentan diferencias significativas en la conservación de propiedades físicas a largo plazo. El método Störmer-Verlet mostró una clara superioridad en la preservación de la energía total del sistema y en la estabilidad numérica, lo que lo convierte en una opción más adecuada para la simulación de sistemas conservativos.

En contraste, ODE45 presentó desviaciones crecientes en la energía conforme avanzaba la simulación, lo que refleja una acumulación de errores numéricos típica de los métodos de integración generalistas. Aunque este método resultó ligeramente más eficiente en tiempo de cómputo, dicha ventaja no compensa su menor fidelidad en la conservación de magnitudes físicas. Por ello, se recomienda el uso de Störmer-Verlet en aplicaciones donde la estabilidad geométrica y la precisión a largo plazo son prioritarias, como ocurre en estudios de dinámica no lineal o mecánica celeste [9].

Referencias

[1] Landau, L. D., Lifšic, E. M., Heber, G., Jungclaussen, H., Dautcourt, G., Weller, W., ... & Kozik, B. Lehrbuch der theoretischen Physik (Vol. 1). Berlin: Akademie Verlag; 1966. [2] Feng K, Qin M. *Symplectic Geometric Algorithms for Hamiltonian Systems*. 2010. doi:10.1007/978-3-642-01777-3

[2] Wang B, Wu X. Long-time analysis of an extended RKN integrator for Hamiltonian systems with a solution-dependent high frequency. Journal Of Computational And Applied Mathematics. 2022; 416:114545. doi: 10.1016/j.cam.2022.114545

[3] Yufeng Xing, Rong Yang. Phase errors and their correction in symplectic implicit single-step algorithm. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2007, 23(5): 668-671. DOI:10.6052/0459-1879-2007-5-2006-561 [4] Hairer E, Lubich C, Wanner G. Geometric numerical integration illustrated by the Störmer–Verlet method. *Acta Numerica*. 2003; 12:399-450. doi:10.1017/s0962492902000144

[4] Arnol'd VI. Mathematical Methods of Classical Mechanics. Springer; 2010.

[5] Feng K, Qin M. Symplectic Geometric Algorithms for Hamiltonian Systems. 2010. doi:10.1007/978-3-642-01777-3

[6] Koh KJ, Yasreen AYM. On Newton-Raphson formulation and algorithm for displacement based structural dynamics problem with quadratic damping nonlinearity. *MATEC Web Of Conferences*. 2017; 111:01004. doi:10.1051/matecconf/201711101004

[7] Hairer E. Challenges in Geometric Numerical Integration. En: Springer INdAM Series.; 2014:125-135. doi:10.1007/978-3-319-05254-0_10

[8] Hairer E, Lubich C, Wanner G. Geometric numerical integration illustrated by the Störmer–Verlet method. Acta Numerica. 2003; 12:399-450. doi:10.1017/s0962492902000144

[9] Holmes, P. J., & Marsden, J. E. Horseshoes in perturbations of Hamiltonian systems with two degrees of freedom. Communications in Mathematical Physics, 1982, 82(4), 523-544.