UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE HIDALGO

INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

"SOFTWARE MATEMÁTICO DE APOYO EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN LAS UNIVERSIDADES"

MONOGRAFÍA

Que para obtener el título de Licenciado en Computación presenta:

P.L.C. Cacho Alfaro Julio César

Asesor de tesis:

L.C. Luís Islas Hernández

Pachuca de Soto, Hidalgo, Febrero del 2006

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS.

ÍNDICE DE FIGURAS.

INTRODUCCIÓN

En los últimos años hemos podido comprobar como la computadora se ha introducido en la enseñanza para dar a los alumnos una formación básica en las nuevas tecnologías y como herramienta didáctica. Las aplicaciones didácticas normalmente consisten en programas diseñados especialmente con esta única finalidad y dedicados al estudio de un tema concreto. Actualmente se estudia también, la utilización, en la enseñanza universitaria y no universitaria, de programas orientados a empresas y profesionales o investigadores, aprovechando su potencial a la hora de introducir al alumno en una diversidad de temas, y considerando que su conocimiento es de utilidad para realizar estudios superiores o integrarse en el mundo laboral a un cierto nivel.

La importancia creciente de la educación científica en la etapa actual de tránsito de la sociedad hacia un nuevo paradigma técnico-económico donde sus variables estratégicas son la ciencia y la tecnología como portadores del conocimiento -factor clave del mismo- coincide con el reconocimiento de una serie de insuficiencias en los diseños curriculares y prácticas pedagógicas en cuanto a los objetivos, contenidos, métodos y evaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje de las ciencias, en innumerables investigaciones, artículos científicos y literatura especializada a nivel mundial, regional y nacional; lo que ha traído como consecuencia una transformación del Sistema de Educación en General y de las diferentes disciplinas en particular. Por ello es posible hablar en la actualidad del tránsito hacia un modelo de enseñanza - aprendizaje en el cual la Informática va ocupando un lugar cada vez más preponderante.

El desarrollo de la Inteligencia Artificial, la tecnología multimedia entre otros abren un mundo nuevo de posibilidades que permiten poder realizar una enseñanza personalizada y a la medida del estudiante. Por ello es posible hablar en la actualidad del tránsito hacia un modelo de enseñanza aprendizaje en el cual la Informática va ocupando un lugar cada vez más preponderante. Este trabajo se desarrolla en la idea de que la computadora significa algo más que un auxiliar de cálculo, es un instrumento que coadyuva al desarrollo del pensamiento de los alumnos. El marco teórico del mismo descansa en la investigación didáctica sobre el desarrollo de la capacidad de resolución de problemas y por otra en la concepción sobre el uso de las nuevas tecnologías en la enseñanza de la Matemática, ambas líneas se desarrollan con un enfoque histórico-cultural.

El presente trabajo, por lo anterior mencionado, y para poder aplicar la computadora en la enseñanza de las matemáticas se ha dividido en cuatro capítulos en los que se abordara lo siguiente:

Capítulo 1. El objetivo del primer capítulo es mediante un breve resumen introducir al lector a los temas utilizados en el desarrollo del texto, tales como algebra de boole (principio matemático de las computadoras), algebra, cálculo integral y diferencial.

Capítulo 2. El objetivo del segundo capítulo es plantear las causas posibles por las que aun no se han incluído los softwares y el uso de las computadoras como una herramienta que pueda ayudar a la comprensión y solución de problemas matemáticos, así como mostrar los beneficios que aporta en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Capítulo 3. En el presente capítulo se detalla cuales serían las diferentes áreas en que la computación puede aplicarse, cuales son los requerimientos, así como los diferentes softwares y páginas de interés en cada área.

Capítulo 4. En este capítulo se le presenta al lector un resumen de cómo utilizar algunos de los softwares (tales como MatLab, Derive, Mathemática y Solver) sus características y aplicaciones esperando que le sean de utilidad.

Objetivo general.

Integrar la computadora en el proceso de enseñanza como una herramienta más, que junto a otras estrategias, técnicas y procesos meta cognitivos, son utilizadas por los alumnos de manera natural en los procesos de resolución de problemas matemáticos. Por supuesto, sobre la base de la necesidad de conducción de estos procesos y, por tanto, de su inclusión explícita en el proceso de enseñanza – aprendizaje.

Objetivos específicos.

- Participación activa del alumno en la construcción de su propio aprendizaje.
- Interacción entre el alumno y la máquina.
- La posibilidad de dar una atención individual al estudiante.
- La posibilidad de crear micromundos que le permiten explorar y conjeturar
- Permitir el desarrollo cognitivo del estudiante.
- Control del tiempo y secuencia del aprendizaje por el alumno.
- A través de la retroalimentación inmediata y efectiva, el alumno puede aprender de sus errores.

CAPÍTULO 1.

MARCO TEÓRICO

El objetivo del primer capítulo es, mediante un breve resumen, introducir al lector a los temas utilizados en el desarrollo del texto, tales como álgebra de boole (principio matemático de las computadoras), álgebra, cálculo integral y diferencial.

1.1. Álgebra de boole

Las álgebras booleanas, estudiadas por primera vez en detalle por George Boole, constituyen un área de las matemáticas que ha pasado a ocupar un lugar prominente con el advenimiento de la computadora digital. Son usadas ampliamente en el diseño de circuitos de distribución y computadoras, y sus aplicaciones van en aumento en muchas otras áreas. En el nivel de lógica digital de una computadora, lo que comúnmente se llama hardware, y que está formado por los componentes electrónicos de la máquina, se trabaja con diferencias de tensión, las cuales generan funciones que son calculadas por los circuitos que forman el nivel. Estas funciones, en la etapa de diseño del hardware, son interpretadas como funciones de boole. El problema de determinar una expresión mínima para una función es a menudo crucial. No resultan de la misma eficiencia en dinero y tiempo, principalmente, dos funciones las cuales calculan lo mismo pero donde una tiene menos variables y lo hace en menor tiempo. Como solución a este problema, se plantea un método de simplificación, que hace uso de unos diagramas especiales llamados mapas o diagramas de Karnaugh, y el cual tiene la limitación de poder trabajar adecuadamente sólo con pocas variables.
Todas las variables y constantes del Álgebra booleana, admiten sólo uno de dos valores en sus entradas y salidas: Sí/No, 0/1 o Verdadero/Falso. Estos valores bivalentes y opuestos pueden ser representados por números binarios de un dígito (bits), por lo cual el Álgebra booleana se puede entender cómo el Álgebra del Sistema Binario. Al igual que en álgebra tradicional, también se trabaja con letras del alfabeto para denominar variables y formar ecuaciones para obtener el resultado de ciertas operaciones mediante una ecuación o expresión booleana. Evidentemente los resultados de las correspondientes operaciones también serán binarios.

Todas las operaciones (representadas por símbolos determinados) pueden ser materializadas mediante elementos físicos de diferentes tipos (mecánicos, eléctricos, neumáticos o electrónicos) que admiten entradas binarias o lógicas y que devuelven una respuesta (salida) también binaria o lógica. Ejemplos de dichos estados son: Abierto/Cerrado (interruptor), Encendida/Apagada (bombilla), Cargado/Descargado (condensador), Nivel Lógico 0/Nivel lógico 1 (salida lógica de un circuito semiconductor), etcétera.

Los dispositivos con los cuales se implementan las funciones lógicas son llamados puertas (o compuertas) y, habitualmente, son dispositivos electrónicos basados en transistores. Estos dispositivos, y otros que veremos a lo largo de esta unidad, son los que permiten el diseño, y la ulterior implementación, de los circuitos de cualquier ordenador moderno, así como de muchos de los elementos físicos que permiten la existencia de las telecomunicaciones modernas, el control de máquinas, etcétera. De hecho, pensando en los ordenadores como una jerarquía de niveles, la base o nivel inferior sería ocupada por la lógica digital La relación que existe entre la lógica booleana y los sistemas de cómputo es fuerte, de hecho se da una relación uno a uno entre las funciones booleanas y los circuitos electrónicos de compuertas digitales. Para cada función booleana es posible diseñar un circuito electrónico y viceversa, como las funciones booleanas solo requieren de los operadores AND, OR y NOT podemos construir nuestros circuitos utilizando exclusivamente éstos operadores utilizando las compuertas lógicas homónimas.

1.2. Álgebra

Rama de las matemáticas en la que se usan letras para representar relaciones aritméticas. Al igual que en la aritmética, las operaciones fundamentales del álgebra son adición, sustracción, multiplicación, división y cálculo de raíces. La aritmética, sin embargo, no es capaz de generalizar las relaciones matemáticas, como el teorema de Pitágoras, que dice que en un triángulo rectángulo el área del cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos. La aritmética sólo da casos particulares de esta relación (por ejemplo, 3, 4 y 5, ya que 32 + 42 = 52). El álgebra, por el contrario, puede dar una generalización que cumple las condiciones del teorema: $a^2 + b^2 = c^2$. Un número multiplicado por sí mismo se denomina cuadrado, y se representa con el superíndice 2. Por ejemplo, la notación de 3 × 3 es 3^2; de la misma manera, a × a es igual que a^2.

El álgebra clásica, que se ocupa de resolver ecuaciones, utiliza símbolos en vez de números específicos y operaciones aritméticas para determinar cómo usar dichos símbolos. El álgebra moderna ha evolucionado desde el álgebra clásica al poner más atención en las estructuras matemáticas. Los matemáticos consideran al álgebra moderna como un conjunto de objetos con reglas que los conectan o relacionan. Así, en su forma más general, una buena definición de álgebra es la que dice que el álgebra es el idioma de las matemáticas.

1.2.1. Símbolos y términos específicos

Entre los símbolos algebraicos se encuentran números, letras y signos que representan las diversas operaciones aritméticas. Los números son, por supuesto, constantes, pero las letras pueden representar tanto constantes como variables. Las primeras letras del alfabeto se usan para representar constantes y las últimas para variables.

1.2.2. Operaciones y agrupación de símbolos

La agrupación de los símbolos algebraicos y la secuencia de las operaciones aritméticas se basan en los símbolos de agrupación, que garantizan la claridad de lectura del lenguaje algebraico. Entre los símbolos de agrupación se encuentran los paréntesis ( ), corchetes [ ], llaves { } y rayas horizontales — también llamadas vínculos — que suelen usarse para representar la división y las raíces, como en el siguiente ejemplo:

$$\frac{ax+b}{c-dy} \qquad \sqrt{b^2-4ac}$$

Los símbolos de las operaciones básicas son bien conocidos de la aritmética: adición (+), sustracción (-), multiplicación (×) y división (:). En el caso de la multiplicación, el signo `×' normalmente se omite o se sustituye por un punto, como en a · b. Un grupo de símbolos contiguos, como abc, representa el producto de a, b y c. La división se indica normalmente mediante rayas horizontales. Una raya oblicua, o virgulilla, también se usa para separar el numerador, a la izquierda de la raya, del denominador, a la derecha, en las fracciones. Hay que tener cuidado de agrupar los términos apropiadamente. Por ejemplo, ax + b/c - dy indica que ax y dy son términos separados, lo mismo que b/c, mientras que (ax + b)/(c - dy) representa la fracción:

$$\frac{ax+b}{c-dy}$$

1.2.3. Prioridad de las operaciones

Primero se hacen las multiplicaciones, después las divisiones, seguidas de las sumas y las restas. Los símbolos de agrupación indican el orden en que se han de realizar las operaciones: se hacen primero todas las operaciones dentro de un mismo grupo, comenzando por el más interno. Por ejemplo:

$$\{2[3+(6\cdot 5+2)]\} = \{2[3+(30+2)]\} =$$
$$\{2[3+(32)]\} = \{2[35]\} = 70$$

1.2.4. Otras definiciones

Cualquier expresión que incluya la relación de igualdad (=) se llama ecuación. Una ecuación se denomina identidad si la igualdad se cumple para cualquier valor de las variables; si la ecuación se cumple para ciertos valores de las variables pero no para otros, la ecuación es condicional. Un término es una expresión algebraica que sólo contiene productos de constantes y variables; 2x, -a, $x^2(2zy)3$ son algunos ejemplos de términos. La parte numérica de un término se denomina coeficiente. Los coeficientes de cada uno de los ejemplos anteriores son 2, -1y 8 (el último término se puede escribir como $8x^2(zy)3$).

Una expresión que contiene un solo término se denomina monomio, dos términos, binomio y tres términos, trinomio. Un polinomio es una suma (o diferencia) finita de términos. Por ejemplo, un polinomio de n-ésimo grado en su forma general se expresa como:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

En este contexto, el grado es el mayor exponente de las variables en un polinomio. Por ejemplo, si el mayor exponente de la variable es 3, como en ax3 + bx2 + cx, el polinomio es de tercer grado. Del mismo modo, la expresión xn + xn-1 + xn-2 es de n-ésimo grado.

Una ecuación lineal en una variable es una ecuación polinómica de primer grado, es decir, una ecuación de la forma ax + b = 0. Se les llama ecuaciones lineales porque representan la fórmula de una línea recta en la geometría analítica.

Una ecuación cuadrática en una variable es una ecuación polinómica de segundo grado, es decir, de la forma ax2 + bx + c = 0.

Un número primo es un entero (número natural) que sólo se puede dividir exactamente por sí mismo y por 1. Así, 2, 3, 5, 7, 11 y 13 son todos números primos.

Las potencias de un número se obtienen mediante sucesivas multiplicaciones del número por sí mismo. El término a elevado a la tercera potencia, por ejemplo, se puede expresar como a·a·a o a^3.

Los factores primos de un cierto número son aquellos factores en los que éste se puede descomponer de manera que el número se puede expresar sólo como el producto de números primos y sus potencias. Por ejemplo, los factores primos de 15 son 3 y 5. Del mismo modo, como 60 = 2 x 2 × 3 × 5, los factores primos de 60 son 2, 3 y 5.

1.2.5. Operaciones con polinomios

Al hacer operaciones con polinomios, se asume que se cumplen las mismas propiedades que para la aritmética numérica. En aritmética, los números usados son el conjunto de los números racionales. La aritmética, por sí sola, no puede ir más lejos, pero el álgebra y la geometría pueden incluir números irracionales, como la raíz cuadrada de 2 y números complejos. El conjunto de todos los números racionales e irracionales constituye el conjunto de los números reales.

1.2.6. Propiedades de la adición

La suma de dos números reales a y b cualesquiera es otro número real que se escribe a + b. Los números reales son uniformes para las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división; esto quiere decir que al realizar una de estas operaciones con números reales el resultado es otro número real.

Cualquiera que sea la forma en que se agrupan los términos de la adición, el resultado de la suma es siempre el mismo: $(a + b) + c = a + (b + c)$. Es la llamada propiedad asociativa de la adición.

Dado un número real a cualquiera, existe el número real cero (0) conocido como elemento neutro de la adición, tal que $a + 0 = 0 + a = a$.

Dado un número real a cualquiera, existe otro número real (-a), llamado elemento simétrico de a (o elemento recíproco de la suma), tal que $a + (-a) = 0$.

Cualquiera que sea el orden en que se realiza la adición, la suma es siempre la misma: $a + b = b + a$. Es la llamada propiedad conmutativa de la adición.

Cualquier conjunto de números que cumpla las cuatro primeras propiedades se dice que forma un grupo. Si además el conjunto cumple la 5, se dice que es un grupo abeliano o conmutativo.

1.2.7. Propiedades de la multiplicación

Para la multiplicación se cumplen propiedades similares a las de la adición. Sin embargo, hay que prestar especial atención a los elementos neutro y recíproco, M3 y M4.

El producto de dos números reales a y b es otro número real, que se escribe $a \cdot b$ o ab.

Cualquiera que sea la forma de agrupar los términos de la multiplicación, el producto es siempre el mismo: (ab)c = a(bc). Es la llamada propiedad asociativa de la multiplicación.

Dado un número real a cualquiera, existe el número real uno (1) llamado elemento neutro de la multiplicación, tal que a(1) = 1(a) = a.

Dado un número real a distinto de cero, existe otro número (a-1 o 1/a), llamado elemento inverso (o elemento recíproco de la multiplicación), para el que a(a-1) = (a-1)a = 1.

Cualquiera que sea el orden en que se realiza la multiplicación, el producto es siempre el mismo: ab = ba. Es la llamada propiedad conmutativa de la multiplicación.

Un conjunto de elementos que cumpla estas cinco propiedades se dice que es un grupo abeliano, o conmutativo, para la multiplicación. El conjunto de los números reales, excluyendo el cero —pues la división por cero no está definida— es un grupo conmutativo para la multiplicación.

1.2.8. Propiedad distributiva

Otra propiedad importante del conjunto de los números reales relaciona la adición y la multiplicación de la forma siguiente:

a(b + c) = ab + ac

(b + c)a = ba + ca

Un conjunto de elementos con una relación de igualdad, en el que se definen dos operaciones (como la adición y la multiplicación) que cumplan las propiedades de la adición, A1 a A5, las propiedades de la multiplicación, M1 a M5, y la propiedad distributiva, D1 y D2, constituye un cuerpo conmutativo.

1.2.9. Multiplicación de polinomios

El siguiente ejemplo es el producto de un monomio por un binomio:

$$(ax + b)(cx^2) = acx^3 + bcx^2$$

Este mismo principio —multiplicar cada término del primer polinomio por cada uno del segundo— se puede ampliar directamente a polinomios con cualquier número de términos. Por ejemplo, el producto de un binomio y un trinomio se hace de la siguiente manera:

$$(ax^3 + bx^2 - cx)(dx + e) = adx^4 + aex^3 + bdx^3 + bex^2 - cdx^2 - cex$$

Una vez hechas estas operaciones, todos los términos de un mismo grado se han de agrupar, siempre que sea posible, para simplificar la expresión:

$$= adx^4 + (ae + bd)x^3 + (be - cd)x^2 - cex$$

1.2.10. Factorización de polinomios

Dada una expresión algebraica complicada, resulta útil, por lo general, el descomponerla en un producto de varios términos más sencillos. Por ejemplo, 2x3 + 8x2y se puede factorizar, o reescribir, como 2x2(x + 4y). El encontrar los factores de un determinado polinomio puede ser materia de simple inspección o se puede necesitar el uso de tanteos sucesivos. Ciertos polinomios, sin embargo, no se pueden factorizar utilizando coeficientes reales y son llamados polinomios primos.

Para factorizar suele ser útil agrupar primero; aquellos términos que sean similares se agrupan como en el siguiente ejemplo, cuando sea posible:

$$2x^2z + x^2y - 6xz - 3xy = x^2(2z + y) -$$
$$3x(2z + y) =$$
$$(x^2 - 3x)(2z + y) =$$
$$x(x - 3)(2z + y)$$

1.2.11. Resolución de ecuaciones

Dada una ecuación, el álgebra se ocupa de encontrar sus soluciones siguiendo el concepto general de identidad a = a. Siempre que se apliquen las mismas operaciones aritméticas o algebraicas en ambos lados de la ecuación la igualdad se mantiene inalterada. La estrategia básica es despejar la incógnita en un lado de la igualdad y la solución será el otro lado. Por ejemplo, para resolver la siguiente ecuación lineal con una incógnita

$$5x + 6 = 3x + 12$$

Los términos que contienen la variable se despejan en un lado y las constantes en el otro. El término 3x se puede eliminar del lado derecho mediante sustracción; 3x se ha de restar del lado izquierdo al mismo tiempo:

$$\begin{array}{rcr} 5x - 6 & = & 3x + 12 \\ -3x & & -3x \\ \hline 2x - 6 & = & 12 \end{array}$$

Después se resta el número 6 de ambos lados:

$$\begin{array}{rcr} 2x + 6 & = & 12 \\ -6 & & -6 \\ \hline 2x & = & 6 \end{array}$$

Para despejar la x en el lado izquierdo se dividen ambos lados de la ecuación por 2:

$$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2}$$

La solución es por tanto: x = 3.

Para comprobar este resultado basta con sustituir el valor x = 3 en la ecuación original:

$$\begin{gathered} 5x + 6 = 3x - 12 \\ 5(3) + 6 = 3(3) + 12 \\ 15 + 6 = 9 + 12 \\ 21 = 21 \end{gathered}$$

1.2.12. Resolución de ecuaciones cuadráticas

Dada una ecuación de segundo grado o cuadrática en su forma general:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

existen diversas posibilidades para resolverla dependiendo de la naturaleza específica de la ecuación en cuestión. Si la ecuación se puede factorizar, la solución es inmediata. Por ejemplo:

$$x^2 - 3x = 10$$

Primero se escribe la ecuación en su forma general

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

que se puede factorizar como:

$$(x - 5)(x + 2) = 0$$

La igualdad sólo se cumple cuando uno de los factores es cero, es decir, cuando x = 5 o x = -2. Éstas son las soluciones de la ecuación, que de nuevo se pueden verificar mediante sustitución.

Si a primera vista no se encuentra un modo directo de factorizar la ecuación, puede existir otra alternativa. Por ejemplo, en la ecuación

$$4x^2 + 12x = 7$$

la expresión $4x^2 + 12x$ se podría factorizar como un cuadrado perfecto si fuera $4x^2 + 12x + 9$, que equivale a $(2x + 3)^{2.}$ Esto se puede conseguir fácilmente sumando 9 al lado izquierdo de la ecuación. La misma cantidad debe sumarse, por supuesto, al lado derecho:

$$4x^2 + 12x + 9 = 7 + 9$$
$$(2x + 3)^2 = 16$$

que se reduce a:

$$2x+3 = \sqrt{16}$$

ó

$$2x+3=+4 \quad \text{y} \quad 2x+3=-4$$

pues tiene dos valores. La primera ecuación da la solución x = 1/2 (restando 3 de ambos lados: 2x = 1, y dividiendo ambos lados por 2: x = 1/2). La segunda ecuación da x = -7/2. Ambas soluciones se pueden verificar como antes, sustituyendo los valores en cuestión en la ecuación original. Esta forma de resolución se suele denominar método del cuadrado perfecto.

En general, cualquier ecuación cuadrática de la forma

$$ax^2+bx+c=0$$

se puede resolver utilizando la fórmula cuadrática. Para cualquier ecuación de este tipo las dos soluciones de x están dadas por la fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Por ejemplo, para encontrar las raíces de

$x^2-4x=-3$ primero se pone la ecuación en su forma general:

$$x^2-4x+3=0$$

Por tanto, a = 1, b = -4 y c = 3. Estos valores se sustituyen en la fórmula cuadrática:

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(3)}}{2(1)}$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{4\pm2}{2}=3 \quad \text{y} \quad 1$$

1.2.13. Sistemas de ecuaciones

En álgebra, lo normal es que haya que resolver no una sino varias ecuaciones al mismo tiempo. El problema es encontrar el conjunto de todas las soluciones que cumplen todas las ecuaciones simultáneamente. El conjunto de ecuaciones que deben resolverse se denomina sistema de ecuaciones y para resolverlo se pueden usar técnicas específicas del álgebra. Por ejemplo, dadas las dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 10 \qquad (1) \\ 2x + y &= 5 \qquad (2) \end{aligned}$$

existe un sistema sencillo: la variable y se despeja en la ecuación (2), dando y = 5 - 2x; este valor de y se sustituye en la ecuación (1):

$$3x + 4\,(5 - 2x) = 10$$

Así el problema se reduce a una ecuación lineal con una sola incógnita x, obteniéndose

$3x + 20 - 8x = 10$ o

$-5x = -10$ de donde

$$x = 2$$

Si este valor se sustituye en cualquiera de las ecuaciones originales (1) o (2), se obtiene que

$$y = 1$$

Otro método más rápido para resolver un sistema de ecuaciones es, en este caso, multiplicar ambos lados de la ecuación (2) por 4, con lo que queda:

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 10 \qquad (1) \\ 8x + 4y &= 20 \qquad (2) \end{aligned}$$

Si ahora se resta la ecuación (1) de la (2), entonces 5x = 10, o x = 2. Este procedimiento genera otro avance en las matemáticas, las matrices. La teoría de matrices nos ayuda a obtener soluciones para cualquier conjunto de ecuaciones lineales con cualquier número de incógnitas.

1.2.14. Teoría de matrices y álgebra lineal

Ramas de las matemáticas, relacionadas entre sí, que son herramientas fundamentales en las matemáticas puras y aplicadas, y cada vez más importantes en las ciencias físicas, biológicas y sociales.

1.2.15. Teoría de matrices

Una matriz es una tabla rectangular de números o elementos de un anillo (véase Álgebra). Una de las principales aplicaciones de las matrices es la representación de sistemas de ecuaciones de primer grado con varias incógnitas. Cada fila de la matriz representa una ecuación, siendo los valores de una fila los coeficientes de las distintas variables de la ecuación, en determinado orden.

Una matriz se representa normalmente entre paréntesis o corchetes:

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 15 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a-b & b-c & c-a \end{pmatrix}$$

En las matrices anteriores, a, b y c son números cualesquiera. Para delimitar la matriz, en vez de corchetes, se pueden utilizar también dos rectas paralelas a cada lado. Las líneas horizontales, denominadas filas, se numeran de arriba a abajo; las líneas verticales, o columnas, se numeran de izquierda a derecha. Utilizando esta notación, el elemento de la segunda fila y tercera columna de M1 es -1. Una fila o columna genérica se denomina línea.

El tamaño de una matriz está dado por el número de filas y el de columnas en este orden, así M1, M2, M3 y M4 son de tamaño 3 × 3 (3 por 3), 3 × 3, 3 × 2 y 2 × 3 respectivamente. Los elementos de una matriz general de tamaño m × n se representan normalmente utilizando un doble subíndice; el primer subíndice, i, indica el número de fila y el segundo, j, el número de columna. Así pues, el elemento a23 está en la segunda fila, tercera columna. La matriz general

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se puede representar de forma abreviada como A = (aij), en donde los posibles valores de los índices i = 1, 2, …, m y j = 1, 2, …, n se han de dar explícitamente si no se sobrentienden. Si m = n, la matriz es cuadrada y el número de filas (o columnas) es el orden de la matriz. Dos matrices A = (aij) y B = (bij), son iguales si y sólo si son de igual tamaño y si para todo i y j, aij = bij. Si A = (aij) es una matriz cuadrada, los elementos a11, a22, a33, … forman la diagonal principal de la matriz. La matriz transpuesta AT de una matriz A es otra matriz en la cual la fila i es la columna i de A, y la columna j es la fila j de A. Por ejemplo, tomando la matriz M3 anterior,

$$M_5 = M_3^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & a \\ 0 & -\frac{1}{2} & b \end{pmatrix}$$

es la matriz transpuesta de M3.

La adición y la multiplicación de matrices están definidas de manera que ciertos conjuntos de matrices forman sistemas algebraicos. Consideremos los elementos de las matrices números reales cualesquiera, aunque se podrían tomar elementos de cualquier otro cuerpo o anillo. La matriz cero es aquélla en la que todos los elementos son 0; la matriz identidad Im de orden m, es una matriz cuadrada de orden m en la cual todos los elementos son cero excepto los de la diagonal principal, que son 1. El orden de la matriz identidad se puede omitir si se sobrentiende con el resto de la expresión, con lo que Im se escribe simplemente I.

La suma de dos matrices sólo está definida si ambas tienen el mismo tamaño. Si A = (aij) y B = (bij) tienen igual tamaño, entonces la suma C = A + B se define como la matriz (cij), en la que cij = aij + bij, es decir, para sumar dos matrices de igual tamaño basta con sumar los elementos correspondientes. Así, para las matrices mencionadas anteriormente

$$M_4 + M_5 = \begin{pmatrix} a+b-2 & b+c+1 & c+2a \\ a-b & b-c-\frac{1}{2} & c-a+b \end{pmatrix}$$

El conjunto de todas las matrices de un determinado tamaño tiene las propiedades uniforme, asociativa y conmutativa de la adición. Además hay una matriz única O tal que para cualquier matriz A, se cumple A + O = O + A = A y una matriz única B tal que A + B = B + A = O.

El producto AB de dos matrices, A y B, está definido sólo si el número de columnas del factor izquierdo, A es igual al número de filas del factor derecho, B; si A = (aij) es de tamaño m × n y B = (bjk) es de tamaño n × p, el producto AB = C = (cik) es de tamaño m × p, y cik está dado por

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

es decir, el elemento de la fila i y la columna k del producto es la suma de los productos de cada uno de los elementos de la fila i del factor izquierdo multiplicado por el correspondiente elemento de la columna k del factor derecho.

1.2.16. Álgebra lineal

El concepto geométrico de vector como segmento rectilíneo de longitud, dirección y sentido dados, puede generalizarse como se muestra a continuación. Un n-vector (vector n-dimensional, vector de orden n o vector de longitud n) es un conjunto ordenado de n elementos de un cuerpo. Al igual que en la teoría de matrices, los elementos de un vector pueden ser números reales. Un n-vector v se representa como

v = (x1, x2, …, xn)

Las líneas de una matriz son vectores: las horizontales son vectores fila y las verticales vectores columna. Las x se denominan componentes del vector.

La suma de vectores (de igual longitud) y la multiplicación por un escalar se definen de igual manera que para las matrices, y cumplen las mismas propiedades. Si

w = (y1, y2, …, yn) y k es un escalar (número real), entonces

v + w = (x1 + y1, x2 + y2, …, xn + yn) y

kv = (kx1, kx2, …, kxn)

Si k1, k2, …, km son escalares, y v1, v2, …, vm son n-vectores, el n-vector

v = k1v1 + k2v2 + … + kmvm

se denomina combinación lineal de los vectores v1, v2, …, vm. Los m n-vectores son linealmente independientes si la única combinación lineal igual al n-vector cero, 0 = (0,0, …, 0), es aquélla en que k1 = k2 = … = km = 0. Si existe otra combinación lineal que cumple esto, los vectores son linealmente dependientes. Por ejemplo, si v1 = (0, 1, 2, 3), v2 = (1, 2, 3, 4), v3 = (2, 2, 4, 4) y v4 = (3, 4, 7, 8), entonces v1, v2 y v3 son linealmente independientes, pues k1v1+ k2v2 + k3v3 = 0 si y sólo si k1 = k2 = k3 = 0; v2, v3 y v4son linealmente dependientes pues v2 + v3 - v4 = 0. Si A es una matriz de rango r, entonces al menos un conjunto de r vectores fila o columna es un conjunto linealmente independiente, y todo conjunto con más de r vectores fila o columna es un conjunto linealmente dependiente.

Un espacio vectorial V es un conjunto no vacío de vectores (véase Teoría de conjuntos) que cumple las siguientes propiedades: (1) si vð V y w ð V, entonces (v + w) ð V, y (2) si v ð V y k es un escalar cualquiera, entonces kv ð V. Si S = {vi} es un conjunto de vectores, todos ellos de la misma longitud, todas las combinaciones lineales de los vectores v forman un espacio vectorial V. Se dice que este espacio vectorial es generado por los v. Si el conjunto B = {w1} genera el mismo espacio vectorial V, y está formado por vectores linealmente independientes, se dice que B es una base de V. Si una base de V contiene m vectores, entonces toda base de V contiene exactamente m vectores, y se dice que V es un espacio vectorial de dimensión m. Los espacios euclídeos de dos y tres dimensiones se pueden representar por parejas y tríos ordenados de números reales. Las matrices se pueden utilizar para describir transformaciones lineales de un espacio vectorial a otro.

1.3. Cálculo

Rama de las matemáticas que se ocupa del estudio de los incrementos en las variables, pendientes de curvas, valores máximo y mínimo de funciones y de la determinación de longitudes, áreas y volúmenes. Su uso es muy extenso, sobre todo en ciencias e ingeniería, siempre que haya cantidades que varíen de forma continua.

1.3.1. Cálculo diferencial

El cálculo diferencial estudia los incrementos en las variables. Sean x e y dos variables relacionadas por la ecuación y = f(x), en donde la función f expresa la dependencia del valor de y con los valores de x. Por ejemplo, x puede ser tiempo e y la distancia recorrida por un objeto en movimiento en el tiempo x. Un pequeño incremento h en la x, de un valor x_0 a $x_0 + h$, produce un incremento k en la y que pasa de $y_0 = f(x_0)$ a $y_0 + k = f(x_0 + h)$, por lo que $k = f(x_0 + h) - f(x_0)$. El cociente k/h representa el incremento medio de la y cuando la x varía de x_0 a $x_0 + h$. La gráfica de la función y = f(x) es una curva en el plano x,y y k/h es la pendiente de la recta AB entre los puntos A = (x_0,y_0) y B = (x_0 + h, y_0 + k) en esta curva; esto se muestra en la figura 1, en donde h = AC y k = CB, así es que k/h es la tangente del ángulo BAC.

Si h tiende hacia 0, para un x_0 fijo, entonces k/h se aproxima al cambio instantáneo de la y en x_0; geométricamente, B se acerca a A a lo largo de la curva y = f(x), y la recta AB tiende hacia la tangente a la curva, AT, en el punto A. Por esto, k/h tiende hacia la pendiente de la tangente (y por tanto de la curva) en A. Así, se define la derivada f'(x_0) de la función y = f(x) en x_0 como el límite que toma k/h cuando h tiende hacia cero.

Este valor representa la magnitud de la variación de y y la pendiente de la curva en A. Cuando, por ejemplo, x es el tiempo e y es la distancia, la derivada representa la velocidad instantánea. Valores positivos, negativos y nulos de f'(x0) indican que f(x) crece, decrece o es estacionaria respectivamente en x_0. La derivada de una función es a su vez otra función f'(x) de x, que a veces se escribe como dy/dx, df/dx o Df. Por ejemplo, si y = f(x) = x^2 (parábola), entonces

f´(x) = 2x

por lo que k/h = $2x_0$ + h, que tiende hacia $2x_0$ cuando h tiende hacia 0. La pendiente de la curva cuando x = x_0 es por tanto $2x_0$, y la derivada de f(x) = x^2 es f'(x) = 2x. De manera similar, la derivada de x^m es mx^{m-1} para una m constante.

Tabla 1.1 Derivadas de las funciones más conocidas.

Nota: a = constante; u y v = funciones

Funciones algebraicas

$y = a$ $y = x$ $y = u \pm v \pm \ldots$	$y' = 0$ $y' = 1$ $y' = u' \pm v' \pm \ldots$
$y = a \cdot u$ $y = u \cdot v$ $y = u \cdot v \cdot \ldots$	$y' = a \cdot u'$ $y' = u' \cdot v + v' \cdot u$ $y' = u' \cdot v \cdot \ldots + v' \cdot u \cdot \ldots + \ldots$
$y = \frac{u}{v}$ $y = \frac{a}{u}$ $y = \frac{u}{a}$	$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ $y' = \frac{-a \cdot u'}{u^2}$ $y' = \frac{u'}{a}$

Funciones potenciales, exponenciales y módulo

$y = u^a$ $y = u^{-a} = \frac{1}{u^a}$ $y = u^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{u}$ $y = a^u$ $y = u^v$	$y' = a \cdot u^{a-1} \cdot u'$ $y' = \frac{-a \cdot u'}{u^{a+1}}$ $y' = \frac{1}{a} \cdot u^{\left(\frac{1}{a}-1\right)} \cdot u' = \frac{u'}{a \cdot \sqrt[a]{u^{a-1}}}$ $y' = a^u \cdot u' \cdot \ln(a)$ $y' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot v' \cdot \ln(u)$
$y = e^u$	$y' = e^u \cdot u'$
$u = \lvert u \rvert$	$y' = \frac{u}{\lvert u \rvert} \cdot u'$

Función logarítmica

$y = \log_a u$	$y' = \frac{u'}{u \cdot \ln(a)} = \frac{u'}{u} \cdot \log_a e$
$y = \ln(u)$	$y' = \frac{u'}{u}$

Funciones trigonométricas

$y = \sin(u)$	$y' = u' \cdot \cos(u)$
$y = \cos(u)$	$y' = -u' \cdot \sin(u)$
$y = \tan(u)$	$y' = \frac{u'}{\cos^2(u)} = u' \cdot (1 + \tan^2(u))$
$y = \cot an(u)$	$y' = \frac{-u'}{\sin^2(u)} = -u'(1 + \cot an^2(u))$
$y = \sec(u)$	$y' = u' \cdot \sec(u) \cdot \tan(u) = \frac{u' \cdot \sin(u)}{\cos^2(u)}$
$y = \operatorname{cosec}(u)$	$y' = -u' \cdot \operatorname{cosec}(u) \cdot \cot an(u) = \frac{-u' \cdot \cos(u)}{\sin^2(u)}$

Para calcular la derivada de una función, hay que tener en cuenta unos cuantos detalles: primero, se debe tomar una h muy pequeña (positiva o negativa), pero siempre distinta de cero. Segundo, no toda función f tiene una derivada en todas las x_0, pues k/h puede no tener un límite cuando h tiende a 0; por ejemplo, f(x) = |x| no tiene derivada en $x_0 = 0$, pues k/h es 1 o -1 según que h > 0 o h < 0; geométricamente, la curva tiene un vértice (y por tanto no tiene tangente) en A = (0,0). Tercero, aunque la notación dy/dx sugiere el cociente de dos números dy y dx (que indican cambios infinitesimales en y y x) es en realidad un solo número, el límite de k/h cuando ambas cantidades tienden hacia cero.

Diferenciación es el proceso de calcular derivadas. Si una función f se forma al combinar dos funciones u y v, su derivada f' se puede obtener a partir de u, v y sus respectivas derivadas utilizando reglas sencillas. Por ejemplo, la derivada de la suma es la suma de las derivadas, es decir, si f = u + v (lo que significa que f(x) = u(x) + v(x) para todas las x) entonces f' = u' + v'. Una regla similar se aplica para la diferencia: (u - v)' = u' - v'. Si una función se multiplica por una constante, su derivada queda multiplicada por dicha constante, es decir, (cu)' = cu' para cualquier constante c. Las reglas para productos y cocientes son más complicadas: si f = uv, entonces f' = uv' + u'v, y si f = u/v entonces f'= (u'v-uv')/v2 siempre que v(x)≠ 0. Utilizando estas reglas se pueden derivar funciones complicadas; por ejemplo, las derivadas de x^2 y x^5 son 2x y $5x^4$, por lo que la derivada de la función $3x^2 - 4x^5$ es $(3x^2 - 4x^5)' = (3x^2)' - (4x^5)' = 3\cdot(x^2)' - 4\cdot(x^5)' = 3\cdot(2x) - 4\cdot(5\ x^4) = 6x - 20x^4$. En general, la derivada de un polinomio cualquiera $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ es $f'(x) = a_1 + 2a_2x + ... + na_nx^{n-1}$; como caso particular, la derivada de una función constante es 0. Si y = u(z) y z = v(x), de manera que y es una función de z y z es una función de x, entonces y = u(v(x)), con lo que y es función de x, que se escribe y = f(x) donde f es la composición de u y v; la regla de la cadena establece que dy/dx = (dy/dz)·(dz/dx), o lo que es lo mismo, f'(x) = u'(v(x))·v'(x). Por ejemplo, si $y = e^z$ en donde e = 2,718... es la constante de la exponenciación, y z = ax donde a es una constante cualquiera, entonces $y = e^{ax}$; según la tabla, $dy/dz = e^z$ y dz/dx = a, por lo que $dy/dx = ae^{ax}$.

Muchos problemas se pueden formular y resolver utilizando las derivadas. Por ejemplo, sea y la cantidad de material radiactivo en una muestra dada en el instante x. Según la teoría y la experiencia, la cantidad de sustancia radiactiva en la muestra se reduce a una velocidad proporcional a la cantidad restante, es decir, dy/dx = ay con una cierta constante negativa a. Para hallar y en función de x, hay que encontrar una función y = f(x) tal que dy/dx = ay para cualquier x. La forma general de esta función es $y = ce^{ax}$ en donde c es una constante. Como $e_0 = 1$, entonces y = c para x = 0, así es que c es la cantidad inicial (tiempo x = 0) de material en la muestra. Como a<0, se tiene que e^{ax} tiende a 0 cuando x crece, por lo que y tiende a 0, confirmando que la muestra se reducirá gradualmente hasta la nada. Este es un ejemplo de caída exponencial.

Si a es una constante positiva, se obtiene la misma solución, $y = ce^{ax}$, pero en este caso cuando el tiempo transcurre, la y crece rápidamente (como hace e^{ax} si $a>0$). Esto es un crecimiento exponencial, que se pone de manifiesto en explosiones nucleares. También ocurre en comunidades animales donde la tasa de crecimiento es proporcional a la población.

1.3.2. Segunda derivada

La derivada $dy/dx = f'(x)$ de una función $y = f(x)$ puede ser diferenciada a su vez para obtener la segunda derivada, que se denota d^2y/dx^2, $f''(x)$ o D2f. Si por ejemplo x es el tiempo e y es la distancia recorrida, entonces dy/dx es la velocidad v, y $d^2y/dx^2 = dv/dx$ es el incremento en la velocidad, es decir, la aceleración. Según la segunda ley del movimiento del Newton, un cuerpo de masa constante m bajo la acción de una fuerza F adquiere una aceleración a tal que $F = ma$. Por ejemplo, si el cuerpo está bajo la influencia de un campo gravitatorio $F = mg$ (donde g es la magnitud del campo), y entonces $ma = F = mg$ por lo que $a = g$, y por tanto $dv/dx = g$. Al integrar, se tiene que $v = gx + c$, en donde c es una constante; sustituyendo $x = 0$ se ve que c es la velocidad inicial. Integrando $dy/dx = v = gx + c$, se tiene que $y = ½gx^2 + cx + b$ en donde b es otra constante; sustituyendo de nuevo $x = 0$ se tiene que b es el valor inicial de la y.

Las derivadas de orden superior $f(n)(x) = d^ny/dx^n$ = Dnf de f(x) se calculan diferenciando n veces sucesivamente. El teorema de Taylor muestra que f(x) se puede aproximar como una serie de potencias $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ...$, donde los coeficientes $a0,a_1$, ... son constantes tales que $a_n = f(n)(0)/n!$ (en donde $0!=1$ y $n!= 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$ para cualquier n 1). Las funciones utilizadas más a menudo pueden aproximarse por series de Taylor; por ejemplo si $f(x) = e^x$ se tiene que $f(n)(x) = e^x$ para cualquier n, y que $f(n)(0) = e^0 = 1$.

1.3.3. Derivadas parciales

Las funciones con varias variables tienen también derivadas. Sea z = f(x, y), es decir, z es función de x e y. Si se mantiene y constante temporalmente, z es una función de x, con lo que al diferenciar se obtiene la derivada parcial z/x = f/x; de la misma manera, si se toma la x como constante y se diferencia con respecto de la y se obtiene z/y = f/y. Por ejemplo, si $z = x^2 - xy + 3y^2$ se tiene que z/x = 2x - y y que z/y = -x + 6y. Geométricamente, una ecuación z = f(x, y) define una superficie en un espacio tridimensional; si los ejes x e y son horizontales y el eje z es vertical, entonces z/x y z/y representan los gradientes de dicha superficie en el punto (x, y, z) en la dirección de los ejes x e y, respectivamente. Las derivadas parciales también se pueden calcular para funciones con más de dos variables, considerando que todas las variables menos una son constantes y derivando con respecto a ésta. Utilizando este procedimiento es posible calcular derivadas parciales de orden superior. Las derivadas parciales son importantes en las matemáticas aplicadas, pues existen funciones que dependen de diversas variables, como el espacio y el tiempo.

1.3.4. Cálculo integral

1.3.4.1. Perspectiva general de la integración

La integración es el procedimiento por el cual se puede determinar el área limitada por la curva de ecuación y = f(x) el eje X y las rectas x = a y x = b.

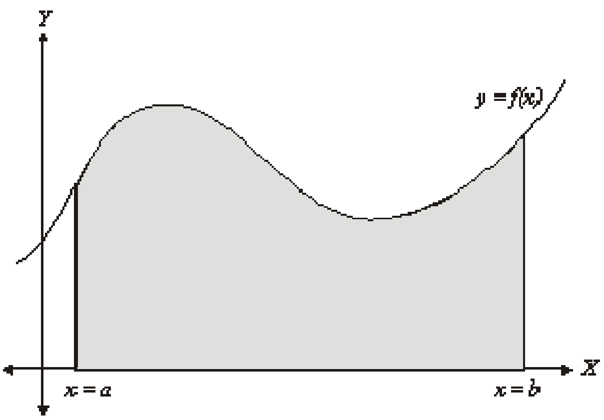


Fig. 1.1 Área bajo la curva

Para encontrar dicha área inscribimos bajo la curva dada un número determinado de rectángulos, la suma del área de cada rectángulo es una aproximación del área bajo la curva, y conforme el número de rectángulos tiende a infinito nos aproximamos más al área exacta de la región. Se volvería muy complicado inscribir demasiados rectángulos y calcular el área de cada uno y después sumarla, por ello surge el procedimiento de la integral conforme al siguiente límite:

$$Área = \lim_{n \to \infty} \sum_{n} f(x)\ \Delta x$$

Lo cual podemos expresar de la forma:

$$\int_a^b f(x)$$

a la cual llamamos integral de f de a a b , ésta representa un número y ése número es el área de la región acotada entre la curva y las rectas mencionadas con anterioridad.

Los métodos de integración son procedimientos que nos permiten calcular este valor de manera más sencilla. Cuando este valor existe para la función, se dice que la función es integrable, de lo contrario es una función no integrable.

Teorema: Si f es una función continua en el intervalo cerrado [a, b], entonces es integrable de a a b.

1.3.4.2. Propiedades de la integral:

$$a)\ \int_a^b (f \pm g) = \int_a^b f \pm \int_a^b g$$

$$b)\ \int_a^b kf = k\int_a^b f$$

$$c)\ \int_a^b x^n\, dx = x^{n+1}/n+1 \Big|_a^b + C$$

Si f y g son funciones integrables en el intervalo [a, b] y k una constante, entonces f + g y kf son integrables en el mismo intervalo.

Una integral que tiene límites de integración (a, b) se llama integral definida, de lo contrario se nombra indefinida.

Algunas de las integrales trigonométricas más conocidas son:

INTEGRALES INDEFINIDAS	INTEGRALES INDEFINIDAS
1. $\int dx = x$	9. $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x$
2. $\int au \, dx = a \int u \, dx$	10. $\int \operatorname{tg} x \, dx = \ln\lvert\sec x\rvert$
3. $\int (u+v) dx = \int u \, dx + \int v \, dx$	11. $\int \operatorname{cotg} x \, dx = \ln\lvert\operatorname{sen} x\rvert$
4. $\int x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad (m \neq -1)$	12. $\int \sec x \, dx = \ln\lvert\sec x + \operatorname{tg} x\rvert$
5. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert$	13. $\int \operatorname{cosec} x \, dx = \ln\lvert\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x\rvert$
6. $\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx$	14. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$
7. $\int e^x \, dx = e^x$	15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x$
8. $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x$	16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} x$

Tabla 1.2 Formulario de integrales

1.3.4.3. Método de integración por sustitución simple:

Sea f(x) diferenciable, entonces la diferencial de f(x) = f'(x)dx. Éste método se basa en realizar cambios de variable en el integrando, de tal forma que transforme la integral original en otra equivalente y más simple de integrar, ya sea por la tabla de integral anterior o por algún otro método.

$$\int_a^b f(x)$$

Por otra parte, sabemos que para una función f integrable en el intervalo [a, b] su integral es un número y es posible definir una función mediante una integral definida, para esto hacemos lo siguiente:

Definimos:

$$F(x) = \int_a^x f$$

1.3.4.4. Método de integración por partes

Si la integración por sustitución simple falla o se complica, es posible utilizar una doble sustitución conocida como integración por partes. Éste método tiene como base la integración de la igualdad de la derivada del producto de dos funciones:

Sean $U = U(x)$ y $V = V(x)$, entonces:

$Dx\,[U(x)\cdot V(x)] = U(x)\cdot V'(x) + U'(x)\cdot V(x)$, *es decir*
$U(x)\cdot V'(x) = Dx\,[U(x)\cdot V(x)] - U'(x)\cdot V(x)$, *es decir*
$\int U(x)\cdot V'(x)dx = U(x)\cdot V(x) - \int U'(x)\cdot V(x)dx$

Como $dU = U'(x)dx$, $dV = V'(x)dx$, se tiene:

$$\int UdV = U\cdot V - \int VdU$$

La integral de VdU debe ser sencilla, y algunas veces puede repetirse el método de integración por partes varias veces hasta conseguir el resultado final.

1.3.4.5. Integración trigonométrica

Para resolver integrales que involucran a funciones trigonométricas debemos hacer un uso adecuado de otros métodos, ya sea utilizando la tabla de integrales básicas o integración por partes y al mismo tiempo nos será muy útil conocer algunas identidades trigonométricas que pueden sustituirse en la función original para hacer la integración más fácil:

1.3.4.6. Identidades:

a. $1 = \alpha$ Cosec • αSen

b. $1 = \alpha$ Sec • αCos

c. $1 = \alpha$Cotg • αTg

de cocientes o división

a. α Sen a / Cos = αTg

b. α Cos a / Sen = αCtg

de cuadrados (pitagóricas)

a. Sen^2+ Cos α ^{2} 1 = α

b. Sec^2 + Tg1 = α ^{2} α

c. Cosec^2 + Ctg 1 = α^2 α

de ángulo medio

a. Sen^2) / 2α – Cos(21 = α

b. Cos^2) / 2α + Cos (21 = α

Con estas identidades podemos transformar integrales trigonométricas complejas a algunas más sencillas.

1.3.4.7. Método de sustitución trigonométrica

Cuando aparecen radicales en un integrando generalmente son problemáticos y por lo común tratamos de librarnos de ellos. Así, con una sustitución apropiada que racionalice la expresión nos permitirá simplificar.

Consideramos integrandos de la siguiente forma:

$$\text{I) } \sqrt{a^2x^2 + b^2}$$
$$\text{II) } \sqrt{a^2x^2 - b^2}$$
$$\text{III) } \sqrt{b^2 - a^2x^2}$$

En donde para cada uno de ellos se sugieren las siguientes sustituciones:

α Tg(•x = b/a

α Sec(•x = b/a

α Sen(•x= b/a

1.3.4.8. Fracciones parciales

Éste método de integración comprende la integración de fracciones racionales, es decir, funciones cuyo numerador y denominador son funciones polinomiales: P(x) / Q(x). Se estudian aquellos casos en los cuales el grado del numerador es menor que el de el denominador. La idea es tratar de descomponer esta fracción en la suma de fracciones más simples denominada fracciones parciales.

Nos interesan también en nuestro estudio fracciones que al ser factorizadas, los factores que aparecen sean lineales o cuadráticos los cuales pueden o no repetirse. De ésta forma el método de integración por descomposición de fracciones parciales lo estudiamos en dos apartados: Factores lineales y factores cuadráticos.

Procedimiento:

Para descomponer una función racional en fracciones parciales procedemos como sigue:

1. Si la función es impropia, esto es, si el grado de P(x) es mayor o igual al de Q(x) se realiza primero la división para expresarla en términos de fracciones propias.
2. Se factoriza Q(x) en producto de factores cuadráticos irreducibles con coeficientes reales. Factores esperados: ax + b y $ax^2 + bx + c$
3. Por cada factor de la forma (ax + b)k se espera que la descomposición tenga la forma: $A_1/(ax + b) + A_2/(ax + b)^2 + ... + A_k/(ax + b)^k$.
4. Por cada factor de la forma $(ax + bx + c)^m$ se espera que la descomposición tenga la forma en términos de: $B_1x + C_1 / (ax^2 + bx + c) + B_2x + C_2 / (ax^2 + bx + c)^2 + ... + B_mx + C_m / (ax^2 + bx + c)^m$.
5. Sustituya una función racional por la suma de las fracciones parciales.
6. Encuentra el valor de los coeficientes.
7. Calcule las integrales.

1.3.4.9. Cálculo de área de regiones planas mediante integrales

Para calcular el área de una región R acotada por las gráficas y = f(x), x = a, x = b y y = 0 donde R esta por debajo de y = f(x) entre x = a y x = b su área esta dada por:

$$\text{Área de } R = \int_a^b f(x)\,dx$$

es decir, esto es para regiones por arriba del eje X, ahora, para regiones debajo del eje X, tenemos lo siguiente: El área es un número no negativo, si la gráfica y = f(x) esta por debajo del eje X, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

es negativo y por tanto no puede ser un área, sin embargo, sólo es el negativo del área de la región R, entonces el área queda de la siguiente forma:

$$\text{Área de } R = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Para una región que contempla un área por debajo del eje X y al mismo tiempo por arriba, tenemos:

$$\text{Área de } R = \text{Área de } R_1 + \text{Área de } R_2 = \int_a^b f(x)\,dx \; - \; \int_a^c f(x)\,dx$$

Una manera útil de pensar:

Cuando se consideran integrales muy complicadas, hay una manera muy útil para pensar siguiendo éstos pasos:

1. Bosqueje la gráfica.
2. Córtela en pedazos delgados (Tiras) y marque una pieza representativa.
3. Aproxime el área de esa pieza como si fuera un rectángulo.

4. Sume las aproximaciones a las áreas de las piezas.
5. Tome el límite cuando el ancho de las piezas se aproxima a cero, obteniendo así una integral definida.

1.3.4.10. Una región entre dos curvas:

Primero consideremos lo siguiente:

- Curvas: y = f(x) y y = g(x).
- g(x) < f(x) en a < x < b.

En la figura notamos que f(x) – g(x) da la altura perfecta de un rectángulo representativo, aunque g(x) esta debajo de X:

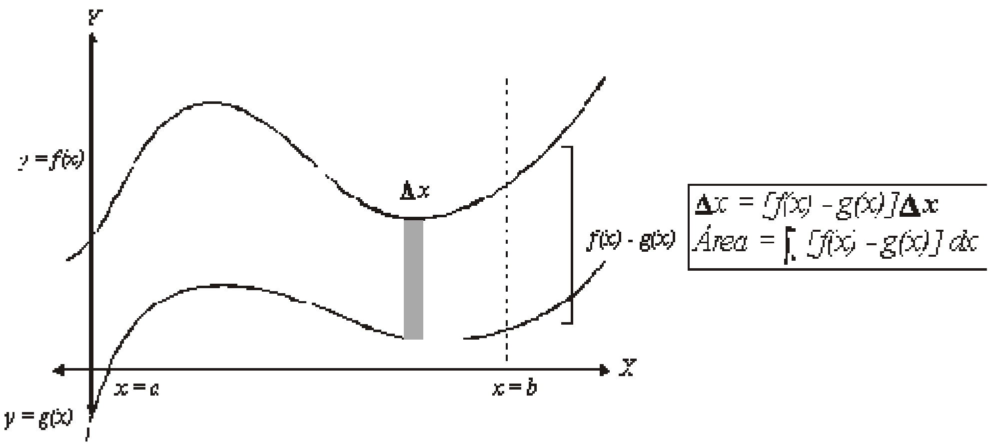


Fig. 1.2 Región entre 2 curvas

1.3.4.11. Volúmenes de sólidos

Podemos usar la integral definida entre otras cosas para el cálculo de volúmenes de sólidos al seccionar éstos y siempre y cuando el volumen de cada pedazo sea fácil de obtener.

Ya que una figura de alguno de estos tipos:

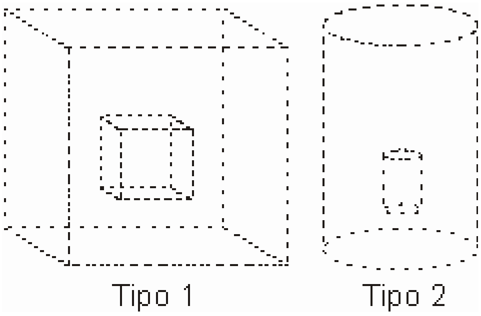


Fig. 1.3. Volúmenes de sólidos

Se calcula como: V = Área de la base volumen de un fragmento de cilindro o de cualquier figura regular se obtiene como:

$A\Delta_i \, x\Delta \bullet_i$

Por lo tanto, cualquier figura al ser seccionada se determina mediante:

$$\text{Volúmen} = \int_a^b A(x)\, dx$$

Tomando el límite se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{n} A(x_i)\Delta x_i \text{ donde } a \leq x_i \leq b$$

1.3.4.12. Crecimiento y decaimiento exponencial

Una de las aplicaciones de la integral se refiere al crecimiento y decaimiento exponencial. El crecimiento o disminución de algún dato se puede expresar de forma matemática con las funciones ln(x) y ex y usar la integración y derivación para encontrar una fórmula que nos permita hacer el cálculo de alguna cantidad que crece en un tiempo determinado, encontrar ese tiempo o bien , la constante de crecimiento o decaimiento a la cual está sujeta cierta cantidad inicial. Sabemos que si y respecto a un Δ tenemos una función y = f(t) puede haber un desplazamiento cambio t, por tanto: Δ de tiempo

$\Delta y = ky\Delta t$

Si despejamos obtenemos t = kyΔ y /Δ y en su forma de límite, esto representa la ecuación diferencial:

$dy / dt = ky$,

Aquí, k representa una constante de crecimiento o decaimiento:

Si k > 0, entonces se denomina crecimiento exponencial.

Si k < 0, entonces se denomina decaimiento exponencial.

Para resolver la última ecuación dada, despejamos t y "y" tenemos: dy / y = kdt, integrando de ambos lados tenemos:

$\int Dy / y = \int kdt$

$ln(y) = kt + C$

La condición $y = y_0$ *para un* $t=0$ *da* $C = ln(y0)$, *así*

$ln(y) - ln(y_0) = kt$ *o bien,*

$ln(y/y_0) = kt$, *al cambiar ala forma exponencial se tiene:*

$y = y_0 e^{kt}$

CAPÍTULO 2.

ANÁLISIS DE LA PROBLEMÁTICA

El objetivo del segundo capítulo es plantear las causas posibles por las que aún no se ha incluido el software y el uso de las computadoras como una herramienta que pueda ayudar a la comprensión y solución de problemas matemáticos, así como mostrar los beneficios que aporta en el proceso de enseñanza aprendizaje.

2.1. Introducción

La enseñanza es una actividad sumamente compleja, a través de la historia el hombre ha experimentado métodos, procedimientos y medios con el propósito de lograr efectividad en el proceso de enseñanza aprendizaje. La idea de utilizar medios computacionales es casi tan antigua como la computación misma, desde su inicio surgió el interés por utilizarla en educación. Con el desarrollo de las tecnologías de la información y la comunicación, se abren perspectivas para su integración en la esfera educacional de modo que se logre un cambio profundo en la concepción de su utilización, particularmente en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática,

2.2. Análisis

No es a través de discursos sobre ello, es necesario tener referencias, conocer actividades que se pueden realizar con estas tecnologías. Existen libros de Matemática superior como (Warner, 2001) y (Larson, 1995) en los cuales se hace referencia y se dan indicaciones dónde y cómo utilizarla, en el primer caso se dan indicaciones para utilizar un sitio Web con tutoriales de matemática y en el segundo, se indican ejercicios para utilizar la computadora en cálculos numéricos y gráficos que permiten hacer conjeturas, análisis. Otro aspecto importante es proporcionarles a los docentes los medios para que puedan informarse de los aportes a la enseñanza - aprendizaje con medios informáticos

Las herramientas informáticas permiten experimentar, posibilita que los estudiantes participen en la obtención de conocimientos, que se apropien de los significados de los objetos matemáticos, que comprendan mejor los conceptos, además, estas herramientas permiten el aprendizaje individualizado y todo esto lleva tiempo y hace que se convierta en una preocupación por parte de los docentes de matemática

Hoy no es posible aprender toda la información de la que se dispone y la memorización no es la estrategia. Otras habilidades resultan cruciales:

capacidad para buscar información, para enjuiciarla críticamente, para aplicarla en la resolución de problemas, entre otras posibles.

Por ello se requiere una formación distinta de la tradicional, que permita a los profesionales una mejor adaptación a sistemas productivos de diversa índole y sujetos a cambios rápidos. Se privilegia la comprensión, la comunicación tanto oral como escrita, la autonomía en el aprendizaje, la obtención, selección y análisis crítico de la información, la resolución eficiente de problemas. En resumen, se potencia la capacidad de pensar, de aprender.

Esto trae consigo cambios en los métodos de enseñanza, privilegiando aquellos que conduzcan a una participación más activa del alumno, pero que sin dudas pueden consumir más tiempo, lo que constituye una dificultad. Sin embargo la formidable expansión que las nuevas tecnologías informáticas están experimentando en los últimos años puede y debe ser aprovechada en favor de la educación. El uso de las nuevas tecnologías informáticas puede facilitar el cambio en el trabajo de formación del profesional.

Crear alternativas para un mejor aprendizaje, apoyadas en las computadoras y redes de telecomunicaciones, como núcleo alrededor del cual se agrupan las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones, de modo que se supere la mera transmisión de contenidos en la enseñanza y se proporcione un bagaje más versátil y adaptado a las demandas múltiples y cambiantes de las sociedades actuales, lleva hoy a diseñar con mucho cuidado los programas educativos que asimilan estas tecnologías, para lograr un buen resultado y además un equilibrio costo/beneficio que repercuta en la calidad y mejora de la educación.

La tecnología no puede suplir al maestro y a la enseñanza, que es un proceso esencialmente espiritual del hombre. Asumir las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones en la educación, implicará necesariamente para los docentes, más allá de un conocimiento instrumental especializado, una profunda reflexión sobre las consecuencias que estos medios pueden tener en sus alumnos. Decidir su uso por el hecho de que "están ahí", porque se vinculan a la idea de innovación, o porque son alternativos, no es suficiente. El empleo de tecnologías de avanzada, sobre concepciones pedagógicas tradicionales, incapaces de responder a los nuevos retos en la formación humanística de los individuos y a las actuales demandas de la sociedad, pierde en gran medida su valor y limita los resultados fundamentales que estas deben aportar.

Se hace entonces necesaria una nueva visión e interacción entre el alumno, el profesor y estas nuevas tecnologías y ello exige la creación de nuevos modelos de enseñanza y aprendizaje, nuevos procedimientos y estrategias de búsqueda, organización, procesamiento y utilización de la información, así como nuevos enfoques formativos que tengan en cuenta las oportunidades y retos de estas tecnologías.

Trabajar por desplegar estrategias para desarrollar habilidades en buscar, seleccionar y procesar la información requerida, desarrollar esquemas de comprensión, así como dominar métodos de investigación, empleando y potenciando las nuevas tecnologías, si parece adecuado para explotar estos recursos, como un camino mas expedito al conocimiento y para funcionar en una comunidad global de trabajo y colaboración.

Vistas desde el panorama educativo y en particular desde el plano de la Educación Superior, pueden enriquecer y hasta transformar radicalmente las prácticas pedagógicas y científicas en este nivel educacional, elevando significativamente el grado de competitividad y de desarrollo en los profesionales. El reto está en estudiar y promover una nueva manera de comunicar y gerencia el conocimiento, apoyados en la integración de estas nuevas tecnologías consideradas sobre todo como sistemas de representación, que implican a los procesos más decisivos del conocimiento, la percepción, las estructuras cognitivas, afectivas y volutivas y al saber en sí mismo, en concordancia con el desarrollo que han tenido las teorías psicológicas y pedagógicas, buscando aportar a la enseñanza una base más científica que la haga productiva y eficiente, mejorando así la calidad del trabajo académico y de los frutos del mismo.

Una de las limitaciones presentadas para introducir la computadora en la educación, ha sido la resistencia de los maestros a utilizar la nueva tecnología. Es indispensable la preparación de los docentes para realizar esa importante tarea. El profesor es la persona más capacitada para conocer los problemas de su aula, de la asignatura que imparte y la solución de los mismos. El sistema de acciones didácticas consecutivas que organiza para llevar adelante su clase permite la incorporación de diversas técnicas que distinguen la misma clase impartida por dos profesores distintos. Sin dudas, la inserción de la computadora en el proceso docente es tarea del profesor, y solo él decide si a pesar de las limitaciones de un programa, este puede ser utilizado por sus alumnos, o si por el contrario pese a las virtudes que brinda el mismo, no satisface los objetivos a alcanzar en la asignatura.

2.3. Ventajas de la computadora sobre otros métodos de enseñanza

Las ventajas de la correcta utilización de la computación, en la enseñanza de la Matemática, a criterio de diferentes autores, son varias:

- Explicar conceptos que, de otra forma, quedarían en un nivel de abstracción difícil de asimilar por muchos estudiantes en un tiempo breve, por ejemplo: volúmenes generados por funciones al rotar sobre un eje, representaciones de superficies en tres dimensiones, conceptos y resultados teóricos susceptibles de ser comprobados empíricamente (tales como la aproximación de una función mediante polinomios de Taylor, la convergencia de series infinitas, la existencia de movimientos caóticos, el teorema central del límite, etc.).
- Realizar operaciones complejas de cálculo.
- Individualizar el proceso de aprendizaje, pues facilita la adaptación curricular a las necesidades e intereses de cada alumno, convirtiéndose así en el complemento perfecto del profesor y de los materiales: cada alumno podrá reforzar, con ayuda de este tipo de programas, aquellos puntos conceptuales que le resulten más difíciles de asimilar, y practicar con ellos tantas veces como le sea necesario para completar su comprensión.

- Acceder a diferentes fuentes de información con gran rapidez y obtener información en un conjunto muy amplio de aplicaciones, sobre le uso de las tecnologías de la información y la comunicación.

El uso de las NTIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje no puede interpretarse como un medio tecnológico más, sino como un agente de profundos cambios en todo el sistema. La introducción de las mismas requiere de una buena proyección, planificación y voluntad política, involucrando a todos los actores.

Un papel protagónico lo representa el profesor que pasará de transmisor de la información a evaluador y diseñador de situaciones mediadas de aprendizajes. Los docentes tendrán que poseer habilidades de coordinador de proyectos de equipo, siendo capaces de organizar el currículo según las necesidades e intereses de los alumnos, creando un entorno colaborativo para el aprendizaje.

El desarrollo en la computación, la Tecnología de la Informática y las Comunicaciones (TIC), así como Internet abren un mundo nuevo de posibilidades, que tiene un gran impacto en la enseñanza, y en particular en la enseñanza de la Matemática.

2.4. Justificación

La introducción de la computadora en la enseñanza impone una revolución profunda tanto en los métodos de la didáctica en general y en particular en la didáctica de la Matemática, definiendo un nuevo rol y función del profesor.

El análisis de situaciones problemáticas, la declaración correcta del problema, la búsqueda de estrategias para determinar la solución (tradicionalmente la solución analítico sintética), el uso de idiomas formales, la introducción de la lógica formal y sus aplicaciones, ha formado y continua formando el núcleo de este acercamiento algorítmico que empezó con las computadoras y ahora constituye una de las piedras angulares de la enseñanza de la Matemática a través de la Informática.

- La naturaleza finita de los procedimientos que se ejecutan con ayuda de las computadoras.
- Se produce un movimiento al paradigma discreto, los procesos de suma, los procedimientos iterativos, recursivos, el cálculo aproximado, los modelos expresados por las ecuaciones en diferencia, la teoría de conjuntos relaciones y grafos entre otros aparecen como buenas alternativas de modelación y solución a los problemas abiertos, una amplia gama de aplicaciones y de nuevos temas a introducir en los programas de estudios.
- La modelación y simulación de procesos y fenómenos.
- Las computadoras han abierto nuevos caminos a la modelación y simulación de procesos y fenómenos, el presentar los conocimientos matemáticos desde su interacción con otras disciplinas y la vida (modelos matemáticos) fundamenta al estudiante la necesidad e importancia del conocimiento y el lenguaje preciso de la Matemática.
- Rapidez en el procesamiento y el almacenamiento de gran cantidad de datos (información).
- La creciente necesidad de organizar, procesar y analizar grandes cantidades de datos, conlleva al estudio obligado de los métodos de las probabilidades y las estadísticas, la teoría de error, técnicas de cálculo aproximado y el estudio y búsqueda de algoritmos más eficientes. Necesariamente esto trae consigo importantes implicaciones a los currículos y particularmente a la enseñanza de la Matemática.
- El reciente desarrollo de la graficación y animación logrado con las computadoras.
- La representación de situaciones y de la información mediante gráficas, la visualización de transformaciones y construcciones geométricas en el plano y el espacio, unida a la simulación, pone en manos de los estudiantes y profesores un mundo de variados matices el cual permite ampliar la comprensión de los conceptos y métodos de la Matemática más allá de la comprensión formal.

- Los softwares para el tratamiento simbólico de datos (Asistentes Matemáticos).

La aparición de varios softwares de aplicación: hojas de cálculo electrónicas (Excel), software estadísticos (Statgraphics, SSPS) y sobre todos los más recientes software para el tratamiento simbólico de datos (Asistentes Matemáticos: Derive, MatLab), permiten al matemático y a los profesores de Matemática y quienes necesiten de las herramientas de la Matemática contar con un laboratorio en su salón de clases, produciendo un cambio revolucionario (aun no percibido en toda su dimensión) en la forma de enseñar e investigar Matemática.

Es precisamente este último aspecto que propone serios problemas a la didáctica de la Matemática al relegar a un segundo plano el trabajo mecánico en la solución de muchos problemas que absorbía mucho tiempo y energías, abriendo nuevos caminos para el desarrollo de la Matemática, la didáctica de la Matemática y del pensamiento humano en general.

El uso de la computadora y los asistentes Matemáticos permite ampliar la comprensión de los conceptos y métodos de la Matemática más allá de la comprensión formal: la construcción de situaciones donde se formulan conjeturas y la retroalimentación inmediata y efectiva, permite al estudiante aprender de sus errores. De esta manera se va entrenando al estudiante en el arte de conjeturar y experimentar.

CAPÍTULO 3.

DESARROLLO

En el presente capítulo se detalla cuales serían las diferentes áreas en que la computación puede aplicarse, cuales son los requerimientos, así como los diferentes softwares y paginas de interés en cada área.

En el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas en particular, es ya común la existencia de programas informáticos de cálculo simbólico, los cuales admiten papeles muy variados en la interacción entre los alumnos y el profesor. No se puede negar que algunos de estos sistemas actuales, resultan potentes auxiliares tanto en las tareas de cálculo numérico como simbólico, así como en la representación gráfica de funciones que facilita el análisis de situaciones matemáticas complejas y abre nuevas posibilidades. En este nuevo escenario la dinámica dentro y fuera de la clase cambia necesariamente.

Ya existe en el mercado un gran número de paquetes profesionales capaces de resolver cualquier tarea que hasta hace poco requería de cálculos muy engorrosos (DERIVE, MATLAB, MATHEMATICA, etc.), además de los cientos software diseñados especialmente para la enseñanza de la Matemática en los más disímiles temas, tales como tutoriales, entrenadores, evaluadores, libros electrónicos, etc.

Sin embargo, las aplicaciones actuales no siempre consideran los avances pedagógicos, ni los cambios psicológicos que influyen en la educación. Simplemente perpetúan con tecnología avanzada estructuras anteriores, incapaces de asumir nuevas demandas y técnicas docentes. Por tanto, es necesaria una nueva versión de la interacción entre el alumno y la computadora, de un nuevo paradigma para soportar nuevas técnicas. No tiene sentido que un programa de formación se limite a pasar el texto por la pantalla, porque así no saca partido a las mejores cualidades del ordenador, es absurdo utilizar un aparato caro para hacer lo que esté al alcance de la sencilla técnica del libro.

Una de las aplicaciones menos conocidas del entorno de la Computación es la creación de software para la generación de otros aparatos que facilitan la tarea de otras personas no dedicadas al área de las matemáticas; por ejemplo, que haría un físico-matemático si no contara con un software que tenga como tarea primordial el cálculo de funciones matemáticas, o la graficación de éstas mismas, la labor de este tipo de científicos se volvería muy tediosa, es por ello que en la actualidad se genera software como el de Matemática, Derive, Maple y Theorist, los cuales pueden crear hermosas figuras de objetos matemáticos, y además realizar muchos tipos de cálculos incluyendo integración simbólica.

3.1. Cómo se puede utilizar la computación en la educación

Las diferentes dimensiones en que la computación puede utilizarse en la educación, se resumen en:

- Computadora como objeto de estudio: aprender acerca de la computadora (educación acerca de la computación)

- La computadora como medio de enseñanza-aprendizaje: ambientes de enseñanza-aprendizaje enriquecidos con la computación (enseñanza asistida por computadoras).
- La computadora como herramienta de trabajo: uso de las aplicaciones de la computadora para apoyar procesos educativos (educación complementada con la computadora).

3.1.1. La computación como objeto de estudio.

Esta dimensión es la que corresponde al aprendizaje de la computación y comprende:

- Alfabetización computacional.
- Programación computacional y solución de problemas.
- Formación de especialistas en computación.

Para los profesores de matemática, además de la alfabetización computacional, es necesario saber trabajar con determinado software. El problema de la determinación de cuáles deben ser objeto de estudio por los docentes de matemática, depende de varios factores, entre ellos:

- Rama de la Matemática (Geometría, Álgebra, Estadística, Optimización, etc.)

- Características del software.

- Criterios del colectivo de carrera, disciplina, etc.

Aunque existen numerosos asistentes o paquetes matemáticos, para facilitar la realización de operaciones y procesos matemáticos (cálculos gráficos, de funciones de dos o tres dimensiones, análisis estadístico análisis de sensibilidad en programación lineal, simulación de problemas, etc.) a continuación se resumen los más conocidos y utilizados en matemática: **

- CABRI GEOMETRE, este software ofrece potencialidades para realizar construcciones geométricas, realizar ejercicios creativos. Actualmente es uno de los software que más se está utilizando mundialmente para el estudio de la geometría, por sólo citar el ejemplo, del cantón de Vaud en Suiza que en 1988 equipó todas sus escuelas de Cabri-géometre y continua utilizándolo aún hoy, trece años después (Lab, 2001).
- En el ámbito universitario, han sido y continúan siendo objeto de estudio para profesores de matemática los asistentes más utilizados en diferentes carreras, disciplinas y asignaturas, entre ellos:
- MATHEMATICA: incluye un amplio rango de funciones matemáticas, soporta operaciones de álgebra lineal, realiza todo tipo de operaciones algebraicas, opera con funciones, derivadas e integrales y, entre otras muchas cosas, incorpora un módulo gráfico que tiene salida en formato.

Matemática es el primer programa para la computación y visualización numérica, simbólica y gráfica. Matemática ofrece a sus usuarios una herramienta interactiva de cálculo y un versátil lenguaje de programación para una rápida y precisa solución a problemas técnicos. http://www.addlink.es/productos.asp?pid=1

Los documentos electrónicos de Matemática, llamados notebooks le permiten organizar de forma fácil sus textos, cálculos gráficos y animaciones para impresionantes informes técnicos, courseware, presentaciones o registro de su trabajo. Y además puede usar el protocolo de comunicación de Matemática, MathLink, para intercambiar información entre Matemática y otros programas.

Características principales

- Realización de cálculos y simulaciones de cualquier nivel de complejidad mediante el uso de la amplia librería de funciones matemáticas y computacionales.
- Rápida y fácil importación y exportación de datos, que incluye imágenes y sonido, en más de veinte formatos.
- Generación de documentos interactivos, independientes de la plataforma, con textos, imágenes, expresiones matemáticas, botones e hyperlinks.
- Entrada de expresiones a través del teclado o de la paleta (programable) más adecuada.
- Construcción de complejas expresiones y fórmulas con formato automático y ruptura de líneas.
- Exportación de los "notebooks" a formato HTML para presentaciones web o LaTeX para publicaciones especiales.

MATLAB: potente lenguaje de programación de cuarta generación. Es un programa interactivo que ayuda a realizar cálculos numéricos, analizando y visualizando los datos, para resolver problemas matemáticos, físicos, etc. Matlab trabaja con escalares, vectores y matrices.

MATLAB es un medio computacional técnico, con un gran desempeño para el cálculo numérico computacional y de visualización.

MATLAB integra análisis numérico, matrices, procesamiento de señales y gráficas, todo esto en un ambiente donde los problemas y soluciones son expresados tal como se escriben matemáticamente.

Escrito inicialmente como auxiliar en la programación de cálculo con matrices.

MATLAB fue escrito originalmente en fortran, actualmente está escrito en lenguaje C.

MATLAB es un lenguaje de programación amigable al usuario con características más avanzadas y mucho más fáciles de usar que los lenguajes de programación como basic, pascal o C.

Entre los sistemas de cálculo simbólico, numérico y gráfico de la actualidad es uno de los más potentes.

Es un sistema general de software para matemáticas y otras aplicaciones. Es usado por muchos investigadores, ingenieros y analistas, así como por estudiantes universitarios. Las aplicaciones del MATLAB comprenden la mayoría de las áreas de la ciencia, la tecnología y los negocios donde se aplican los métodos cuantitativos.

Es el paquete con el cual los estudiantes de Ingeniería en Telecomunicaciones y Electrónica trabajan durante toda la carrera, por lo que además de contribuir al aprovechamiento del tiempo para el desarrollo de las habilidades matemáticas, ayudaría a la familiarización con ese software.

Es un potente entorno integrado de cálculo simbólico y numérico con extensiones para la programación y otros campos específicos de la ingeniería que ofrece una gran cantidad de funciones, gráficas en colores de dos y tres dimensiones y notación matemática estándar, todo ello implementado en el módulo básico del programa y en numerosos toolboxes de extensión a los distintos temas específicos de las ingenierías, modelos económicos, finanzas, etc.

Permite la manipulación con facilidad y rapidez de las fórmulas y expresiones algebraicas y puede realizar la mayoría de las operaciones con las mismas. Puede expandir, factorizar y simplificar polinomios y expresiones racionales y trigonométricas; puede encontrar soluciones algebraicas de ecuaciones polinómicas y sistemas de ecuaciones algebraicas; puede evaluar derivadas e integrales simbólicamente y encontrar funciones solución de ecuaciones diferenciales; puede manipular series de potencias y límites y muchas otras facetas de la matemática algebraica; en fin puede ser utilizado en la mayoría de los temas de nuestra disciplina.

Es un programa interactivo que permite realizar de una manera simultánea una gran variedad de operaciones matemáticas, además de poderse trabajar con distintas plataformas según la potencia del software y del hardware disponible.

La precisión con que trabaja hace que no haya prácticamente limitación en cuanto al tamaño máximo de número entero que es capaz de manejar.

Resulta una herramienta versátil y flexible que permite a usuarios con capacidades elementales de programación realizar sofisticadas entornos interactivos.

- SPSS: se describe como un sistema de gestión de datos y análisis estadístico en entorno gráfico. Puede recibir datos desde cualquier fichero y utilizarlos para generar informes, tablas, gráficos de distribución y moda, estadísticas descriptivas y análisis estadístico complejo.
- STATGRAPHICS: Paquete general con poderosas gráficas y facilidades de información. Distribuido por módulos: Base (estadísticas básicas), series temporales, diseño experimental, control de calidad, métodos multivariantes y técnicas de regresiones avanzadas.
- STATISTICA: Contiene una amplia elección de herramientas de modelado y previsión (por ej. modelos lineales, modelos lineales/no lineales generalizados, análisis de sobrevivencia, series cronológicas y previsión), incluyendo selección automática de modelos y herramientas de visualización interactivas.

Estadísticos descriptivos, análisis exploratorio de datos: el programa calcula prácticamente todos los estadísticos descriptivos incluyendo medianas, modas, quartiles, medias y desviaciones estándar, límites de confianza para la media, simetrías... como en todos los módulos de STATISTICA se aumenta la posibilidad de los análisis mediante una amplia variedad de gráficos. Está disponible un conjunto de test para el ajuste de distribuciones normales a los datos aunque también es posible trabajar con otras distribuciones. Todos los estadísticos descriptivos y los gráficos resumen se pueden calcular para datos agrupados en una o más variables. Además de los gráficos estadísticos predefinidos, el usuario puede personalizar la visualización gráfica de los datos originales, estadísticos resumen, relaciones entre estadísticos.

Se pueden calcular todas las medidas normales de asociación, incluyendo coeficientes de incertidumbre, de Pearson, de Spearman, de Kendall, etc. Las matrices de correlación se pueden obtener para distintas ubicaciones de datos faltantes y además, para distintos formatos.

DERIVE: El Derive se utiliza para mejorar los resultados obtenidos con la metodología tradicional. Puede ser utilizado en la enseñanza de Álgebra Lineal y en el Cálculo Diferencial e Integral. En algunos casos, Geometría y Matemática Discreta.

El Derive es una potente calculadora, que puede ser aprovechada para motivar la introducción de nuevos métodos y conceptos; también para prevenir la fe ciega en el ordenador. (Ejemplos: discusión de sistemas con parámetros, diagonalización de matrices de orden superior a cinco para introducir métodos numéricos.)

Derive permite al profesor construir ejemplos para ilustrar conceptos y métodos, así como proponer problemas reales.

Las prácticas en Álgebra Lineal se centrarían en aprovechar las posibilidades de manipulación de Derive para la asimilación de técnicas de resolución de problemas más que en la comprensión de conceptos. Puede utilizarse para:

Cálculo de determinantes, Resolución de sistemas lineales, Algoritmo de Gauss, Cálculo de autovalores y autovectores, Métodos de separación de raíces.

Por otra parte, Derive permite ilustrar mejor algunos temas y ayuda a su comprensión pues libera al estudiante y al profesor de las manipulaciones engorrosas. Por ejemplo:

- Trabajar con las matrices de paso al estudiar la forma canónica de Jordan.
- Método de mínimos cuadrados continuos, trabajando en espacios euclideos de funciones.

Los ingenieros o, en general, los usuarios de las matemáticas necesitan la mayoría de las veces obtener resultados y saber interpretarlos, más que saber cómo se obtienen.

EXCEL: Microsoft Excel es una potente y a la vez sencilla hoja de cálculo, en la cual haremos operaciones matemáticas, científicas y operaciones con datos.

En la página http://www.svetlian.com/msoffice/excel.htm aparece una bibliografía variada para aprender a trabajar con Excel.

MICROCAL ORIGIN: el Origin (más abreviadamente) permite guardar múltiples tablas de datos, gráficos, análisis de los mismos, etc., en un mismo proyecto, de manera que la conexión entre estos no se dispersa y la información queda organizada y resulta de fácil manejo. Posee varias opciones para análisis estadísticos y para el ajuste de los resultados experimentales a modelos no lineales, permitiendo incluso incorporar modelos por parte el usuario, lo cual es sumamente ventajoso. También posee herramientas para el ajuste de la data experimental a modelos lineales, polinomiales y otros.

- MAPLE: permite un ambiente para resolución de problemas matemáticos complejos que involucran expresiones algebraicas, simbólicas, cálculos numéricos de alta precisión e visualización matemática.
- MathCAD: incluye funciones de cálculo y gráficas en dos y tres dimensiones; puede producir documentos con texto y gráficas; puede usar un coprocesador matemático en las máquinas que lo tengan incorporado.
- The Math Utilities: Grafica cualquier tipo de función. Incluye CURVES para gráficas en dos dimensiones y SURFS para gráficas en tres dimensiones.
- CoPlot: Un paquete de gráficas científicas. Puede generar gráficas rectangulares y polares, así como otro tipo de gráficas que incluyen las tres dimensiones. Varias gráficas se pueden mostrar en un sencillo sistema de ejes.

Si bien resultaría imposible realizar un análisis completo de las opciones que ofrecen este tipo de software para la enseñanza de las matemáticas, hemos considerado interesante incluir enlaces a cuatro ejemplos. Los ejemplos muestran las posibilidades de uso de diferentes programas en diversas áreas de las matemáticas:

1. Análisis de sensibilidad en programación lineal (investigación operativa) con Excel.
2. Distribución muestral y Teorema Central del Límite (estadística) con Minitab.
3. Presentación de conceptos mediante representación gráfica de funciones 3D (análisis) con MathCad.

4. Resolución de ecuaciones diferenciales mediante métodos numéricos (cálculo) con Mathematica.

Es poco conocida, al menos en nuestro país, las potencialidades del EXCEL para utilizarlo en: representación de superficies, en la solución de problemas de optimización,

Es muy importante que los docentes estén preparados en la utilización de Internet en la enseñanza – aprendizaje de la matemática.

3.1.2. La computación como medio de enseñanza aprendizaje.

En esta dimensión se considera como medio para:

- Proporcionar herramientas de cálculo, gráficos, etc.
- Propiciar ambientes de enseñanza aprendizaje (lecciones, problemas, etc.)
- Facilitar el aprendizaje de la matemática (entrenadores, juegos, etc.)

Existe un desarrollo considerable de acuerdo a la clasificación realizada por Galvis, éste autor clasifica el software de acuerdo a:

- El enfoque educativo
- La función educativa

En esta clase de software se consideran:

3.1.2.1. Tutoriales

Por lo general incluyen cuatro fases del proceso de enseñanza - aprendizaje que son: la introductoria, cuya función fundamental es motivadora, favoreciendo a la percepción selectiva de lo que se desea que el alumno aprenda, la de orientación, cuya función es la de enseñar la teoría a tratar (con variantes pedagógicas, en dependencia del modelo que se siga), la de aplicación, en la que hay transferencia de lo aprendido y la fase de retroalimentación, en la que por lo general, se ofrece retroinformación.

Por ejemplo: http://www.angelfire.com/ar/geom/

Es un tutorial de geometría plana elemental, en él se pide:

Seleccione alguno de los temas:

1. Triángulo
2. Cuadrado
3. Rectángulo
4. Circunferencia
5. Perímetros y áreas
6. Propiedades y definiciones
7. Links interesantes

3.1.2.2. Entrenadores

Están orientados principalmente al desarrollo de habilidades, no llevan a cabo la formación de conceptos nuevos, sólo supervisan la actividad práctica de los alumnos, mediante el control de errores.

http://www.ucf.edu.cu/publicaciones/anuario98/articulos/articulo7.htm

Es un entrenador para el análisis numérico del Dr. Ernesto R. Fuentes Garí de la Universidad de Cienfuegos.

3.1.2.3. Simulador y juegos educativos

La simulación de fenómenos naturales con el uso de la computadora la convierten en un elemento importante en educación. Debido a que los softwares de este tipo apoyan el aprendizaje por descubrimiento, en matemática son utilizados con gran frecuencia para propiciar el establecimiento de reglas y demostración de proposiciones y teoremas.

Una de las cualidades que posee este tipo de software es el alto grado de motivación que logra en el aprendiz a través del ensayo y error (orientado por el profesor) que le permite descubrir cosas que posteriormente confirma son correctas y fueron descubiertas por brillantes matemáticos quizás algunos siglos atrás.

Con la ayuda del simulador y la orientación del profesor, el alumno descubre cosas que fijará en su estructura cognitiva de manera más natural que si le son proporcionadas en clases sólo para que las entienda y las recuerde para luego aplicarlas. Esta herramienta permite al estudiante ir construyendo un puente entre las ideas intuitivas y los conceptos formales.

Los simuladores poseen la cualidad de apoyar el aprendizaje de tipo experiencial y conjetural, para lograr el aprendizaje por descubrimiento, pueden simular situaciones de la realidad, propician la interacción con un micromundo, en forma semejante a la que se tendría en una situación real, propicia a la formación de un modelo mental correspondiente al modelo visual. Puede utilizarse en cualquier etapa del aprendizaje.

Se utilizan fundamentalmente en la solución de problemas profesionales de optimización, predicción, sobre la base de modelos matemáticos. Por ejemplo: una experiencia realizada en algunos colegios a nivel medio superior en Francia, permite el estudio de algunas estructuras matemáticas como espacio vectorial de dimensión tres. Los alumnos por medio de manipulaciones matemáticas descubren las nociones de subespacio vectorial de dimensión uno y dos, y el concepto de base (Vaquero, 1987).

Los juegos educativos buscan que el entretenimiento sirva de contexto al aprendizaje de algunas temáticas. Existen juegos que proporcionan determinadas habilidades de cálculo. Por ejemplo mediante el juego de dominó, carreras de animales, etc. En Internet existen variados juegos para aprender matemática en los primeros grados, por ejemplo:

http://www.cientec.or.cr/matematica/juegos.html

Contiene un conjunto de juegos cooperativos para enseñar matemática a niños del primer ciclo de primaria y están localizables en el sitio:

http://www.cientec.or.cr/matematica.html

También los juegos didácticos pueden simular situaciones reales que reflejan esa realidad o a través de juegos de roles. Esta última modalidad es utilizada para la toma de decisiones de acuerdo a determinados problemas.

3.1.3. La computación como herramienta de trabajo

La computación como herramienta de trabajo puede tener tres funciones básicas:

- Organizar y disponer información,
- Posibilitar la comunicación,
- Elaborar materiales computarizados.

Existen diferentes formas y vías que permiten el trabajo con materiales informáticos en educación, creados con la finalidad específica de ser utilizados como medio didáctico, es decir, para facilitar los procesos de enseñanza y aprendizaje. Aquí se engloban desde los tradicionales programas basados en modelos conductistas de la enseñanza, los programas de Enseñanza Asistida por Ordenador, pasando por los programas de Enseñanza Inteligente Asistida por Ordenador que aplican técnicas de los Sistemas Expertos y la Inteligencia Artificial hasta los actuales multimedia e hipermedia.

En cualquier caso, estos materiales que suponen utilizar el ordenador con una finalidad didáctica tienen tres características básicas:

- son interactivos: contestan de forma inmediata las acciones de los estudiantes y permiten un diálogo continuo entre ordenador y el usuario a través de la interfase.
- individualizan el trabajo: se adaptan al ritmo de trabajo de cada uno, adaptando las actividades a las actuaciones de los alumnos
- son fáciles de usar, aunque cada programa tiene unas reglas de funcionamiento que se deberán conocer.

La funcionalidad del software educativo vendrá determinada por las características y el uso que se haga del mismo, de su adecuación al contexto y la organización de las actividades de enseñanza. Sin embargo, se pueden señalar algunas funciones que serían propias de este medio.

3.1.3.1. Funcionalidad del software

- Función informativa: se presenta una información estructurada de la realidad.
- Función instructiva: orientan el aprendizaje de los estudiantes, facilitando el logro de determinados objetivos educativos.
- Función motivadora: los estudiantes se sienten atraídos por este tipo de material, ya que los programas suelen incluir elementos para captar la atención de los alumnos y mantener su interés (actividad, refuerzos, presentación atractiva...)
- Función evaluadora: la mayoría de los programas ofrece constante feedback sobre las actuaciones de los alumnos, corrigiendo de forma inmediata los posibles errores de aprendizaje, presentando ayudas adicionales cuando se necesitan, etc. Se puede decir que ofrecen una evaluación continua y en algunos casos también una evaluación final o explícita, cuando el programa presenta informes sobre la actuación del alumno (número de errores cometidos, tiempo invertido en el aprendizaje, etc.).
- Función investigadora: muchos programas ofrecen interesantes entornos donde investigar: buscar informaciones, relacionar conocimientos, obtener conclusiones, compartir y difundir la información, etc.
- Función expresiva: los estudiantes se pueden expresar y comunicar a través del ordenador, generando materiales con determinadas herramientas, utilizando lenguajes de programación, etc.
- Función metalingüística: los estudiantes pueden aprender los lenguajes propios de la informática.

- Función lúdica: el trabajo con ordenadores tiene para los alumnos en muchos casos connotaciones lúdicas pero además los programas suelen incluir determinados elementos lúdicos.
- Función innovadora: supone utilizar una tecnología recientemente incorporada a los centros educativos que permite hacer actividades muy diversas a la vez que genera diferentes roles tanto en los profesores como en los alumnos e introduce nuevos elementos organizativos en la clase.
- Función creativa: la creatividad se relaciona con el desarrollo de los sentidos (capacidades de observación, percepción y sensibilidad), con el fomento de la iniciativa personal (espontaneidad, autonomía, curiosidad) y el despliegue de la imaginación (desarrollando la fantasía, la intuición, la asociación). Los programas informáticos pueden incidir, pues, en el desarrollo de la creatividad, ya que permiten desarrollar las capacidades indicadas.

3.1.4. Recursos para Matemática en Internet.

En Internet existe un considerable número de sitios con uno, varios o numerosos recursos matemáticos. Es conveniente disponer de información que nos facilite su búsqueda. Esta información la hemos agrupado comenzando desde los sitios más importantes que simplifican la búsqueda, los cuales hemos denominado Buscadores Matemáticos, hasta los sitios específicos que nos ofrecen recursos sobre una temática determinada.

Para el caso de los Buscadores Matemáticos, se da previamente una breve descripción del mismo, autores y breve síntesis del contenido.

3.1.4.1. Buscadores matemáticos.

http://www.recursosmatematicos.com/redemat.html

Redemat es un proyecto educativo que pretende simplificar al máximo la búsqueda en Internet de páginas sobre Matemáticas. La información está dividida en 20 categorías (listado general, actividades, apuntes, buscadores, calculadoras, congresos, debate, enlaces, exámenes, fractales, historia, interactiva, olimpiadas, publicaciones, problemas, matemática recreativa, recursos, sociedades y software) que contienen enlaces. En cada uno de ellos se incluye un pequeño comentario sobre su contenido. En la sección Área de Descarga se puede encontrar actividades, apuntes, exámenes, documentos y software

Facilita el enlace con muchos páginas Web y ofrece información sobre ellos mediante símbolos y breves datos sobre el recurso en la forma siguiente:

Para ver los gráficos seleccione la opción ¨ Bajar trabajo del menú superior

Redemat facilita la búsqueda de los recursos matemáticos en Internet. Para ello dispone de una clasificación de estos recursos, disponibles en la Web, en cinco categorías:

- Referencias para el Educador.
- Curiosidades Matemáticas.
- Páginas Interactivas.
- Recursos para el desarrollo profesional.
- Recursos para estudiantes.
- Servidores de matemáticas en el WWW
- Revistas en el WWW

http://platea.pntic.mec.es/~aperez4

En este sitio se puede encontrar información sobre estrategias de búsqueda en Internet así como diferentes e importantes tópicos vinculados con el proceso de enseñanza - aprendizaje de la Matemática, entre ellos:

- Premio a Universo Matemático
- Matemáticas en TVE
- Videos de Matemáticas
- La magia de los números.

- El mundo de las espirales.
- Geometría del movimiento
- Matemáticas en Internet.
- Historia de las Matemáticas.
- Newton Leibniz
- Didáctica de las Matemáticas
- Curiosidades.
- Libros de historia de la Matemática
- Juegos informáticos, acertijo.
- Problemas y entretenimiento.
- Taller de matemática
- La geometría del balón
- Videos y Matemática (ejemplo)
- Sociedades Matemáticas
- Enlaces
- Paginas por temas.

http://www.ama.caltech.edu/resources.html

Proporciona variada información sobre recursos matemáticos en idioma inglés (Sociedades e Institutos, proyectos de Investigación, informaciones sobre libros, resúmenes de artículos en la revista Los Álamos, libros, software, etc.), los cuales pueden ser de utilidad en la docencia y la investigación. Este sitio es de gran utilidad para profesores y estudiantes de carreras de perfil matemático.

Otras fuentes de información importantes

- Project Mathematics!
- Penn State's Math Guide
- Virtual Mathematics Library at Florida
- JPL Math77 and Mathc90 Libraries
- Preprint Archive at Los Alamos
- CSC Mathematical Topics

- Netlib collection of mathematical software

Todas estas fuentes son importantes, en particular, en CRC Enciclopedia puede encontrar el sitio: http://mathworld.wolfram.com/ el cual permite acceder a variados tópicos de matemática, entre ellos:

- Álgebra
- Matemática Aplicada
- Cálculo y Análisis
- Matemática discreta
- Fundamentos de Matemática
- Geometría
- Historia y Terminología
- Teoría de números
- Probabilidad y estadística
- Matemática recreativa
- Topología

http://www.ciudadfutura.com/matematicas/index.html

En esta página se puede encontrar información vinculada con matemática, se facilita el acceso a secciones que contempla: apuntes de Álgebra, Análisis y Estadística, software, problemas, cuentos, foros y enlaces. Por ejemplo, en la sección Apuntes de Análisis matemático, presenta información sobre Sucesiones numéricas, Series numéricas, Funciones de una variable y Derivadas de funciones de una variable. La información sobre estos contenidos es escueta y resumida.

La sección de problemas es interesante para concursos de matemática elemental.

http://www.matematicas.net/

Este sitio Web, denominado "El Paraíso de las Matemáticas", permite tener acceso a numerosa información sobre diversos e interesantes tópicos de la matemática encaminados a incrementar o perfeccionar el conocimiento en el ámbito matemático.

Se puede acceder a ejercicios, exámenes, apuntes correspondientes a diferentes asignaturas de la disciplina Matemática en España, entre ellas Geometría analítica. Álgebra., Cálculo, Ecuaciones Diferenciales, etc.); juegos, programas, algunos software, historia, algunos enlaces y múltiples recursos matemáticos en forma gratuita.

http://www.xtec.es/~jcanadil/dades/dades.htm

Idiomas: francés, español e inglés

En este sitio se puede encontrar información sobre diversos tópicos de matemática: Álgebra, Geometría, Historia de la Matemática., diferentes aplicaciones de JavaScript y aspectos de interés general, como por ejemplo, las sucesiones de Fibonacci y su relación la arquitectura y la música. Incluye también un diccionario sobre las curvas más famosas.

En la sección correspondiente a Geometría aparecen importantes aplicaciones de las cónicas.

Este es un sitio muy útil para profesores y estudiantes interesados en la matemática, así como para la investigación de algunos aspectos importantes de la matemática.

http://www.aprendes.com/cast/arbol.asp

Para ver la mayoría de contenidos y su interacción hay que instalarse IBM techexplorer y registrarse. Este es un sitio con información sobre muchos tópicos de matemática, la cual está muy bien organizada. Los tópicos a los cuales se puede acceder son:

- Álgebra Lineal
- Cálculo
- Geometría Analítica

- Ecuaciones Diferenciales
- Probabilidades y Estadística

3.1.5. Sociedades

AMS (American Mathematical Society)

SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics)

IMA (Institute for Mathematics and its Applications)

CAPÍTULO 4.

PROPUESTA DE SOFTWARE APLICABLE AL PROCESO ENSEÑANZA - APRENDIZAJE (RESUMEN)

En este capítulo se presenta al lector un resumen de cómo utilizar algunos de los softwares (tales como MatLab, Derive, Mathemática y Solver), sus características y aplicaciones esperando que le sean de utilidad.

4.1. MATLAB

4.1.1. Definición de MATLAB

MATLAB = 'MATrix LABoratory' (LABORATORIO DE MATRICES).

MATLAB es un medio computacional técnico, con un gran desempeño para el cálculo numérico computacional y de visualización.

MATLAB integra análisis numérico, matrices, procesamiento de señales y gráficas, todo esto en un ambiente donde los problemas y soluciones son expresados tal como se escriben matemáticamente.

Escrito inicialmente como auxiliar en la programación de cálculo con matrices.

MATLAB fue escrito originalmente en fortran, actualmente está escrito en lenguaje C.

MATLAB es un lenguaje de programación amigable al usuario con características más avanzadas y mucho más fáciles de usar que los lenguajes de programación como basic, pascal o C.

Actualmente van en la versión 5.2.

MATLAB cuenta con paquetes de funciones especializadas llamadas toolboxes.

4.1.2. Toolboxes de MATLAB

Control system Toolbox, Robust Control Toolbox

Frequency Domain System Identification Toolbox

Fuzzy Logic Toolbox

Higher Order Spectral Analisys Toolbox

Image Processing Toolbox

Model Predective Control Toolbox

Mu Analisis and Synthesis Toolbox

NAG Foundation Toolbox

Neural Network Toolbox

Nonlinear Control Design Toolbox

Optimization Toolbox

Quantitative Feedback Theory Toolbox

Signal Processing Toolbox

SIMULINK, SIMULINK Real Time Workshop

Spline Toolbox

Statistics Toolbox

Symbolic Math Toolbox

System Identification Toolbox.

4.1.3 Inicio de MATLAB

MATLAB se inicia directamente desde Windows.

Al invocarse MATLAB aparecerá la pantalla de comandos, algunas sugerencias y el símbolo >> , el cual indica la entrada de instrucciones para ser evaluadas.

>> Comando o instrucción a evaluar < enter >

Para hacer la suma de dos números, escribimos:

>> 5 + 5 < enter > Presionamos la tecla entrar.

ans = 10

El resultado es desplegado y se guarda en la variable ans (answer).

NOTA : En este tutorial el símbolo >> desaparecerá, y será reemplazado por un par de corchetes con la instrucción dentro de ellos. [5 + 5]. La instrucción aparecerá en color verde.

Para poder ver ejecutarse la instrucción, debemos ponernos en el renglón donde está la instrucción o marcarla con el ratón y presionar al mismo tiempo las teclas.

<Ctrl> <Enter>

Otra forma de evaluar una instrucción, es poner el apuntador del ratón entre los corchetes de la instrucción y presionar el botón derecho del ratón; aparecerá un menú del cual se tiene que escoger evaluar celda.

Hagamos la prueba con el renglón inmediato.

5 + 5 Presionar <Ctrl> <Enter>

La respuesta es desplegada en color azul y entre corchetes.

Help

El comando help proporciona una lista de todos los tópicos que MATLAB puede proporcionar ayuda.

help

help 'comando' proporciona ayuda sobre el comando especificado.

help sqrt

Proporciona ayuda sobre la instrucción sqrt; Ejemplo:

» help sqrt

SQRT Square root.

SQRT(X) is the square root of the elements of X. Complex

results are produced if X is not positive.

See also SQRTM

4.1.4. Funcionamiento de MATLAB

MATLAB puede almacenar información en variables tales como:

a = 100 "<Ctrl> <ENTER> para evaluar la celda "

Cada vez que capturamos información en MATLAB y presionamos <ENTER> ésta es desplegada inmediatamente (letras en color azul), pero si ponemos un punto y coma al final de la instrucción MATLAB omite el desplegado de información.

Por ejemplo:

b = 50 ;

Si se quiere saber el valor de alguna variable capturada sólo se tiene que poner el nombre de la variable y <ENTER> y MATLAB lo despliega. Estas variables residen en el espacio de trabajo de MATLAB.

b

Las variables son sensibles a las mayúsculas, por lo que las siguientes variables son diferentes:

Variable = 1

variable = 1

Las variables pueden contener hasta 19 caracteres. Éstas deben empezar con una letra, seguida por cualquier número de letras, dígitos o guiones de subrayado.

Los caracteres de puntuación no son permitidos en las variables.

Cuando se trabaja con muchas variables estas son difíciles de recordar.
El comando who muestra un desplegado de todas aquellas variables que se han estado utilizando.
whos Muestra las variables con información adicional.

Caracteres especiales

[ ] Son usados para formar vectores y matrices [1 2 3 ; 4 5 6]

( ) Usados para expresiones matemáticas. sqrt(2)

= Usado para hacer asignaciones. x = 5

' Transpuesta de una matriz A'

Usado para separar texto 'texto'

. Punto decimal 3.1415

... Al final de una línea indican que continua 2,3,4,5,6 ....

en el siguiente renglón. 7,8,9,10]

, Para separar elementos [1,2,3,4]

; Para separar filas en las matrices. [1 2; 3 4]

Para evitar que se despliegue la información capturada. [3] ;

% Para hacer comentarios % este programa, etc.

! Para ejecutar un comando del Ms-dos !dir

Operaciones básicas

SUMA

C = a + b

RESTA

d = a - b

MULTIPLICACION

e = a * b

DIVISION

F = a / b

F = a \ b

POTENCIA

a ^ 2

Como este último cálculo no tenía variable asignada, la respuesta se guarda en la variable ans (answer).

Borrado de variables.

Para borrar el valor de una variable simplemente ponemos

clear a Borra la variable " a "

a Checar que este borrada.

clear a b c Borra las variables " a ", " b " y " c "

" CLEAR " Borra todas las variables y no se pueden recuperar.

Funciones trigonométricas

sin (0.5) Seno de (0.5)

Así mismo

COS (X) TAN (X)

ASIN (X) ACOS (X) ATAN (X) Inversa

SINH (X) COSH (X) TANH (X) Hiperbólica

ASINH (X) ACOSH (X) ATANH (X) Inversa- Hiperbólica

ATAN2 (X,Y) Inversa de la tangente en los cuatro cuadrantes.

LOGARITMOS

log (0.5) Logaritmo natural

LOG_{10} (X) Logaritmo decimal.

Funciones matemáticas especiales.

abs (-3) Valor absoluto o magnitud de un número complejo

ceil (123.123123) Redondea hacia más infinito

FLOOR (X) Redondea hacia menos infinito

FIX (X) Redondea hacia cero

ROUND (X) Redondea hacia el entero más próximo

imag (30 - 5j) Parte imaginaria de un número complejo

REAL (X) Parte real de un número complejo

ANGLE (X) Angulo de un número complejo

CONJ (X) Complejo conjugado

sign (-5) Función signo : Devuelve el signo del argumento

(1 si es positivo, -1 si es negativo)

exp (1) Exponencial: e(x)

REM (X,Y) Resto después de la división (x / y) sqrt (2) Raíz cuadrada

Operaciones Lógicas

En MATLAB se pueden hacer operaciones lógicas, por ejemplo.

1 < 2

Como 1 es menor que 2, la respuesta es cierta por lo que obtenemos un 1.

1 < 1

Obtenemos un 0, porque 1 no es menor que 1.

Como se puede observar las únicas respuestas posibles con las operaciones lógicas son:

Cierto = 1 y Falso = 0.

Operadores relaciónales:

> Mayor que

< Menor que

>= Mayor o igual a

<= Menor o igual a

== Igual a

~= No igual a

Existen tres operadores lógicos: AND &

OR |

NOT ~

Para que la operación AND sea verdadera las dos relaciones deben ser verdaderas.

Recordemos AND = 0 0 | 0 Falso

0 1 | 0 Falso

1 0 | 0 Falso

1 1 | 1 Verdadero

(1 < 2) & (2 < 3) Verdadero.

(1 < 2) & (2 < 1) Falso.

Para la operación OR : 0 0 | 0

0 1 | 1

1 0 | 1

1 1 | 1

(1 < 2) | (2 < 1) Verdadero.

Para la operación NOT : ~ 0 | 1

~ 1 | 0

~ (2 < 1) Verdadero.

La variable NaN (Not a Number)

Cuando en un lenguaje de programación como basic, pascal o C, se da una situación que el programa no pueda manejar, como una división como 0/0 el programa se detiene, marcando un error.

Cuando en MATLAB se presenta una situación similar el programa no se detiene, sólo da una pequeña advertencia de que se presentó una división entre cero. Y el resultado es un NaN, que es una variable interna no es un número).

0/ 0

Ejemplo: defina a=[1 2 0] y b=[1 2 0] ahora pida la división elemento a elemento (comando "./")

a ./ b

Solución de ecuaciones de segundo grado.

MATLAB se puede resolver fácilmente ecuaciones del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, haciéndolo como si fuera una sola instrucción. La fórmula para resolver una ecuación de segundo grado de este tipo es :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si tenemos los siguientes valores :

a = 1, b = 2, c = 3

Escribimos la formula para x1 :

x1 = (-b + sqrt (b ^ 2 - 4 * a * c)) / 2 * a

Para x2 :

x2 = (-b - sqrt (b ^ 2 - 4 * a * c)) / 2 * a

Podemos hacer la comprobación para x1.

a * x1^ 2 + b * x1 + c Comprobaciónx1

Arreglos (Arrays) ó Vectores.

Si se desea calcular el seno de " 0 a 1 " con incrementos de 0.25,se pueden capturar los valores y después mandar llamar el seno de la función.

Seno de 0 a 1 con incrementos de 0.25

x = [0, 0.25, 0.5, 0.75, 1]

Se pueden omitir las comas cuando se capturan los números.

Con los números capturados, se obtiene el seno de la variable x escribiendo simplemente:

sin (x)

MATLAB opera en radianes, donde 2P= 360 grados.

Ahora se requiere obtener el coseno de cero a uno con incrementos de 0.01; lo que equivale a capturar 101 elementos.

Para evitar capturarlos a mano, MATLAB nos permite crear un vector de la siguiente manera:

Variable = (Valor inicial: Con incrementos de: Valor final)

R = (0: 0.01: 1)

COS (R) Ahora se puede obtener el coseno de la variable R.

Hagamos el siguiente vector:

Y = (0: 1: 10)

Si queremos saber cual es el cuarto elemento del vector ponemos:

Y (4)

Si nos interesan los elementos 5 al 10:

Y (5 : 10)

Otras opciones son:

Y (1: 2: 9) Toma los elementos del 1 al 9 con incrementos de 2

Y ([1, 3, 7,10]) Toma los elementos 1, 3, 7 y 10 del array

Modificaciones de los arreglos

Si el noveno elemento del array debió ser el número 20 en vez de 8, corregimos de la siguiente manera:

Y(9) = 20

Otra forma de hacer arreglos, es con linspace :

Linspace (Valor inicial , Valor final , Número de elementos)

Regresando al ejemplo del coseno de 0 a 1 con incremento de 0.01 escribimos:

Note el uso de comas (#, #, #)

Z = linspace(0 , 10, 101)

Linspace describe una relación lineal de espaciado entre sus elementos.

Logspace describe una relación de espaciado "logarítmica".

Logspace (Primer exponente , Último exponente , Cantidad de valores)

Logspace (0 , 2 , 10)

Hemos creamos un arreglo que comienza en 10^{0} y termina en 10^{2}, conteniendo 10 valores.

Otra forma de crear arreglos es:

x1= 1 : 5 Arreglo de 1 a 5, con incremento de 1

x2= 10 : 5 : 100 Arreglo de 10 a 100, con incrementos de 5.

Si se quiere concatenar x1 y x2

C = [x1 x2]

Matemáticas con arreglos.

a = 1: 6 Define un vector de seis elementos con incrementos de 1

b = 1: 2: 12 Vector de seis elementos con incremento de 2

Arreglos con escalares

Se le puede sumar o multiplicar un número a todo el arreglo, por ejemplo

a + 10 Suma de un escalar con un arreglo

a * 10 Multiplicación de un escalar con un arreglo

Operaciones con arreglos

Para hacer la suma de los arreglos a y b, solamente escribimos:

a + b La respuesta se guarda en ans:

Se pueden hacer operaciones como:

Z = 100 - 2 * a + b

La multiplicación de arreglos se hace con (. *), ya que cuando se utiliza el asterisco sin punto indica multiplicación matricial, y además provoca un error.

Z = a .* b

La división también lleva un punto antes del signo, porque sino se utiliza el punto nos referimos a la división matricial que es muy diferente.

Z = a ./ b

La siguiente operación obtiene el cuadrado del arreglo " a ".

Z = a .^ 2

Orientación de arreglos

Si separamos cada elemento del arreglo con punto y coma tenemos un arreglo de una sola columna:

a = [1; 2; 3; 4; 5; 6]

Es necesario usar los corchetes, porque si no los usamos obtenemos el último valor que capturamos:

d = 1 ; 2; 30 ; 40 ; 50 ; 600 ; 1000

Para crear una columna con 20 elementos hacemos lo siguiente:

d = (1 : 1 : 20)

y trasponemos el renglón a columna, es decir buscamos la transpuesta. (')

e = d'

¿ Que pasa si hacemos lo siguiente : ?

e'

Matrices

Se utiliza el punto y coma (;) hacer una matriz.

Para formar la matriz 1 2 3

3 2 1

2 1 3

Escribimos:

A = [1 2 3; 3 2 1; 2 1 3]

Ecuaciones Simultáneas

Con MATLAB se pueden resolver sistemas de ecuaciones simultáneas fácilmente.

Por ejemplo para resolver el siguiente sistema de ecuaciones.

$2x + 0y + 5z = 100$

$3x + 5y + 9z = 251$

$1x + 5y + 7z = 301$

Capturamos los valores de x, y, z ; formando una matriz.

A = [2 0 5; 3 5 9; 1 5 7]

Después capturamos el valor al cual están igualadas las ecuaciones en otra matriz.

b = [100 ; 251; 301]

Una forma de solucionar las ecuaciones es obteniendo el inverso de la matriz, es decir : A^{-1} (menos uno)

El asterisco indica multiplicación matricial.

c = inv (A)* b

Otra forma de resolverlo, es utilizando la división matricial.

c = A \ b

Es también posible obtener la determinante de una matriz.

det (A)

Operaciones con Matrices

Definamos las siguientes matrices ' g ' y ' h '.

g = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]

h = [1 0 2 ; 11 2 3 ; 3 5 12]

La suma de las matrices g y h se muestra enseguida:

k = g + h

k = g * h Multiplicación de dos matrices.

[L, U] = lu (k) Calcula la factorización LU de la matriz cuadrada k

[d,e]= qr (k) Calcula la factorización QR de la matriz k.

Calcula la descomposición en valores singulares de la matriz k.

rank(k) Devuelve el rango de la matriz k.

cond(k) Devuelve el número de condición de la matriz k.

Modificación de las matrices.

A = [1 2 3; 4 5 7; 7 8 9]

Si nos equivocamos al capturar la matriz, por ejemplo si el número 7 del segundo renglón, tercer columna debió ser 6 en vez de 7, tendríamos que capturar de nuevo la matriz.

Pero con MATLAB es posible modificarla de la siguiente manera:

A(2,3)= 6 Variable(renglón, columna)= nuevo valor

Si tenemos la matriz identidad de 4 x 4 :

1 0 0 0

0 1 0 0

0 0 1 0

0 0 0 1

A = [1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1]

Pero por algún error la matriz identidad debió de haber sido de 5 x 5.

¿ Hay que capturar de nuevo la matriz ?. La respuesta es no.

A(5,5) = 1

Agregamos un 1 en el renglón 5 columna 5, y como este no existían previamente, las columnas y renglones se completan agregando ceros.

¿ Que pasa ahora si queremos sólo una matriz identidad de 3 x 3 y tenemos capturada una de 5 x 5.

Podemos utilizar:

Matriz ("Renglón" inicio : Fin , "Columna" inicio : Fin)

B = A (1 : 3, 1: 3)

Ahora si queremos que la matriz identidad sea : 0 0 1

0 1 0

1 0 0

C = B (3 : -1 : 1 , 1 : 3)

Poner dos puntos (:) indica que se deben tomar todas las columnas

(1 : 5). Esto es valido también para los renglones.

C = A (: , [1 3 5])

Toma todos los renglones, pero sólo toma las columnas 1, 3 y 5.

Si creamos las siguientes matrices A y B :

A = [1 2 3 4 5; 1 2 3 4 5; 1 2 3 4 5; 1 2 3 4 5]

B = [6 7 8; 6 7 8; 6 7 8; 6 7 8]

Podemos construir una matriz C uniendo las dos anteriores

c = [A B]

A partir de la matriz A queremos tomar las columnas 1, 2 y 5, y de la matriz B queremos tomar las columnas 1 y 3, para formar una matriz D.

D = [A(:,[1 2 5]) B(:, [1 3])]

D(:,1)=[] Elimina la columna número uno.

Matrices especiales

ones(2) Hace una matriz de unos, de 2 x 2.

zeros(5,4) Hace una matriz de ceros, de 5 x 4.

rand(3) Hace una matriz de 3 x 3,

eye(4) Hace una matriz identidad de 4 x 4.

En MATLAB se pueden crear gráficas tan simples como :

D = [1 2 3 5 4 7 6 8 9 8 6 3 1 3];plot (D)

o se pueden crear gráficas tan complejas como :

cplxroot(3,10) Superficie de una raíz cúbica.

Como se vio en el primer ejemplo es posible graficar una serie de puntos y MATLAB automáticamente ajusta los ejes donde se gráfica.

Por ejemplo, para graficar la función seno se pueden crear un rango de valores

x = 0 : 0.1 : 20; x= vector de cero a veinte con incrementos de 0.1

y = sin(x); Seno del vector (x)

plot (x,y) Gráfica del seno

z = cos(x); Coseno del vector anterior

plot (x,z) Gráfica del coseno de x.

plot (x,y,x,z) Gráfica del seno y coseno en la misma pantalla

plot (x,z,'*') Gráfica del coseno con los signos ' * '

Hace la gráfica en azul, y los signos ' + ', intercambiando los ejes.

plot (z, x,'b+')

Es posible agregar un cuadriculado a la gráfica, para tener más precisión, con el comando.

grid

Se pueden agregar títulos a las gráficas y etiquetas en los ejes con los comandos siguientes.

title(' Gráfica del coseno de x')

Para ponerle etiquetas a los ejes se puede utilizar los comandos

ylabel ('etiqueta')

xlabel('etiqueta')

axis off Desaparece los ejes.

Subplot

El comando subplot nos permite desplegar en pantalla varias gráficas.

subplot(m,n,a)

'm' y 'n' son una matriz que representa las cantidades de gráficas que se van a desplegar; 'a' indicaría el lugar que ocuparía la gráfica en el subplot.

Hagamos la gráfica de los siguientes puntos. La desplegaremos en cuatro puntos diferentes en pantalla para ver las características de subplot.

a=[1 ,2 ,3 9 ,8 ,7 ,4, 5, 6, 8, 7, 5];

plot (a)

Vamos hacer una matriz de 2 x 2 para graficar, cuatro posibles ventanas o gráficas. Y queremos que la primera gráfica ocupe el lugar (1,1) de la matriz. Entonces escribimos.

subplot(2,2,1) ,plot(a)

subplot(2,2,2) , plot(a)

subplot(2,2,4), plot(a)

CLF borra todos los objetos de la gráfica.

CLF RESET Borra todo lo que hay en la gráfica y resetea todas las propiedades de la figura.

clf

4.1.5. Gráficas en tres dimensiones.

El comando plot se puede extender a 3 dimensiones con el comando plot3 .

El siguiente ejemplo hace una gráfica de una espiral en tres dimensiones.

t=0:pi/50:10*pi;

plot3(sin(t),cos(t),t)

zlabel ('etiqueta')

Se utiliza para dar etiquetas al eje z, en las gráficas en tres dimensiones.

Gráficos de malla y superficie.

z = peaks(10)

El comando peaks crea un conjunto de valores que al ser graficados, se vende la siguiente manera.

plot(z)

Se tomará como base la gráfica anterior para demostrar algunas funciones de graficación en tres dimensiones.

mesh(z)

contour(z,10)

surf(z)

Es posible cambiar el sentido de orientación de las gráficas con el comando view(x,y)

view(0,0)

view(90,0)

Gráficas en el plano complejo

Ahora vamos a crear un conjunto de valores para graficar en el plano complejo, en tres dimensiones.

z= cplxgrid(5)

cplxmap(z,z)

cplxmap(z,z.^z)

cplxroot(2,10) Raíz cuadrada

Se pueden crear gráficos en coordenadas polares con el comando Polar (t,r,s) donde t es el vector en ángulos en radianes, r es el radio del vector y s es la cadena de caracteres que describe, color, símbolo del estilo de línea.

t=0:0.1:2*pi;

r = sin(2*t).*cos(2*t);

polar(t,r)

gtext(‘ texto ’)

Se utiliza para colocar texto en una gráfica, con la ayuda del mouse. Simplemente se ejecuta el comando y con el mouse se selecciona la coordenada deseada y se presiona el botón derecho del mouse, quedando fijo el texto en la pantalla.

Copiar una gráfica

Cuando se quiera realizar algún reporte formal en un procesador de palabras como en este caso Word, es posible copiar las gráficas hechas en Matlab por medio de la orden copy to bitmap.

El procedimiento sería:

- En Matlab, en el menú de la ventana principal de la gráfica, se escoge el menú 'edit' y de este se escoge copy to 'bitmap';
- Se minimiza Matlab y se pasa al procesador de palabras escogido
- Se localiza la posición en la cual estará la gráfica, y del menú edit se escoge 'paste o pegar'.

La gráfica aparecerá en el procesador de palabras.

Existe un pequeño inconveniente ya que la gráfica aparecerá sobre un fondo de color negro que Matlab tiene por default, si se imprime este documento obviamente la gráfica aparecerá sobre un fondo negro lo cual hará que la impresora gaste tinta en exceso.
Para remediar esto se puede cambiar el color de fondo de las gráficas a blanco con el comando.
Whitebg
después se hace procedimiento mencionado anteriormente.
Imprimir una gráfica.
Se puede imprimir una gráfica directamente desde el menú de la ventana de la gráfica, seleccionando la opción print.

4.1.6. Otros comandos

- what : Listado de todos los archivos *.m en el directorio actual
- dir : Lista todos los archivos en el directorio actual
- type nombre_archivo : Lista el programa, (Programas con terminación*.M).
- Which nombre_archivo : Da el path en el cual esta el archivo.

Se pueden utilizar comandos de Unix tales como Ls, pwd.

4.1.7. Programando con MatLab

Es posible realizar un programa en Matlab tal como se hace en otros lenguajes como el basic, pascal o el lenguaje C. Es necesario utilizar un editor para escribir el código.

- Para cargar un editor, se puede hacer desde la ventana options, escogiendo editor preference, y cargando el editor que se desee utilizar.
- Para escribir código, requerimos crear un archivo *.M. Para esto necesitamos abrir new M.file en la ventana file.
- Ahora escribimos el código y salvamos el archivo utilizando la terminación archivo.M.
- Se puede correr el programa desde Matlab simplemente escribiendo el nombre del archivo que fue creado.
- Es posible abrir programas con la terminación *.M desde Matlab, en el menú file, open M.file.

Bucles For

Tal como en otros programas de programación en Matlab es posible crear programas con estructura con ciclos for.

For x = Número inicial : número final

Instrucción

End.

```
for x = 1 : 10
x = x + 1
end
```

También se pueden hacer operaciones como la siguiente:

```
matriz = [ 1 2 3 4; 1 2 3 4; 1 2 3 4; 1 2 3 4]
for x = matriz
x = n(1)*n(2)*n(3)*n(4)
end
```

Bucles while

While permite que ciertas instrucciones sean repetidas un número indefinido de veces bajo el control de una condición lógica.

Por ejemplo, ¿ Cual es primer entero n para el cual n!(factorial) es un número de 100 dígitos ?

```
n = 1;
while prod(1:n)<1.e100,n=n+1;end
n
```

IF ELSE END

Se pueden utilizar estructuras como:

```
If expresión (verdadero)
acción
End.
If expresión (verdadero)
acción 1
else (Falso)
acción 2
End.
If expresión (verdadero)
acción 1
elseif expresión (verdadero)
acción 2
. . .
else (Falso)
acción "n"
End
```

4.1.8. Análisis de datos

En Matlab podemos hacer análisis de datos estadísticamente o probabilisticamente. Entre estos análisis están cálculos de medias, máximos, mínimos, desviaciones estándar, etc.

Inventemos un conjunto de datos, los cuales podremos analizar.

x =[9 1 ;23 34; 16 28 ;12 33 ;5 7; 9 4 ;12 34 ;5 14 ;436 ;3 6 ;12 9; 2 30 ;3 2; 2 4]

plot (x) La representación gráfica de los puntos anteriores.

A continuación se hace una análisis de los datos presentados, habrá dos respuestas porque tenemos dos columnas.

media=mean(x) Obtención de la media

max(x) El máximo de los valores.

min(x) El mínimo de los todos los valores

std(x) La desviación estándar

hist(x) Histograma.

Interpolación

Matlab tiene varios comandos que nos permiten hacer interpolaciones, uno de los métodos es por medio de mínimos cuadrados.

Mínimos cuadrados

Se crean varios puntos.

x = [0 .1 .2 .3 .4 .5 .6 .7 .8 .9 1];

y =[0.09 .12 .24 .27 .4 .45 .61 .67 .71 .63 .59];

se muestra los puntos a los cuales se les va a interpolar

plot (x,y,'*')

Se utiliza una aproximación de segundo orden, porque la función es no lineal.

n=2; Segundo orden.

p=polyfit(x,y,n)Crea los elementos del polinomio que hará la interpolación.

El polinomio es del tipo $ax^2 + bx + c = 0$

f=linspace(0, 1, 100); Formamos una serie de puntos para graficar.

z=polyval(p,f); Evaluación polinomial.

plot(x,y,'*',x,y,f,z,':') Hacemos la gráfica de la interpolación.

Podemos ver que la interpolación es pobre. Ahora tratemos de hacerla con un polinomio de quinto grado, el procedimiento es el mismo que el anterior.

n = 5 ;

p = polyfit(x,y,n)

z = polyval(p,f);

plot(x,y,'*',x,y,f,z,':')

Otra forma de interpolar, es con el comando interp1.

g=interp1(x,y,f)

Se puede observar en la gráfica resultante, que parece como una aproximación lineal entre cada punto.

plot(x,y,'*',f,g)

Para una aproximación más suave es recomendable usar el comando spline, quehacer una interpolación tipo cubic spline.

g=spline(x,y,f)

plot(x,y,'*',f,g)

4.1.9. Polinomios

MATLAB puede sacar las raíces de un polinomio. Para capturar el polinomio de abajo, solamente ponemos el valor de cada variable, respetando su lugar. Como no hay termino $x^{1,\text{ de}}$ todos modos se captura como cero.

$X^3 + 5x^2 - 2$

p = [1 5 0 -2]

Para sacar las raíces escribimos.

r=roots(p)

Tips de memoria.

Para obtener la máxima velocidad en Matlab debemos tratar de vectorizar los algoritmos, por ejemplo:

```
a = 0
for a = 0:.0.1:10
a = a + 1;
y(a)=sin(t)
end
```

La versión vectorizada sería:

```
t= 0:0.01:10;
y = sin(t)
```

El primer ejemplo en MATLAB toma aproximadamente 15 segundos, mientras que el segundo toma sólo 0.6 segundos.

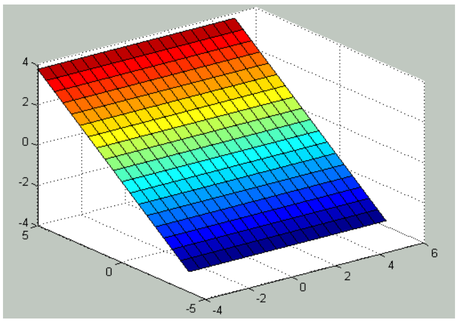
Se recomienda ver los tutoriales propios de MATLAB como el intro, expo, el manual de MATLAB y otros libros de consulta.

MATLAB, proporciona la solución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales, mediante los comandos siguientes:

<table>
<tr>
<td>

```
>> [x,y] = meshgrid(-4:0.5:5);
>> z = 3*y/4;
>> surf(x,y,z)
```

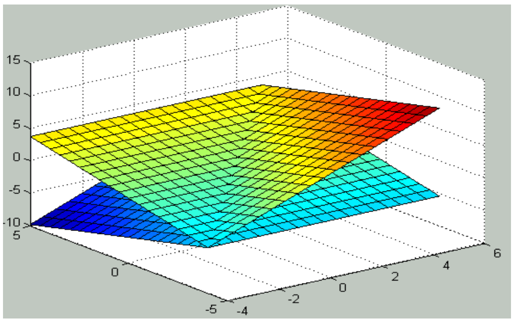
Se obtiene el plano de la figura:



</td>
<td>

```
>> hold on
>> z = (6*x - 3*y)/4;
>> surf(x,y,z)
```

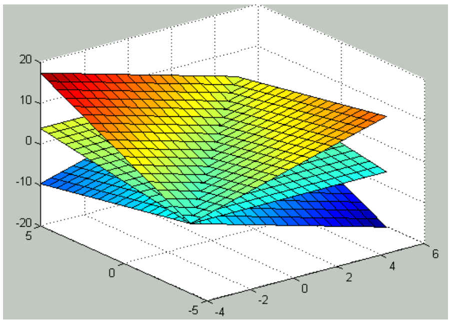
Se obtienen los planos de la figura



</td>
</tr>
<tr>
<td>

```
>>(-6*x + 9*y)/4;
>> surf(x,y,z)
```

Se obtienen los planos de la figura interceptados en una línea recta

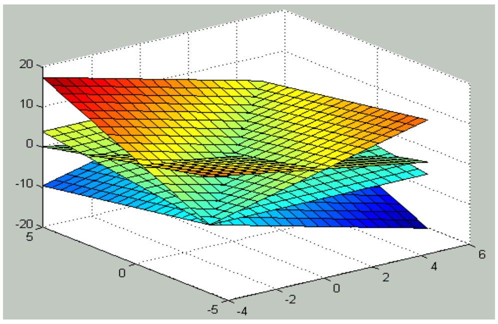


</td>
<td>

```
>> 1- x - y;
>> surf(x,y,z)
```

obtiene los cuatro planos de la figura interceptados en el punto

(4/11. 4/11, 3/11) de IR^3



</td>
</tr>
</table>

Fig. 4.1 Solución grafica de un sistema de ecuaciones.

4.2. DERIVE

Esta sección pretende dar información general sobre Derive para quienes no conocen el programa.

Derive es uno de los llamados "Programas de Cálculo Simbólico", que podemos definir como programas para ordenadores personales (PC) que sirven para trabajar con matemáticas usando las notaciones propias (simbólicas) de esta ciencia. Así, en un programa de cálculo simbólico el número ‘pi' se trata como tal, a diferencia de muchas calculadoras que consideran sólo una aproximación (3'1415...).

Los programas de cálculo simbólico son capaces de hacer derivadas, integrales, límites, y muchas otras operaciones matemáticas. Suelen tener capacidades gráficas (representación de curvas y funciones) y, por supuesto, capacidades numéricas que suplen sobradamente a la mejor de las calculadoras.

$$\#51:\quad \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}}{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{47}{17}$$

$$\#52:\quad \sqrt{(5+\sqrt{24})}+\sqrt{(5-\sqrt{24})}=2\cdot\sqrt{3}$$

$$\#53:\quad (1+2\cdot\hat{\imath})\cdot(3+\hat{\imath})=1+7\cdot\hat{\imath}$$

$$\#54:\quad \frac{2+\hat{\imath}}{\hat{\imath}+1}=\frac{3}{2}-\frac{\hat{\imath}}{2}$$

$$\#55:\quad \mathrm{COS}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

Naturalmente, los segundos miembros de las igualdades del gráfico anterior, tomado de una pantalla de Derive, han sido calculados directamente por el programa y, además, en unas décimas de segundo.

Derive es uno de esos programas de cálculo simbólico, quizá el más difundido y popular porque en su modalidad más sencilla (Derive para DOS ‘classic') funcionaba en cualquier PC, sin necesidad de que tuviera disco duro y ocupaba sólo un diskette. Hoy, Derive 6 sigue siendo un "pequeño" programa, que ocupa poco más de 3 Mb., y que sigue siendo muy accesible e intuitivo.

Siempre ha sorprendido que siendo tan sencillo tenga una gran potencia y versatilidad, por lo que es idóneo para iniciarse con este tipo de programas. Derive es el programa preferido en el ámbito docente, en la enseñanza secundaria y en los primeros años de Universidad, porque es muy fácil de utilizar, de modo que la ‘informática' se supera muy pronto y, por tanto, es casi inmediato empezar a trabajar con ‘matemáticas'.

4.2.1. Capacidades

Lo mejor es experimentarlo, usándolo. Para eso, se puede descargar una "demo". No nos olvidemos de que conocer las capacidades del programa sirve para pensar en sus aplicaciones docentes, que son el origen de este Grupo o Asociación de Usuarios. Cuanto mejor se conozca el programa, incluyendo sus novedades, tanto mejor se puede incorporar a diversos aspectos de la enseñanza.

Aquí sólo señalamos algunas de esas posibilidades: Operaciones con vectores, matrices y determinantes. Resolución de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones.

$$\#1: \quad \mathrm{DET}\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = x^5 - 10\cdot x^3 + 20\cdot x^2 - 15\cdot x + 4$$

$$\#2: \quad \begin{bmatrix} a & b \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{3}{3a - 2b} & \dfrac{b}{2b - 3a} \\ \dfrac{2}{2\cdot b - 3\cdot a} & \dfrac{a}{3\cdot a - 2\cdot b} \end{bmatrix}$$

$$\#3: \quad \mathrm{SOLVE}(x^5 - 10\cdot x^3 + 20\cdot x^2 - 15\cdot x + 4,\ x)$$

$$\#4: \quad [x = 1,\ x = -4]$$

$$\#5: \quad \mathrm{SOLVE}\left(\begin{bmatrix} 2x - y + z = 4 \\ \dfrac{11}{4}\cdot x + 3.1\cdot y - 3\cdot z = 6 \\ x - y + 5\cdot z = 9 \end{bmatrix},\ [x,\ y,\ z]\right)$$

$$\#6: \quad \left[x = \frac{721}{359}\quad y = \frac{1316}{718}\quad z = \frac{1562}{718}\right]$$

4.2.2. Derivadas, integrales (definidas e indefinidas), series, límites, polinomios de Taylor.

$$\#5: \quad \frac{d}{dx}\ \mathrm{COS}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{2\cdot \mathrm{SIN}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{(x-1)^2}$$

$$\#6: \quad \int \frac{2\cdot \mathrm{SIN}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{(x-1)^2}\, dx = \mathrm{COS}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\#7: \quad \alpha :\in \mathrm{Real}\ (0,\ \infty)$$

$$\#8: \quad \int_0^{\infty} \hat{e}^{-\alpha\cdot x}\cdot \mathrm{COS}(\beta\cdot x)\, dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$\#9: \quad \mathrm{VECTOR}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},\ p,\ 2,\ 10,\ 2\right) = \left[\frac{\pi^2}{6},\ \frac{\pi^4}{90},\ \frac{\pi^6}{945},\ \frac{\pi^8}{9450},\ \frac{\pi^{10}}{93555}\right]$$

$$\#10: \quad \lim_{x\to 0+} \left(2-\mathrm{COS}(x)^2\right)^{1/(\mathrm{SIN}(x)+\mathrm{TAN}(x))^2} = \hat{e}^{1/4}$$

$$\#11: \quad \mathrm{TAYLOR}(\mathrm{LN}(1+x),\ x,\ 0,\ 9)$$

$$\#12: \quad \frac{x^9}{9} - \frac{x^8}{8} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$$

4.2.3. Representación gráfica de funciones en forma explícita, implícita, paramétrica y en coordenadas polares.

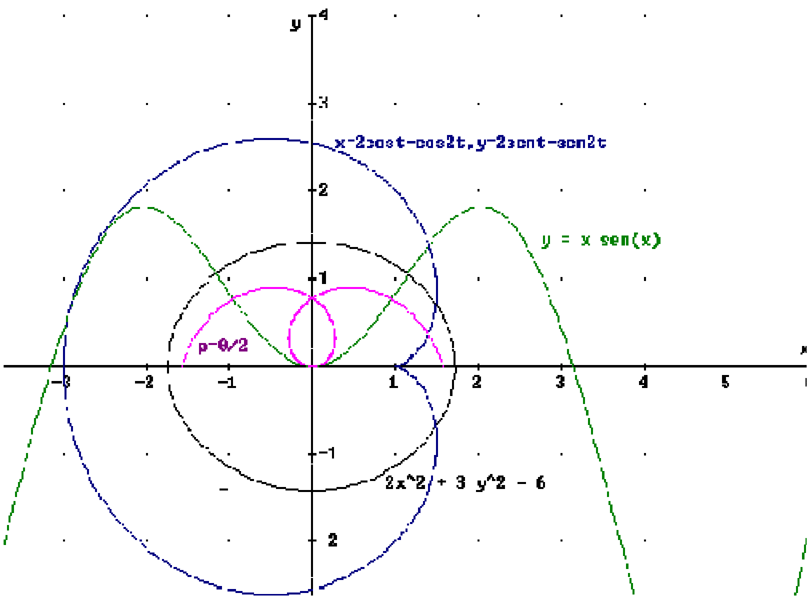


Fig. 4.2 Representación gráfica de funciones.

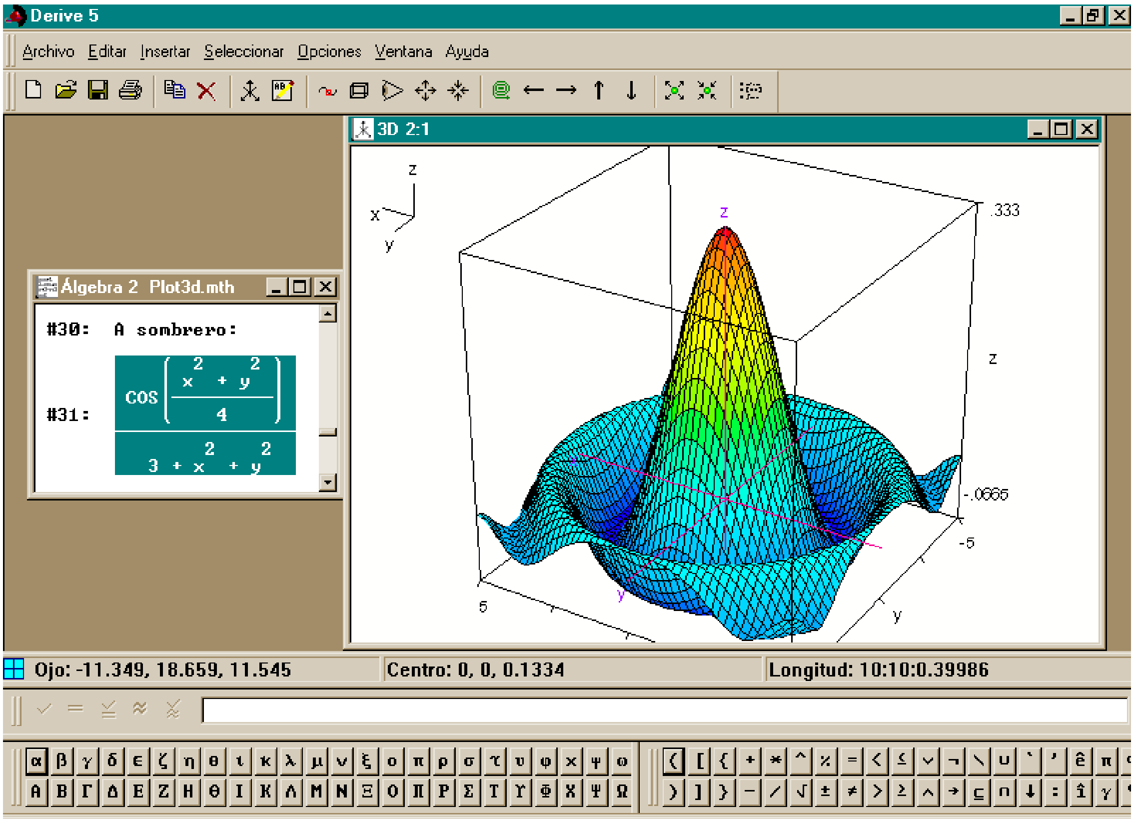


Fig. 4.2 Representación gráfica de funciones.

4.2.4. Operaciones con polinomios y fracciones algebraicas

$$\mathrm{EXPAND}\left((x + 2\cdot y)^6,\ \mathrm{Rational},\ x,\ y\right)$$

$$x^6 + 12\cdot x^5\cdot y + 60\cdot x^4\cdot y^2 + 160\cdot x^3\cdot y^3 + 240\cdot x^2\cdot y^4 + 192\cdot x\cdot y^5 + 64\cdot y^6$$

$$\mathrm{FACTOR}\left(x^6 + 12\cdot x^5\cdot y + 60\cdot x^4\cdot y^2 + 160\cdot x^3\cdot y^3 + 240\cdot x^2\cdot y^4 + 192\cdot x\cdot y^5 + 64\cdot y^6,\ \mathrm{Rational},\ x\right)$$

$$(x + 2\cdot y)^6$$

$$\frac{x+2}{x+1} + \frac{2\,x-1}{x-1} - \frac{2\,x^2}{x^2-1} = \frac{x+3}{x+1}$$

$$\mathrm{EXPAND}\left(\frac{x^4+1}{x^3-2\cdot x},\ \mathrm{radical},\ x\right)$$

$$\frac{5}{4\cdot(x-\sqrt{2})} + \frac{5}{4\cdot(x+\sqrt{2})} + x - \frac{1}{2\cdot x}$$

... y muchas otras. Pero, además, es posible programar funciones que usen las distintas capacidades del programa, de modo que aumenta así sensiblemente el espectro de sus aplicaciones. Derive se suministra con varios ficheros de funciones para propósitos diversos como resolver ecuaciones diferenciales, trabajar en Álgebra Lineal, etc.

4.2.5. Utilización

Derive se aprende a usar con mucha facilidad: En menos de una hora es posible experimentar con casi todas las aplicaciones del programa. Cualquiera que tenga que usar las matemáticas es un potencial usuario de Derive, pero, sin duda, su principal aplicación es la docente.

La incorporación de Derive en los primeros cursos de las asignaturas de matemáticas en la Universidad y en los últimos de la secundaria, es algo casi generalizado en muchos países y, además, tiene una gran influencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

4.3. MATHEMATICA

Mathematica, programa desarrollado por la empresa Wolfram Research, es un sistema de computación numérico y simbólico, que incorpora un excelente lenguaje de programación y la capacidad de integrar cálculos, gráficos y texto, en un mismo documento electrónico, llamado cuaderno. Estos y otros elementos de utilidad didáctica del programa, permiten al profesor o usuario de Mathematica, desarrollar actividades educativas a diferentes niveles, aunque en esta página sólo trataremos las aplicaciones en la enseñanza de las matemáticas en educación secundaria.

4.3.1. Investigación educativa con Mathematica

Las aplicaciones de Mathematica en la enseñanza son casi inexistentes en nuestro país y en Europa. En Estados Unidos, donde se desarrolló el programa, existen proyectos como Wave (Web Acces Virtual Education) a nivel de bachillerato o Calculus&Mathematica a nivel superior, que han desarrollado materiales y los han puesto en práctica con alumnos reales. Existen cada año más proyectos y centros que utilizan este programa con finalidades educativas dadas las características del programa que seguidamente exponemos.

4.3.2. Elementos de utilidad didáctica

Diferenciemos los principales elementos de utilidad didáctica del programa en tres niveles, atendiendo a la dificultad de programación y calidad de los materiales que se pueden desarrollar.

Nivel 1:
Mathematica se estructura fundamentalmente en dos partes, "Front-End", parte visible del programa, donde además de la barra de menú, encontraremos las ventanas correspondientes a los cuadernos o "notebooks", y el "Kernel" o núcleo, encargado de realizar los cálculos, básicamente. En los cuadernos podemos realizar:

- cálculos numéricos, como en cualquier calculadora, pero casi sin límites, donde podemos determinar el grado de precisión;
- cálculos simbólicos;
- representaciones gráficas en 2 y 3 dimensiones; Ejemplo.
- animaciones, cambio del punto de vista;
- edición de texto;

Nivel 2:

- lenguaje de programación, que permite programar funciones específicas de fácil uso para el estudio de conceptos y procedimientos concretos;
- "packages", paquetes de funciones y objetos ya programados, el código de los cuales se incluye en estos archivos, que pueden ser leídos desde el cuaderno, de forma que no interfiere en su presentación;

- diversidad de formatos, algunos de los cuales permiten cargar o leer paquetes y archivos de forma automática al abrir un cuaderno, y ocultar o bloquear partes del cuaderno.

Nivel 3:
Las nuevas versiones de Mathematica, ofrecen otras posibilidades.

- reconocimiento de los símbolos matemáticos, de forma que podemos introducir una expresión matemática sin traducirla al lenguaje del programa, como hasta ahora.
- paletas y botones que podemos programar para insertar símbolos o ejecutar funciones de cualquier tipo automáticamente.
- inserción de "links" con otras partes del mismo cuaderno o externos.
- nuevas funciones que permiten dar órdenes al "Front-End", desde el núcleo, dando la posibilidad de abrir paletas, u otros archivos, automáticamente al abrir un cuaderno o ejecutar un botón. Ejemplo. Recientemente se ha desarrollado un nuevo "link", J/Link, que permite programar desde Mathematica aplicaciones en Java y que a su vez programas o applets de Java puedan interaccionar con un kernel remoto de Mathematica.

Esto sólo es una muestra de los principales elementos de utilidad a la hora de programar actividades educativas. Para obtener más información técnica o de otras aplicaciones, contactar con Wolfram Research, o Addlink, que comercializa el producto en España.

4.3.3. Desarrollo de actividades y materiales

Las actividades y materiales también las podemos agrupar en tres grupos, que corresponden básicamente a los niveles del apartado anterior.

- Las dirigidas a alumnos con conocimientos suficientes para realizar las actividades propuestas utilizando las funciones del programa. Normalmente universitarios. En este caso no es necesario realizar ningún tipo de cuaderno ni paquetes de funciones especiales. Nivel 1.

- A nivel 2, el profesor o programador, define una serie de funciones que el alumno utiliza para estudiar un tema concreto. Normalmente es necesario programar funciones para cada tema. O bien, aquellos en que, además, se programa un cuaderno, que incluye las actividades a seguir, definiciones, ejemplos, carga automática del paquete de funciones, ayuda, etc. En este caso, el alumno sólo ha de dominar los elementos básicos del programa.
- Con la versión 3.0, podemos programar cuadernos y paquetes de nivel 3, donde el alumno puede seguir las actividades sin entrenamiento previo, disfrutando de toda la potencia y ventajas de Mathematica.

Debemos considerar, también, las nuevas actividades a través de la red Internet, orientadas a la enseñanza de las matemáticas donde se utiliza Mathematica como un motor remoto de cálculo. En estas experiencias se desarrollan cuadernos que posteriormente se convierten a formato HTML (cosa que también se puede hacer desde el mismo programa). Tanto para utilizar el programa en clase o a distancia, es evidente la necesidad de crear cuadernos, dado que habitualmente el alumno no domina el programa.

Para enseñanza secundaria se desarrolla actualmente una colección de cuadernos de nivel 3, con el título de "Cuadernos de Matemáticas", que se ofrecen a todos aquellos profesores con conocimientos de Mathematica que deseen colaborar en esta experiencia educativa. Algunos de estos cuadernos ya están disponibles en la página de descarga.

También existe una versión simplificada, (nivel 2), dado que muchos ordenadores no soportan todavía la versión 3.0 o 4.0. Hasta el momento, se han tratado los temas de funciones reales, continuidad, derivación y aplicaciones, aunque no se descarta ampliar tanto temas como niveles educativos. El objetivo final, es conseguir una colección de cuadernos donde se aprovechen todas las ventajas del programa (con y sin conexión a Internet), multimedia incluida, y evaluar los resultados de su aplicación en clase.

Se puede encontrar más material educativo en la base de datos MathSource, (o en su FTP: mathsource.wolfram.com) donde los usuarios del programa Mathematica, ofrecen sus cuadernos y paquetes.

Los libros sobre Mathematica se pueden encontrar también en la web de la Wolfram, y los artículos fundamentalmente en la revista Mathematica in education and research.

Si no se dispone del programa, es posible bajar MathReader, para poder ver los cuadernos de Mathematica.

4.4. SOLVER

En estos tiempos donde se habla de la tecnología, información, sociedad del conocimiento, etc., aprovecho la oportunidad de describir lo poderosa que es la hoja de cálculo de Excel, pero voy a referirme en particular a una de las herramientas la cual se denomina Solver, y se puede ubicar en el menú principal en la opción Herramientas, al pulsar este icono aparecerán varias opciones y ahí encontraran dicha instrucción, ella resuelve problemas lineales y enteros utilizando el método más simple con límites en las variables y el método de ramificación y límite, implantado por John Watson y Dan Fylstra de Frontline Systems, Inc. Es de hacer notar que estos problemas se presentan en las ciencias administrativas y es requisito indispensable en casi todas las áreas de ciencias sociales, ingeniería, y en cualquiera de las carreras universitarias como Ciencias Estadísticas, Economía, Administración, entre otras, allí se estudia en una cátedra llamada Investigación de Operaciones, en ella se construyen modelos para el análisis y la toma de decisiones administrativas, los cuales en tiempos remotos se utilizaban algoritmos muy complejos entre ellos el del método simplex y el dual, estas técnicas manualmente son complejas, pero con la tecnología aparecieron softwares para resolver sendos problemas entre ellos se encuentra el más conocido que es el "LINDO", pero hoy tenemos la oportunidad de resolverlos muy fácilmente mediante la hoja de cálculo de Excel y el paquete agregado llamado "SOLVER" que optimiza los modelos sujetos a restricciones, como los modelos de programación lineal y no lineales, la cual permite obtener las soluciones óptimas para un modelo determinado, y dependiendo de los niveles de la organización se tomen las mejores decisiones para resolver los conflictos de una empresa.

4.4.1. Proceso de construcción de modelos

1- Definir variables de decisión

2- Definir la función de objetivos

3- Definir las restricciones

Utilidad o perdida = PX - CX – F

MAX Z = PX - CX – F

Donde:

P= Precio

C= Costo

X= Utilidades vendidas

F= Costo fijo

X<= U

X<= D

X<= O

4.4.2. Ejemplo de cómo usar "SOLVER"

Andrés Z. Es presidente de una microempresa de inversiones que se dedica a administrar las carteras de acciones de varios clientes. Un nuevo cliente ha solicitado que la compañía se haga cargo de administrar para él una cartera de 100.000$. A ese cliente le agradaría restringir la cartera a una mezcla de tres tipos de acciones únicamente, como podemos apreciar en la siguiente tabla. Formule usted un modelo de Programación Lineal para mostrar cuántas acciones de cada tipo tendría que comprar Andrés con el fin de maximizar el rendimiento anual total estimado de esa cartera.

Para solucionar este problema debemos seguir los pasos para la construcción de modelos de programación lineal (PL):

1.- Definir la variable de decisión.

2.- Definir la función objetivo.

3.- Definir las restricciones.

Luego construimos el modelo:

MAX Z = 7X1 + 3X2 + 3X3

S.A.:

60X1 +25X2 + 20X3 <= 100.000

60X1 <= 60.000

25X2 <= 25.000

20X3 <= 30.000

Xi >= 0

A continuación se construye el modelo en una hoja de cálculo de excel de la siguiente manera:

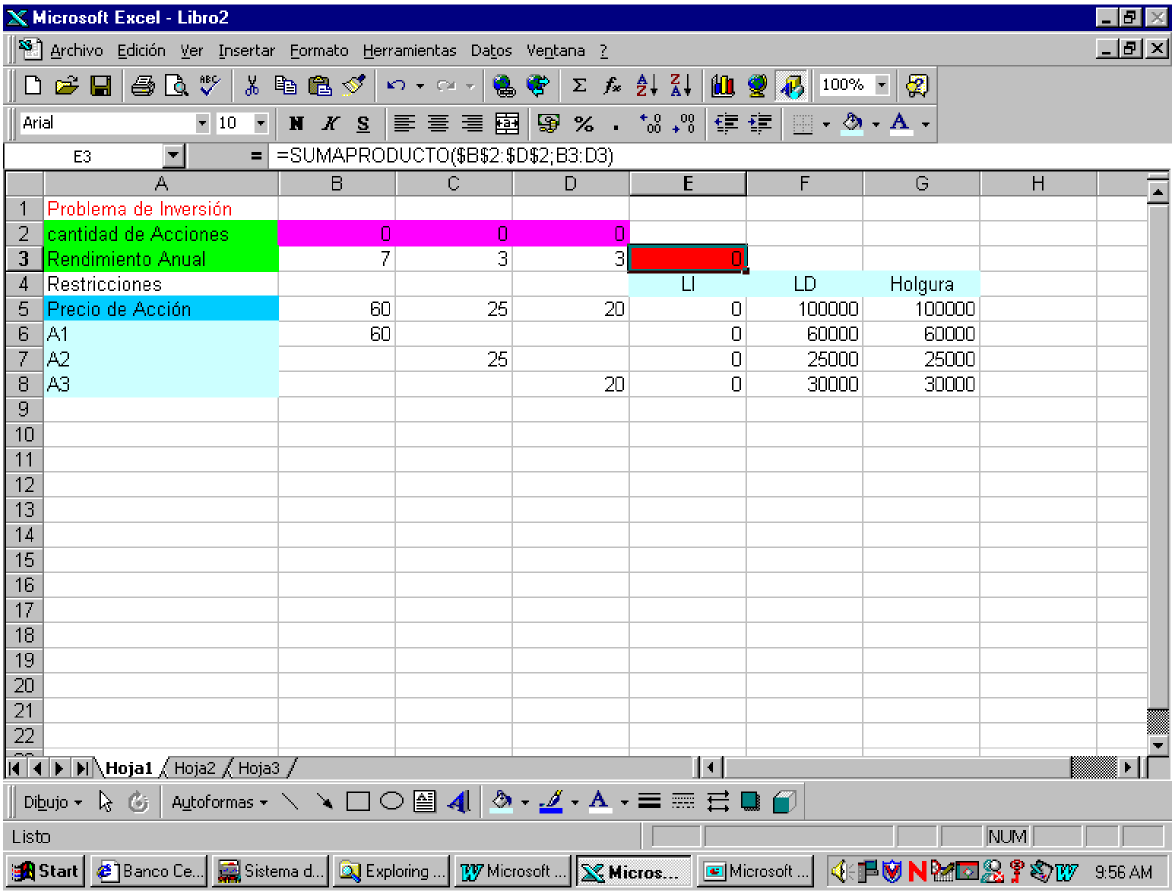


Fig. 4.3 Modelo del problema en hoja de cálculo de Excel

En la fila 2 se coloca la variable de decisión la cual es el número de acciones y sus valores desde la B2 hasta la D2.

En la fila 3 el rendimiento anual y sus valores desde B3 hasta D3.

En la celda E3 colocaremos una formula la cual nos va indicar el rendimiento anual total, =sumaproducto($B$2:$D$2;B3:D3).

Desde la fila B5 hasta la D8 colocaremos los coeficientes que acompañan a las variables de decisión que componen las restricciones.

Desde la E5 hasta la E8 se encuentra la función de restricción (LI) y no es mas que utilizar la siguiente formula =sumaproducto($B$2:$D$2;B5:D5) la cual se alojaría en la celda E5, luego daríamos un copy hasta la E8.
Desde la F5 hasta F8 se encuentran los valores de las restricciones.
Desde la G5 hasta G8 se encuentra la holgura o excedente.
Una vez completada la hoja de cálculo con el modelo respectivo ¡GRABE SU HOJA!, y seleccione "Solver…" en el menú de "Herramientas", ahí tendrá que especificar dentro del cuadro de dialogo de Solver:

- La celda que va a optimizar
- Las celdas cambiantes
- Las restricciones

Así tendremos la siguiente pantalla:

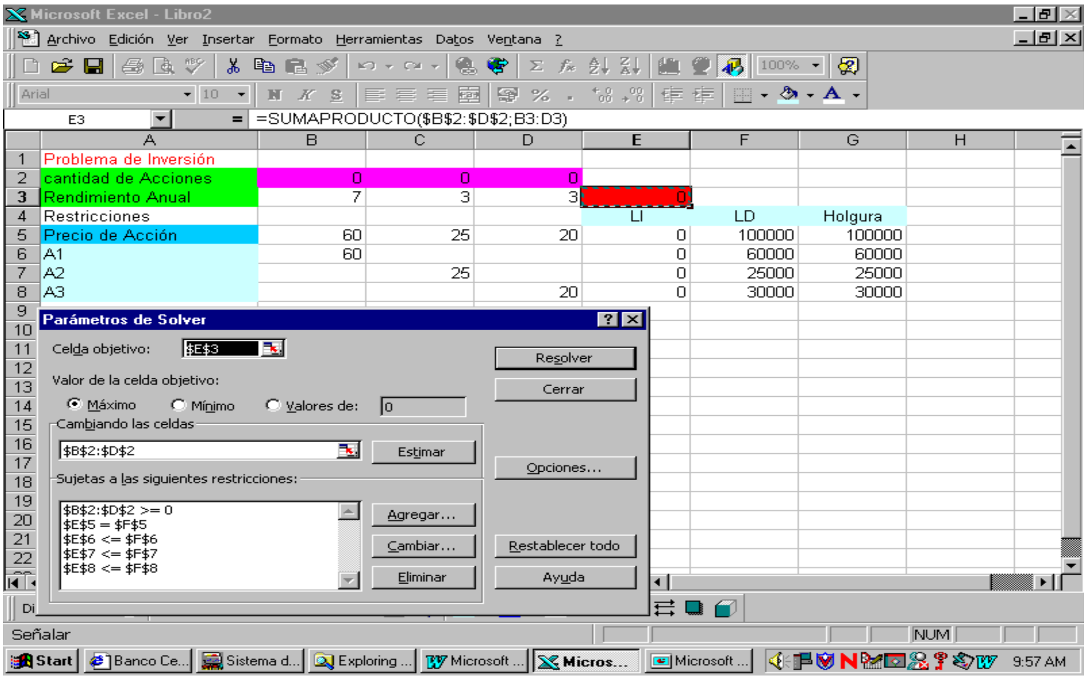


Fig. 4.4 Modelo del problema….. (continuación)

Como se puede observar en la celda objetivo se coloca la celda que se quiere optimizar, en las celdas cambiantes las variables de decisión y por último se debe de complementar con las restricciones. Una vez realizado estos pasos deben pulsar el icono de "Opciones" y debe hacer clic en

"Asumir modelo lineal" y enseguida el botón de "Aceptar". Luego haga clic en el botón de "Resolver" para realizar la optimización, lea detenidamente el mensaje de terminación de Solver y ahí observará si se encontró una solución o hay que modificar el modelo, en caso de haber encontrado una solución óptima usted podrá aceptar o no dicha solución, luego tendrá oportunidad de analizar un informe de análisis de sensibilidad para luego tomar la mejor decisión.

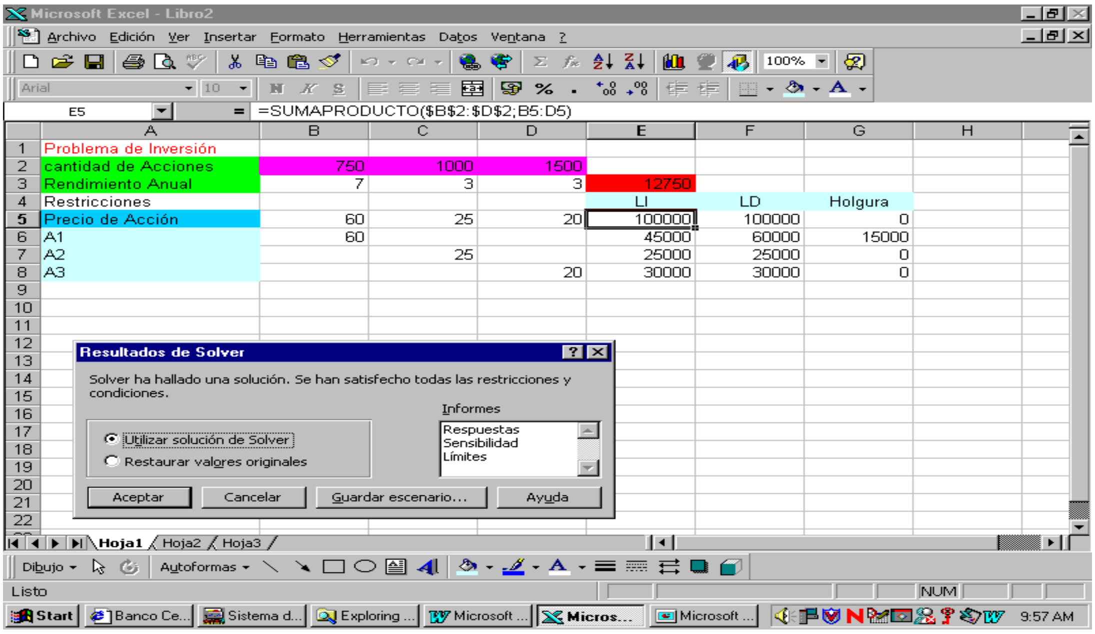


Fig. 4.5 Solución del problema

En nuestro ejemplo el máximo rendimiento anual fue de 12750$, y la cantidad de acciones a comprar serían 750, 1000 y 1500 para Navesa, Telectricidad y Rampa respectivamente.

De está forma podemos observar la potencia que tiene el solver, para mayor información sobre el tema, en la ayuda de la hoja de cálculo de excel o en libro de Investigación de Operaciones en la Ciencias Administrativas, autor: Eppen quinta edición, Editorial Prentice Hall tendrán una mayor explicación.

CONCLUSIONES

El hombre para actuar organiza sus procedimientos para la acción y la computadora puede ser una herramienta útil para ello, pues a través de la mediación que realice el profesor, preserva y desarrolla la integridad intelectual del alumno, propicia el interés y mayor grado de participación personal en las tareas de aprendizaje, de forma que puedan lograr un dominio independiente de sus funciones, partiendo de lo que pueden hacer solos y contribuir a su desarrollo a través del aprendizaje . El sentido y significado de su utilización permitirá enriquecer la actividad docente y potenciar el aprendizaje de los estudiantes.

De la didáctica del desarrollo, de la capacidad de resolución de problemas matemáticos y de las concepciones del uso de las nuevas tecnologías de la informática y las comunicaciones en la enseñanza de la Matemática para el desarrollo del pensamiento intelectual se deriva la posibilidad de utilizar las computadoras para la enseñanza de procedimientos generalizados cuyas acciones son aplicables a muchas situaciones y se asocia la actuación para enfrentar un problema y al mismo tiempo a la adquisición de conocimientos.

El uso de la computadora dentro del marco de un proceso docente bien organizado, en el que al profesor corresponde el papel de orientador y la máquina sirve como un efectivo mediador (o medio integrador) en el proceso de enseñanza aprendizaje, se sustenta en el reconocimiento del papel de lo social y la interiorización en estos procesos así como el carácter personal, subjetivo e intransferible de los mismos. Ello supone la conducción e inclusión explícita de un sistema de acciones intelectuales en el proceso de enseñanza aprendizaje para la introducción de la computadora en la resolución de problemas matemáticos.

La integración de las nuevas tecnologías de la informática y las comunicaciones (NTIC) al proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática obedece a la necesidad de considerar éstas en función de elevar la calidad del aprendizaje.

La atención a la preparación y actualización de los docentes de matemática en el uso de las NTIC, así como la divulgación de información sobre estos recursos y las experiencias en su aplicación, es una necesidad actual permanente.

GLOSARIO DE TERMINOS:

Algebra: Rama de las matemáticas en la que se usan letras para representar relaciones matemáticas.

Cálculo: Rama de las matemáticas que se ocupa del estudio de los incrementas en las variables, pendientes de curvas, valores máximos y mínimos de funciones y de la determinación de longitudes, áreas y volúmenes.

Cálculo diferencial: Estudia los incrementos en las variables.

Cálculo integral: Es un procedimiento que nos permite conocer áreas de regiones acotadas, mediante la suma de infinitésimos.

Derive: El Derive se utiliza para mejorar los resultados obtenidos con la metodología tradicional. Puede ser utilizado en la enseñanza de Álgebra Lineal y en el Cálculo Diferencial e Integral. En algunos casos, Geometría y Matemática Discreta.

Dirección: Existen tres tipos de dirección de uso común dentro de Internet: “Dirección de correo electrónico” (email address), “IP” (dirección Internet) y “dirección hardware”.

Ecuación: Es una expresión que incluye la relación de igualdad (=).

Excel: Microsoft Excel es una potente y a la vez sencilla hoja de cálculo.

Factorizar: Descomponer una expresión algebraica en un producto de varios términos mas sencillos.

Hardware: Todos los componentes físicos que componen una PC

Internet: Conjunto de redes conectadas entre sí, que utilizan el protocolo TCP/IP para comunicarse

Java: Lenguaje de programación orientado a redes, se pueden programar aplicaciones completas como calculadoras, clientes de Chat, etc.

MatLab: potente lenguaje de programación de cuarta generación. Es un programa interactivo que ayuda a realizar cálculos numéricos, analizando y visualizando los datos, para resolver problemas matemáticos, físicos, etc.

Matriz: Es una tabla rectangular de números o elementos de un anillo. Se utilizan en la representación de sistemas de ecuaciones de primer grado con varias incógnitas.

Monomio: Expresión matemática que contiene un solo término.

NTIC: Nueva Tecnología de la Informática y las Comunicaciones.

Número primo: Es un entero (número natural) que solo se puede dividir exactamente por si mismo y por 1.

Polinomio: Expresión matemática en la que se encuentra una suma (o diferencia) finita de términos.

Red: Se tiene una red cada vez que se conectan dos o más computadoras de manera que puedan compartir recursos.

Solver: Resuelve problemas lineales y enteros, utilizando el método más simple con límites en las variables y el método de ramificación y límite.

TIC: Tecnología de la Informática y las Comunicaciones.

Vector: En el concepto geométrico es un segmento rectilíneo de longitud, dirección y sentido dados.

WAN: (Wide Area Network). Red de comunicaciones utilizada para conectar ordenadores y otros dispositivos a gran escala. Las conexiones pueden ser privadas o públicas.

BIBLIOGRAFÍA.

- Eppen / Investigación de Operaciones en las Ciencias Administrativas/ Prentice Hall / Quinta edición.
- Matemática discreta / Kolmant.
- Microsoft Encarta / Edición 2001.

CIBERGRAFÍA.

- Buscadores matemáticos: http://www.recursosmatematicos.com/redemat.html
- Ciudad futura:

http://www.ciudadfutura.com/matematicas/index.html

- Derive:

http://www.upv.es/derive/general.htm

- El poder del Solver: http://www.monografias.com/trabajos10/solver/solver.shtml
- Excel:

http://www.svetlian.com/msoffice/excel.htm

- Mathemática:

http://www.addlink.es/productos.asp?pid=1