Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Centro de Investigación en Matemáticas

Valuación de una Opción Call Europea: Modelo de Black-Scholes y una Aplicación

Tesis que para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

presenta

Adrián Vázquez Ávila

bajo la dirección de

Dra. Delil Gómez Portugal Aguilar

Dr. Ismael Muñoz Maya

Pachuca, Hidalgo. Febrero de 2008.

Resumen

En el presente trabajo se exponen los modelos Binomial y Black-Scholes para valuar una opción call europea en tiempo discreto y continuo, respectivamente. Adicionalmente, se ilustra el uso de la fórmula Black-Scholes sobre un activo subyacente específico.

Abstract

In this work we review the Binomial and Black-Scholes models for the valuation of european call options in discrete and continuous time, respectively. In addition to this, we illustrate the usage of the Black-Scholes formula with a specific underlying financial asset.

Este trabajo está dedicado a mi madre,
quien me apoyó incondicionalmente durante toda mi carrera.

Agradecimientos

Una de las cosas más valiosas que una persona puede tener en esta vida es la amistad, el saber que existen personas con las que puedes contar incondicionalmente y aquellas que te enseñan que la vida es más compleja que las propias matemáticas, por esta razón, quiero agradecerles.

Le estoy infinitamente agradecido a los profesores que me impartieron clases durante la carrera, y de manera muy especial a los doctores Delil Gómez Portugal Aguilar e Ismael Muñoz Maya por guiarme para que este trabajo haya salido adelante. De igual manera, quiero dar un agradecimiento muy especial a la Dra. Olivia Gutú Ocampo, por brindarme su ayuda cuando más lo necesité; y a Don Hipólito Mayoral García, por el gran apoyo que obtuve de él en la preparatoria y parte de la licenciatura.

.

ÍNDICE GENERAL

Glosario de Términos

- ***Acción:*** Es un título que establece la participación proporcional que su poseedor tiene en el capital de una empresa.
- ***Activo:*** Son los derechos que una entidad posee y que pueden convertirse en forma directa en medios líquidos equivalentes.
- ***Balo la par:*** Cuando la cotización de una acción es inferior al valor nominal.
- ***Bono:*** Es un certificado de deuda contraída por el inversionista.
- ***Composición:*** Se conoce como composición al proceso mediante el cual los intereses se acumulan al principal para producir conjuntamente nuevos intereses al final de un cierto período de tiempo.
- ***CETES:*** Son instrumentos de deuda gubernamental denominado en moneda nacional, emitidos por la Tesorería de la Federación con un doble propósito: financiar el gasto público y regular flujos monetarios.
- ***Demanda:*** Es la cantidad de bienes y servicios que pueden ser adquiridos a diferentes precios de mercado por un consumidor o por el conjunto de consumidores.
- ***Oferta:*** Es la cantidad de bienes y servicios que los productores están dispuestos a ofrecer a un precio y condiciones dadas, en un determinado momento.
- ***Opción call europea:*** Es un contrato que le da al poseedor el derecho de *comprar* un activo a un precio y a una fecha determinada, fijados ambos de antemano.
- ***Portafolio:*** Si un inversionista posee x, y bonos y z opciones, se dice que tiene un *portafolio* (x, y, z).
- ***Sobre la par:*** Cuando la cotización de una acción es superior al valor nominal.

Introducción

Las *opciones* constituyen lo que se conoce como productos derivados, instrumentos financieros cuyo rendimiento depende de otro activo, conocido como activo *subyacente*. Un ejemplo de producto derivado pueden ser los bonos gubernamentales: en México, uno de los bonos gubernamentales están dados por los *Certificados de la Tesorería de la Federación*, mejor conocidos como CETES, y son productos derivados porque su valor depende de una tasa de interés.

En la actualidad existen diferentes contratos financieros que dependen de elementos adicionales a un contrato tradicional directo. Por ejemplo, el contrato denominado *forward* es un contrato para comprar/vender un activo con *riesgo* a una fecha futura especificada conocida como *fecha de entrega*, a un precio que se fija en el presente, llamado *precio del forward*. Los que participan en el contrato forward son el poseedor y el suscriptor de dicho contrato. En otras palabras, un contrato forward es un acuerdo entre ambas partes en el cual el poseedor está obligado a comprar/vender el activo, y el suscriptor está obligado a vender/comprar el mismo. Esto es, un contrato forward obliga a ambas partes a efectuar la transacción de compra-venta del activo subyacente. El total a recibir a futuro por la transacción en el forward es conocido; la incógnita es, si el negocio a futuro resultará ventajoso.

En contraste, las opciones tienen características distintas. Existen dos tipos de opciones llamados opción *call* y opción *put*. Una opción call es un contrato que le da al poseedor el derecho de *comprar* el subyacente a un precio fijado y en una fecha establecidos de antemano. Por otra parte, la opción put es un contrato de *venta* con las mismas características de la opción call. En otras palabras, el poseedor de la opción tiene el derecho, mientras que el suscriptor está obligado a cumplir el contrato. Los tipos más comunes de opciones son las *europeas* y las *americanas*. También existen las opciones *exóticas*, pero en este trabajo no se hará mención de éstas. En el caso de las opciones europeas, el poseedor sólo puede ejercer la opción en la fecha de vencimiento, mientras que las opciones americanas pueden ser ejercidas en cualquier momento posterior a la fecha de emisión del contrato, y hasta la fecha de vencimiento del mismo.

Tanto las opciones como los forwards son contratos sobre negocios a futuro. La diferencia primordial es que las opciones incluyen un derecho a elegir para el poseedor de dicho contrato, mientras los forwards obligan a ambas partes a realizar dicho contrato.

Como ya se mencionó, en un contrato opción hay dos participantes: por un lado quien compra la opción, y por otro quien la suscribe. El primero adquiere el derecho de comprar/vender el activo subyacente a un precio y a una fecha establecidas de antemano. En cambio, la contraparte está obligada a cumplir el contrato, independientemente de lo que convenga a sus intereses. El precio que se fija se llama *precio strike* o *precio de ejercicio*, y la fecha se conoce como *fecha de vencimiento* o de *fecha de maduración*. Este contrato aparenta ser desventajoso para quien suscribe, a menos que quien compra la opción le pague una cierta cantidad de dinero que le permita cubrirse contra futuras pérdidas, debidas al cambio del precio del subyacente durante la vigencia de la opción. El problema fundamental es determinar cuál es el precio justo que se debe de pagar por dicho privilegio. Este es un problema de gran importancia en la teoría conocida como *valuación de opciones.*

El problema de la valuación puede ser analizado desde el punto de vista probabilístico, así como también desde del punto de vista de las ecuaciones en derivadas parciales. El problema se planteó en términos de ecuaciones en derivadas parciales a través de la famosa ecuación de Black-Scholes. Cox y Ross en 1976 [9], mostraron que la valuación de una opción europea se podía hacer a través del cálculo de una esperanza condicional.

Por lo antes dicho, para que un contrato opción sea satisfactorio para ambas partes, se requiere de un pago en el presente ("pago de una prima") por el privilegio de contar con la elección de hacer cumplir su obligación al suscriptor. Debido a la incertidumbre sobre la cantidad a recibir en el futuro, no es tan fácil determinar la cantidad justa para esta prima inicial.

Los dos supuestos principales para la valuación de opciones son el método de réplica y el principio de no arbitraje. El primero consiste básicamente en que para valuar cualquier derivado se tiene que encontrar un portafolio con activos económicos o, más generalmente, encontrar una estrategia mediante la cual se garantice el pago de una cantidad idéntica al pago del producto derivado. Si se puede lograr esto, entonces se ha replicado exactamente el derivado. Esta idea puede que parezca un poco irreal, pues no hay garantía que siempre se pueda hallar un portafolio replicante; de este supuesto se discutirá con más detalle en el Capítulo 1.

Por otra parte, el arbitraje consiste en encontrar una estrategia para generar dinero sin invertir un solo centavo de uno mismo y además sin riesgo alguno (este concepto se vera con más detalle en el Capítulo 1). El supuesto que se va a considerar es que no hay arbitraje. Dada la ausencia del arbitraje en la economía se sigue inmediatamente que el valor de un derivado es el valor del portafolio que lo replica.

En el caso de la opción, la suma a recibir es desconocida. Sin embargo, debido a que el dueño tiene el derecho a elegir, se le garantiza que el negocio no terminará con pérdidas ("remuneración no negativa"). La prima a recibir por la transacción (compra-venta) del activo subyacente resulta desconocida de antemano, ya que dicha transacción puede o no darse. Esto es, debido a que la opción, como su nombre lo sugiere, provee al poseedor del contrato el derecho a decidir a comprar/vender al precio pactado, generalmente no suceden transacciones resultantes en pérdidas.

En el presente trabajo se pretende exponer una solución al problema de la valuación de opciones, considerando sólo las de tipo call europea; además, este trabajo se enfocará en las opciones que involucran acciones como activo subyacente. El Capitulo 1 empieza con la descripción de un modelo en tiempo discreto, llamado *modelo Binomial*. En este modelo se supondrá (entre otras hipótesis) que el valor del activo subyacente toma exactamente dos valores en cada período de observación (que se tomará como anual, pero puede estar dado en meses o incluso en días), para así poder dar una aproximación a la solución de la valuación de opciones. El caso descrito aquí es la solución de Cox, Ross y Rubinstein, que es el resultado análogo para el caso discreto de la fórmula de Black-Scholes.

En el Capitulo 2 se presenta los aspectos matemáticos, sin entrar en detalles técnicos, del cálculo estocástico, una herramienta que se utiliza para el desarrollo de la teoría de la valuación de productos derivados en tiempo continuo.

Un modelo más sofisticado es el que se tratará en el Capítulo 3, que es el modelo en tiempo continuo para derivar la fórmula de Black-Scholes. En este modelo se obtendrá una expresión para el comportamiento del precio del activo subyacente. Por otra parte, se utilizará del lema de Itô, el teorema de Girsanov y el método de la réplica para llegar a una ecuación diferencial en derivadas parciales estocástica. Esta ecuación se reduce a una más simple, que, a saber, es de la forma de la ecuación del calor en una dimensión; y de esta forma, al resolverla, se llegará a la famosa ecuación de Black-Scholes para la valuación de una opción call europea.

En el Capítulo 4 se hará una aplicación de la fórmula de Black-Scholes sobre una acción en particular, a saber, las acciones de Teléfonos de México, mejor conocido como Telmex. También se analizará el comportamiento del precio de una opción call europea dejando fijos cuatro parámetros y variar uno de ellos (se verá en el capítulo 3 que el precio de la opción depende de cinco parámetros). Además, se presenta una aproximación a la fórmula de Black-Scholes considerando que el precio strike es el valor futuro a la fecha de vencimiento del precio del subyacente en ese instante. Finalmente, se mencionan las conclusiones del trabajo.

CAPÍTULO 1

Un Modelo en Tiempo Discreto: El Modelo Binomial

1.1

Introducción

En este capítulo se introducirán los conceptos fundamentales de los instrumentos financieros básicos a utilizar en este trabajo, así como algunos supuestos económicos necesarios para plantear un primer modelo que permita valuar una opción call europea. Por otra parte, cabe mencionar, que los fundamentos y el desarrollo de este capítulo se basaron en el texto y artículo [9] y [24] respectivamente.

1.2

Ejemplos

Para comenzar se presentan algunos ejemplos de problemas que involucran opciones del tipo que se interesan en el presente trabajo, y que se definirá formalmente más adelante en la sección 1.3.3.

❶ Suponga que a los dueños del equipo Pachuca les gustaría contratar al jugador Rafael Márquez para el siguiente campeonato (un año), y quisieran firmar hoy mismo un contrato que les garantice el derecho de comprar la carta[1] del jugador al finalizar el presente campeonato a un precio de $\$5,000,000$ fijado hoy mismo.

Este contrato es muy desventajoso para el agente de Rafa (el dueño de la carta), a menos que se le pague hoy una cierta cantidad de dinero que garantice la realización del contrato. Pero hay algo muy importante que se debe tomar en cuenta, y es, que la carta de Rafa puede subir o bajar de precio durante el presente campeonato (ya sea por lesión, por ganar el campeonato de goleo o por otras razones) y puede suceder que no convenga comprarlo al final del torneo. La pregunta que se puede plantear es ¿cual sería el precio justo a pagar por el contrato?

❷ Suponga que a una persona le gustaría comprar una casa dentro de medio año a un precio de $\$500,000$, y esta persona quisiera firmar hoy mismo un contrato que le dé el derecho de comprar la casa a ese precio en la fecha fijada de antemano. Se debe tener en cuenta el valor de la casa en el mercado inmobiliario, ya que puede subir o bajar el precio de ésta. Este contrato sería desventajoso para esta persona, a menos que se le pague una prima por aceptar la obligación de venta (si es que se realiza) del inmueble. ¿Cuál es el precio a pagar para la realización de dicho contrato?

❸ Una compañía americana exporta productos a Japón. Los japoneses pagan lo importado en yenes, pero la compañía prefiere que le hagan su pago en dólares. Los americanos estiman que recibirán entre uno y dos billones de yenes el siguiente año por pago de mercancía, y este monto lo tendrán que cambiar por dólares. La variabilidad de la tasa de cambio entre el dólar y el yen significa que la compañía está expuesta a algún riesgo extra al cual prefiere no exponerse. Una solución es firmar un contrato con una casa de cambio que le de a la compañía el derecho de comprar un número fijo de dólares a un precio fijo en yenes. ¿Cuál es el precio justo que se debe pagar para la realización de dicho contrato?

❹ Ciertos inversionistas quieren invertir su dinero en acciones de Telmex. Suponga además que el precio actual de una acción es de \$15. Les gustaría firmar hoy mismo un contrato que les dé el derecho de comprar dentro de 4 meses una cantidad de $10,000$ acciones de Telmex a un intermediario financiero a un precio fijo de \$16. Se debe tomar en cuenta que el precio de la acción puede aumentar o disminuir dependiendo de los diversos factores que intervienen en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV). Al finalizar los 4 meses se tendrá que tomar la decisión de comprar o no dichas acciones (siempre y cuando el precio de dicha acción exceda la cantidad de \$16, de otra forma no convendrá comprar las acciones). Este contrato es desventajoso para el intermediario financiero, a menos que se le pague hoy mismo una “prima” por la realización de dicho contrato. ¿Cuál es el precio justo que se debe pagar?

El presente trabajo se centra en las opciones sobre acciones como activo subyacente, es decir, el activo a considerar es la acción.

[1] Se puede pensar que la carta de un jugador es un documento que cede los derechos de éste a un club o a una persona, en otras palabras, que el propietario de la carta es el “dueño” del jugador.

1.3

Conceptos Básicos

Ahora se darán algunos conceptos básicos para poder desarrollar la herramienta necesaria para el entendimiento de la valuación de opciones.

Se utilizará la variable t para denotar el tiempo. Para los propósitos de este trabajo, t estará expresado en años.

1.3.1

Valor Futuro y Valor Presente

Un concepto muy sencillo pero fundamental en el desarrollo de la herramienta que se utilizará es el siguiente: suponga que se desea invertir una cierta cantidad de dinero P_0 por el lapso de un año, sabiendo que la tasa de interés fija anual es de $r\,\%$. Entonces la cantidad de dinero que se obtiene al finalizar el año es

$$P_1 = P_0 + rP_0 = P_0(1 + r),$$

donde rP_0 representa la utilidad por la inversión; si inmediatamente se vuelve a invertir esta cantidad, al finalizar el siguiente año se tendrá

$$P_2 = P_1 + rP_1 = P_0(1 + r) + rP_0(1 + r) = P_0(1 + r)^2,$$

y continuando sucesivamente así, al cabo de t años se obtiene

$$P_t = P_0(1 + r)^t.$$

Se llamará a P_0 el *principal* y a P_t el *valor futuro* de P_0 al finalizar el tiempo t.

Se denotará como $P = P_0$ y $VF = P_t$, de modo que

$$VF = P(1 + r)^t.$$

En este ejemplo se ha considerado que el período de composición (o simplemente composición) es anual; sin embargo, en la práctica no necesariamente sucede así, es decir, el período de composición puede ser más de una vez por año, por ejemplo semestral, bimestral, mensual o hasta diariamente; por lo cual se tiene

$$\mathsf{VF} = \mathsf{P}\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt},$$

donde m es es la *frecuencia de composición*. Así que si se cuenta con un principal de \$20, 000 y se desea invertirla a un plazo de 20 años, sabiendo que la tasa de interés (fija) por dicha inversión es de 10 % anual, el valor futuro será de $\mathsf{VF} = 20,000(1.10)^{20} = 134,549.9990$, es decir, se obtendría la cantidad de \$134, 549.9990 al pasar los 20 años.

Observación:

- Si aumenta la frecuencia de composición el valor futuro de un principal también aumenta, pero esto ocurre hasta un cierto límite (como se verá en el Capítulo 3).

Un concepto que está muy ligado al valor futuro es el de *valor presente*. Suponga que se desea tener una cierta cantidad de dinero P al final de un año, sabiendo que la tasa de interés fija anual es $r\,\%$. ¿Cuánto se debe invertir *hoy* para obtener la cantidad deseada al finalizar el año?

Sea VP la cantidad que se quiere; esta cantidad se llama el *valor presente* o *valor actual* de P. Calculando el valor futuro de VP se tiene

$$\mathsf{P} = \mathsf{VP}(1 + r),$$

lo cual implica que

$$\mathsf{VP} = \mathsf{P}(1 + r)^{-1}.$$

Procediendo de la misma forma que en el caso del valor futuro se tiene que el valor presente de P obtenido en t años es

$$\mathsf{VP} = \mathsf{P}(1 + r)^{-t}.$$

Nuevamente, en la fórmula anterior la frecuencia de composición es anual; la expresión que corresponde al valor presente con frecuencia de composición m es

$$\mathsf{VP} = \mathsf{P}\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-mt}.$$

A la cantidad $\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-mt}$ se le conoce como *factor de descuento*.

1.3.2

Concepto de Riesgo

El *riesgo* es un concepto fundamental en las finanzas modernas. Toda transacción puede ser vista de alguna manera como compra o venta de riesgo. Es necesario entonces entender qué es el riesgo.

Se definirá primero la ausencia del riesgo. Un *activo sin riesgo* es un activo que puede tener un valor futuro predecible. ¿Existe un activo sin riesgo?, la respuesta es sí. Un ejemplo concreto en México es un *bono gubernamental* llamado CETES. Se puede comprar un bono por \$100 hoy y sabiendo que recibirán \$5 por año (llamado cupón de pago), hasta un período determinado, cuando se obtendrán los \$100 originales de regreso. ¿Es un activo riesgoso? Solamente podría ser considerado así, si existiera la posibilidad de que el gobierno se negara a pagar. Esto es poco probable que suceda, porque sería una amenaza a la estabilidad financiera del país.

La existencia de tales activos sin riesgo es fundamental en matemáticas financieras y en la industria financiera moderna, de manera que se puede hablar de dicha existencia de estos tipos de activos.

Se puede definir ahora al activo con riesgo, como un activo que *no está seguro* de tener un valor fijo en el futuro; el riesgo puede ser considerado como sinónimo de *incertidumbre*. El ejemplo básico es una *acción*. Otros ejemplos de activos con riesgo son: tener moneda extranjera (dólares, yenes, etc.) y estar expuestos al riesgo a que la tasa de interés cambie adversamente o se podría comprar un departamento en Londres y estar expuesto a los cambios del mercado inmobiliario donde se tendrá la posibilidad de devaluarse, esto implica pérdida o se incremente su valor, lo cual sería muy bueno para el poseedor de dicho inmueble.

Visto lo anterior, se tratará solamente con dos clases de activos: el bono y la acción. Se denota el precio de una acción y de un bono al tiempo t como $S(t)$ y $A(t)$ respectivamente.

De la discusión anterior, se puede concluir que los precios $S(0)$, $A(t)$ para $t \geqslant 0$ pueden ser conocidos por el inversionista. Sin embargo, el precio $S(t)$, para $t > 0$ es incierto por tratarse de un activo con riesgo.

Por otra parte, si un inversionista posee x acciones, y bonos y z opciones, se dice que tiene un *portafolio* (x, y, z). El valor del portafolio se denota como $V(t)$, y está dado por

$$V(t) = xS(t) + yA(t) + zC(t), \qquad \text{para } t \geqslant 0.$$

Aquí $\mathsf{C}(\mathsf{t})$ representa el valor de la opción al tiempo t. Si el portafolio cumple que $\mathsf{V}(\mathsf{t}) \geqslant 0$ para $\mathsf{t} \geqslant 0$, entonces se dice que el portafolio es *admisible*.

En general, un portafolio puede tener tantos activos financieros como se quiera.

1.3.3

Opción Call Europea

En los problemas planteados en la sección 1.2 se concluyó que lo que interesa saber es cuál es el precio justo que se debe pagar por el contrato que da el derecho de comprar el activo relacionado con él (la carta de un jugador, el cambio de dólares por yenes, un bien inmobiliario y la compra de un número fijo de acciones). Este contrato en el ámbito financiero se denomina *opción call europea* y se define como sigue:

Una opción call europea es un contrato que le da al poseedor el derecho de *comprar* un activo a un precio X fijado de antemano a una fecha determinada T, fijada también de antemano.

A X se le conoce como *precio de ejercicio* o *precio strike* y a T como *fecha de vencimiento* o *fecha de maduración* (con T expresado en años).

De manera más general, una opción es un contrato entre dos personas para adquirir o vender un activo llamado *subyacente*. La persona que compra la opción tiene el derecho de comprar o vender dicho activo, y quien emite la opción, tiene la obligación de cumplir el contrato, independientemente de lo que le convenga a sus intereses. Si la opción es de compra se llama *call*, si es de venta se llama *put*. También a las opciones se pueden clasificar en la forma en que se ejercen, las más comunes son la europea y la americana (existen otros tipos de opciones denominadas exóticas, que no se consideran en este trabajo). La opción europea solamente puede ser ejercida en la fecha de vencimiento. Por otra parte, la opción americana puede ser ejercida en cualquier momento posterior a la fecha de emisión del contrato, y hasta la fecha de vencimiento del mismo.

Como se mencionó anteriormente, este contrato puede ser desventajoso para quien emite la opción, a menos que quien la adquiere le pague una prima para la realización del contrato. ¿Cuál es el pago "justo" por este derecho?, es decir, ¿cuál es el "valor" de la opción?

Se denotará por $\mathsf{C}(\mathsf{t})$ al precio de la opción call europea al tiempo $\mathsf{t} = 0, 1, 2 \ldots, \mathsf{T}$ (donde T es la fecha de vencimiento de la opción). El problema de la valuación de opciones es encontrar el valor $\mathsf{C}(0)$ que corresponde al precio "justo" a pagar por esa opción.

Por otra parte, una opción está determinada por su *función de pago* (payoff) $\mathsf{f}(\mathsf{S}(\mathsf{T}))$, que para una opción call europea está dada por

$$\mathsf{f}\,(\mathsf{S}(\mathsf{T})) = \begin{cases} \mathsf{S}(\mathsf{T}) - \mathsf{X} & \text{si} \quad \mathsf{S}(\mathsf{T}) > \mathsf{X} \\ 0 & \text{si} \quad \mathsf{S}(\mathsf{T}) \leqslant \mathsf{X} \end{cases} =: \quad (\mathsf{S}(\mathsf{T}) - \mathsf{X})^{+}, \tag{1.1}$$

en otras palabras, conviene *ejercer* (efectuar) el contrato cuando el precio del subyacente exceda (en el ámbito financiero esta ganancia se le denomina *sobre la par*) el precio de ejercicio que se fija de antemano, es decir, cuando $\mathsf{S}(\mathsf{T}) > \mathsf{X}$. Cuando $\mathsf{S}(\mathsf{T}) < \mathsf{X}$ no va a convenir ejercer el contrato, puesto que se va a obtener una pérdida por tal negocio (en el ámbito financiero esta pérdida se le denomina *bajo la par*).

1.4

Modelo Binomial

1.4.1

Modelo de un Paso para Valuar una Opción

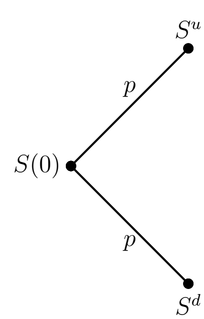

Figura 1.1: Precio de una acción cuando $\mathsf{T} = 1$.

En el modelo de un paso se va a considerar que la fecha de vencimiento de la opción esté restringida a $\mathsf{T} = 1$ (o que consta de un paso) y se verá cuál va a ser el precio a pagar por la opción.

El inversionista conoce $S(0)$ (el precio de la acción al momento de la realización del contrato), pero no sabe cuánto vale $S(1)$. Suponga que

$$S(1) = \begin{cases} S^u = S(0)(1+u) & \text{con probabilidad} \quad p \quad \text{si el precio sube} \\ \\ S^d = S(0)(1+d) & \text{con probabilidad} \quad 1-p \quad \text{si el precio baja,} \end{cases}$$

donde u y d representan la tasa de utilidad de la acción en el período de tiempo $[0,1]$ (Figura 1.1) y cumple que $S^d < S^u$. A continuación se definirá con más precisión la tasa de utilidad.

Se representa a $K(t)$ como la *tasa de utilidad* (o *retorno*) en el período de tiempo $(t-1,t)$ para $t = 1,2,\ldots,T$. Estas variables aleatorias se suponen independientes e idénticamente distribuidas, y satisfacen

$$K(t) \quad = \quad \begin{cases} u & \text{con prob.} \quad p, \\ \\ d & \text{con prob.} \quad 1-p, \end{cases}$$

donde d y u son constantes que cumplen $d < r < u$, con r la tasa de interés, y claramente se tiene que $0 < p < 1$ (de lo contrario se estaría trabajando con un activo sin riesgo). Si no se pide la condición $d < r < u$, se genera oportunidad de arbitraje [9], página 81.

Si $S(t)$ representa el precio de la acción al tiempo t con $t = 0,1,\ldots$, entonces se cumple

$$K(t) = \frac{S(t) - S(t-1)}{S(t-1)}.$$

1.4.2

Supuestos del Modelo

Para continuar, se enunciarán algunos supuestos que se necesitan para el desarrollo del primer modelo de valuación de una opción call europea.

Aleatoriedad de precios:

El precio $S(t)$, $t > 0$, de una acción es una variable aleatoria que toma exactamente dos valores diferentes con probabilidad positiva.

No movimiento del mercado:

Los actos realizados no afectan a los precios del mercado, es decir, se puede comprar o vender cualquier cantidad de activos sin por ello afectar su precio.

El punto principal del libre mercado es que esta suposición no es cierta, por la sencilla razón del principio de la *oferta y la demanda*. Si la demanda aumenta, entonces el precio aumenta, lo que genera una mayor producción. Por otra parte si la demanda disminuye, entonces los precios también disminuyen, y esto ocasiona una menor producción.

Así, en relación con las operaciones financieras, las transacciones pueden afectar al precio de mercado, pero en magnitudes tan pequeñas, que permite suponer que el efecto sea despreciable.

Liquidez:

Cualquier activo se puede comprar o vender a precio de mercado y en cualquier tiempo en cantidades arbitrarias. Esto es, claramente, una idealización porque en la práctica existen restricciones sobre los volúmenes de los activos.

Posición Corta y Posición Larga:

Un inversionista tiene *posición larga* (contraste esta definición con la de [18]) con respecto a un activo, si posee una cantidad positiva de este activo. De otro modo ha tomado una *posición corta*.

Cantidades Fraccionales:

Es la posibilidad de comprar o vender cantidades fraccionales de algún tipo de activo, es decir, se puede negociar la mitad, la tercera parte de algún activo financiero.

No hay Costos de Transacción:

Otra de las hipótesis que se va a utilizar es que se puede comprar y vender activos sin ningún costo. Desde luego, este supuesto no se cumple en los mercados reales, pero para este modelo si vale.

Positividad de Precios:

Todos los precios de los activos son positivos, es decir, $S(t) > 0$ y $A(t) > 0$ para todo $t \geqslant 0$.

Principio de no arbitraje:

No existe portafolio admisible con $V(0) = 0$, tal que si $t > 0$ entonces $V(t) > 0$, con probabilidad distinta de cero. En otras palabras, si el valor inicial de un portafolio es cero, $V(0) = 0$, entonces $V(t) = 0$ con probabilidad 1 para todo $t > 0$.

Este principio establece que no se puede generar dinero de la nada; es decir, no es posible tener utilidades sin invertir un solo centavo. Este principio es fundamental en el desarrollo de los modelos (en tiempo discreto y continuo) para valuar una opción call europea.

Método de Replicar la Opción

Si X es el precio strike y T la fecha de vencimiento de la opción, entonces el método de la réplica consiste en

$$C(T) = xS(T) + yA(T) = f(S(T)) = (S(T) - X)^{+}. \tag{1.2}$$

En otras palabras, el precio de la opción llagada la fecha de vencimiento T debe ser igual al valor del portafolio en esa fecha. Esto representa el costo de haber replicado el activo derivado a partir de los activos S y A.

Con todo lo anterior, ya se puede empezar con el desarrollo del primer modelo.

1.4.3

Desarrollo del Primer Modelo

Se partirá de los supuestos enunciados antes, a saber que $A(0)$, $A(1) = A(0)(1 + r)$, y $S(0)$ son conocidos para el inversionista, y que para algún valor $p \in (0, 1)$ se tiene

$$S(1) \quad = \quad \begin{cases} S^u = S(0)(1+u) & \text{con probabilidad} \quad p, \\ \\ S^d = S(0)(1+d) & \text{con probabilidad} \quad 1-p, \end{cases}$$

con $-1 < d < r < u$. Note que si no se impone la condición $-1 < d < r < u$, entonces se puede generar oportunidad de arbitraje [9] , página 81.

Partiendo de las ecuaciones (1.1) y (1.2), se tiene

$$\begin{aligned} xS^u + yA(0)(1+r) &= f(S^u), \\ xS^d + yA(0)(1+r) &= f(S^d). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la valuación de la opción se reduce a resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, y al encontrar la solución x y y, se podrá conocer la cantidad $C(0)$, el precio justo que se debe pagar por el contrato.

Al resolver para x y y resulta

$$x \quad = \quad \frac{f(S^u) - f(S^d)}{S^u - S^d}, \quad y \quad = \quad \frac{(1+u)f(S^d) - (1+d)f(S^u)}{A(0)(u-d)(1+r)},$$

de donde

$$\begin{aligned} C(0) &= xS(0) + yA(0) \\ &= \frac{f(S^u)(r-d) + f(S^d)(u-r)}{(u-d)(1+r)}, \end{aligned}$$

que al separar en dos términos resulta

$$C(0) \quad = \quad \left(\frac{r-d}{u-d}\right)\left(f(S^u)(1+r)^{-1}\right) + \left(\frac{u-r}{u-d}\right)\left(f(S^d)(1+r)^{-1}\right). \tag{1.3}$$

Definición 1. *El número* $p^* = \dfrac{r-d}{u-d}$, *que cumple* $0 < p^* < 1$, *se usa para dar una nueva medida de probabilidad llamada la* ***probabilidad libre de riesgo****.*

Así, con esta notación (1.3) y escribiendo $q^* = 1 - p^*$ se tiene

$$\begin{aligned} C(0) &= p^*\left(f(S^u)(1+r)^{-1}\right) + q^*\left(f(S^d)(1+r)^{-1}\right) \\ &= E_*\left[(1+r)^{-1}f\left(S(1)\right)\right], \end{aligned}$$

donde $f(S(1))$ representa la función de pago (1.1), y E_* denota el valor esperado con respecto a la medida p^*.

De esta forma, el precio a pagar por la opción es el valor esperado (con respecto a p^*) del valor presente de la función de pago.

Observaciones:

- En las líneas previas se resolvió un sistema de 2 por 2. Si se hubiese supuesto que el activo S puede tomar tres valores distintos (o más) resultarían tres (o más) ecuaciones para dos incógnitas, lo que en general produce un sistema inconsistente. En ese caso se dice que el mercado es *incompleto*, y la opción no se puede replicar.

- El razonamiento realizado se puede adaptar a cualquier función $f(S(T))$, y por lo tanto serviría para valuar otros tipo de opciones.

1.4.4

Ilustración de la Valuación

A continuación se presentan algunos resultados del precio justo que se debe pagar por una opción call europea que involucra como activo subyacente a las acciones de una cierta compañía que cotiza en la Bolsa Valores. Suponga que el precio de la acción al tiempo $t = 0$ es de \$15 y la fecha de vencimiento es de un año ($T = 1$).

Ejemplo 1. *Suponga que* $u = 0.25$, $d = -0.15$, $r = 0.20$ *y* $X = \$16$ *(Figura 1.2). Encontrar el precio justo de la opción construida con estas condiciones.*

Solución

Se tiene

$$C(1) = \begin{cases} (18.75 - 16)^+ = 2.75, & \textit{con probabilidad} \quad 0.875 \\ \\ (12.75 - 16)^+ = 0, & \textit{con probabilidad} \quad 0.125 \end{cases}$$

Entonces el precio justo que debe pagar por la opción call europea es

$$\begin{aligned} C(0) &= (1 + .2)^{-1}\big[(.875)(2.75) + (.125)(0)\big] \\ &= 2.005, \end{aligned}$$

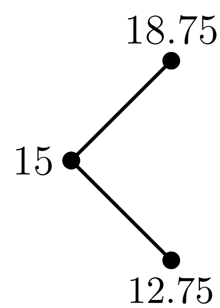

Figura 1.2: Posible comportamiento del precio de una acción.

es decir,el precio justo a pagar es de \$2.005.

Ejemplo 2. *Con los datos del ejemplo anterior, pero ahora con* $\mathsf{X} = \$17$.

Solución

Ahora se tiene

$$\mathsf{C}(1) = \begin{cases} (18.75 - 17)^{+} = 1.75, & \textit{con probabilidad} \quad 0.875 \\ \\ (12.75 - 17)^{+} = 0, & \textit{con probabilidad} \quad 0.125 \end{cases}$$

De modo que el precio justo que se debe de pagar por la opción call europea es

$$\begin{aligned} \mathsf{C}(0) &= (1 + .2)^{-1}\big[(.875)(1.75) + (.125)(0)\big] \\ &= 1.2760, \end{aligned}$$

es decir, el precio justo a pagar es de \$1.2760.

Ejemplo 3. *Haciendo nuevamente el ejemplo 1, pero ahora con* $\mathsf{X} = \$18$.

Solución

En este caso

$$\mathsf{C}(1) = \begin{cases} (18.75 - 18)^{+} = 0.75, & \textit{con probabilidad} \quad 0.875 \\ \\ (12.75 - 18)^{+} = 0, & \textit{con probabilidad} \quad 0.125 \end{cases}$$

Y resulta entonces que el precio justo que se debe de pagar por la opción call europea será

$$\begin{aligned} \mathsf{C}(0) &= (1+.2)^{-1}\big[(.875)(0.75)+(.125)(0)\big] \\ &= 0.5468, \end{aligned}$$

es decir, el precio justo a pagar es de $0.468*.*

Observación:

El propósito de haber repetido casi los mismos cálculos en los ejemplos previos es mostrar que uno de los parámetros que se puede manipular en una opción es el precio strike, ya que lo determina el poseedor de la opción. Nótese que al aumentar el precio strike, el precio de la opción disminuye. Este resultado se analizará con más detalle en el Capítulo 4.

1.4.5

Modelo Binomial de T *Pasos*

Esta sección se dedica a probar un resultado un poco más general que el descrito en la sección 1.4.3 correspondiente al caso en que T consta de más de 2 periodos (es decir, de más de un paso).

Teorema 1. *El valor de la opción call europea con función de pago* $\mathsf{f}(\mathsf{S}(\mathsf{T}))$ *en el modelo binomial de* T *pasos, bajo la probabilidad libre de riesgo* p^* *es*

$$\mathsf{C}(0) \quad = \quad \mathsf{E}_*\big[(1+\mathsf{r})^{-\mathsf{T}}\mathsf{f}(\mathsf{S}(\mathsf{T}))\big].$$

donde E_* *es el valor esperado con respecto a la medida de probabilidad binomial con parámetros* T *y* p^**.*

Demostración

Se procederá por inducción sobre la fecha de vencimiento, o por el número de pasos. El caso $\mathsf{T} = 1$ fue resuelto anteriormente. El caso $\mathsf{T} = 2$ se hará para poder apreciar el caso general. En este caso, el precio de la acción (Figura 1.3) está dado por

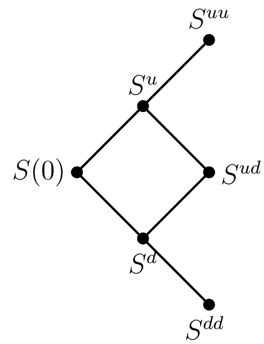

Figura 1.3: Árbol binomial del precio de una acción para $T = 2$.

$$S(2) = \begin{cases} S^{uu} = S(0)(1+u)^2, & \text{con probabilidad} \quad p^2, \\ S^{ud} = S(0)(1+u)(1+d) & \text{con probabilidad} \quad 2p(1-p), \\ S^{dd} = S(0)(1+d)^2 & \text{con probabilidad} \quad (1-p)^2, \end{cases}$$

Se tiene por el caso $T = 1$ que el valor de la opción al tiempo $t = 1$ está dado por

$$C(1) = \begin{cases} \frac{1}{1+r}\left[p^* f\left(S(0)(1+u)^2\right) + q^* f\left(S(0)(1+u)(1+d)\right)\right] & \text{con prob.} \quad p, \\ \frac{1}{1+r}\left[p^* f\left(S(0)(1+u)(1+d)\right) + q^* f\left(S(0)(1+d)^2\right)\right] & \text{con prob.} \quad 1-p. \end{cases}$$

Para simplificar las cosas, es conveniente ahora definir

$$I(z) = \frac{1}{1+r}\left[p^* f\left(z(1+u)\right) + q^* f(z(1+d))\right],$$

para obtener la siguiente expresión

$$C(1) = I\left(S(1)\right).$$

También como consecuencia del caso $T = 1$ y usando esta notación es posible escribir

$$C(0) = E_*[(1+r)^{-1} I(S(1))],$$

donde E_* representa el valor esperado con respecto a p^*.

Sustituyendo y haciendo un poco de manipulación algebraica, se llega a lo siguiente

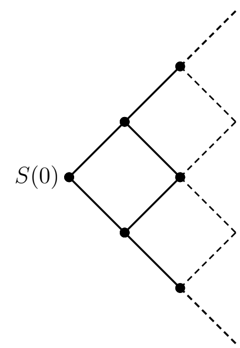

Figura 1.4: Árbol binomial del precio de una acción para T “grande”.

$$\begin{aligned}
C(0) &= \frac{1}{(1+r)^2}\Big[p^*\left\{p^* f\left(S(0)(1+u)^2\right) + q^* f\left(S(0)(1+u)(1+d)\right)\right\} \\
&+ q^*\left\{p^* f\left(S(0)(1+u)(1+d)\right) + q^* f\left(S(0)(1+d)^2\right)\right\}\Big] \\
&= \frac{1}{(1+r)^2}\Big[(p^*)^2 f\left(S(0)(1+u)^2\right) + 2p^*q^* f\left(S(0)(1+u)(1+d)\right) \\
&+ (q^*)^2 f\left(S(0)(1+d)^2\right)\Big],
\end{aligned}$$

lo cual se puede reescribir de manera concisa como

$$C(0) = E_*\left[(1+r)^{-2} f(S(2))\right]$$

donde ahora E_* denota el valor esperado calculado con respecto a la medida de probabilidad binomial con parámetros 2 y p^*, y esto prueba la afirmación para $T = 2$.

Suponga ahora que se cumple la afirmación del teorema para el modelo binomial de $T - 1$ pasos con $T > 2$ (Figura 1.4). Para probar que es cierto para el modelo binomial de T pasos, sea

$$I(z) = (1+r)^{-1}\left[p^* f\left(z(1+u)\right) + q^* f\left(z(1+d)\right)\right].$$

Entonces la hipótesis de inducción se puede escribir como

$$C(0) = E_*\left[(1+r)^{-(T-1)} I\left(S(T-1)\right)\right], \tag{1.4}$$

en este caso, E_* denota el valor esperado calculado con respecto a la medida de probabilidad binomial con parámetros $T - 1$ y p^*. Partiendo de la ecuación (1.4) y calculando la esperanza, resulta

$$\begin{aligned}C(0) &= (1+r)^{-T}\left[p^*\left\{\sum_{n=0}^{T-1}\binom{T-1}{n}(p^*)^n(q^*)^{T-n-1}f\left(S(0)(1+u)^{n+1}(1+d)^{T-n-1}\right)\right\}\right.\\&\left.+q^*\left\{\sum_{n=0}^{T-1}\binom{T-1}{n}(p^*)^n(q^*)^{T-n-1}f\left(S(0)(1+u)^n(1+d)^{T-n}\right)\right\}\right],\end{aligned}$$

y metiendo a p^* y q^*dentro de la suma resulta

$$\begin{aligned}C(0) &= (1+r)^{-T}\left[\sum_{n=0}^{T-1}\binom{T-1}{n}(p^*)^{n+1}(q^*)^{T-n-1}f\left(S(0)(1+u)^{n+1}(1+d)^{T-n-1}\right)\right.\\&\left.+\sum_{n=0}^{T-1}\binom{T-1}{n}(p^*)^n(q^*)^{T-n}f\left(S(0)(1+u)^n(1+d)^{T-n}\right)\right].\end{aligned}$$

Ahora, tomando el último término de la primera suma y el primer término de la segunda suma, se tiene

$$\begin{aligned}C(0) &= (1+r)^{-T}\left[(p^*)^Tf\left(S(0)(1+u)^T\right)+(q^*)^Tf\left(S(0)(1+d)^T\right)\right.\\&+\sum_{n=0}^{T-2}\binom{T-1}{n}(p^*)^{n+1}(q^*)^{T-n-1}f\left(S(0)(1+u)^{n+1}(1+d)^{T-n-1}\right)\\&\left.+\sum_{n=1}^{T-1}\binom{T-1}{n}(p^*)^n(q^*)^{T-n}f\left(S(0)(1+u)^n(1+d)^{T-n}\right)\right],\end{aligned}$$

que al simplificar, cambiando los subíndices de la primera suma y factorizar resulta

$$\begin{aligned}C(0) &= (1+r)^{-T}\left[(p^*)^Tf\left(S(0)(1+u)^T\right)+(q^*)^Tf\left(S(0)(1+d)^T\right)\right.\\&\left.+\sum_{n=1}^{T-1}\left[\binom{T-1}{n}+\binom{T-1}{n-1}\right](p^*)^n(q^*)^{T-n}f\left(S(0)(1+u)^n(1+d)^{T-n}\right)\right].\end{aligned}$$

Empleando la identidad de Pascal se obtiene

$$C(0) = (1+r)^{-T}\sum_{n=0}^{T}\binom{T}{n}(p^*)^n(q^*)^{T-n}f(S(0)(1+u)^n(1+d)^{T-n}), \tag{1.5}$$

o equivalentemente

$$C(0) \;=\; E_*[(1+r)^{-T} f(S(T))],$$

lo cual concluye la demostración. $\square$

Observaciones:

❶ Un hecho interesante es que el precio de la opción no depende de la probabilidad p, sino de la probabilidad libre de riesgo p^*, que a su vez depende de la tasa de interés con la que el bono evoluciona y también de las tasas con el que el precio de la acción sube o baja.

❷ $S(T) = S(0)\,(1+u)^k\,(1+d)^{T-k}$ con probabilidad $\binom{T}{k} p^k (1-p)^k$.

1.4.6

Propiedades de la Probabilidad Libre de Riesgo

Se ha establecido antes que $K(t)$ representa la tasa de utilidad (página 24) en el período de tiempo $[t-1, t]$, y está dada por

$$K(t) \;=\; \begin{cases} u & \text{con probabilidad} \quad p, \\ \\ d & \text{con probabilidad} \quad 1-p. \end{cases} \tag{1.6}$$

Así que como $S(t)$ es el precio de la acción al tiempo $t = 0, 1, \dots$ se tiene que

$$S(t) = S(t-1)(1+K(t)).$$

Y se sigue que $S(t) > 0$ si $S(0) > 0$, porque se tiene la restricción $-1 < d < r < u$. Note que

$$\begin{aligned} S(t) &= (1+K(t))S(t-1) \\ &= (1+K(t))(1+K(t-1))S(t-2) \\ &\vdots \;\; \dots \\ &= (1+K(t))\cdots(1+K(1))S(0), \end{aligned}$$

lo cual se puede escribir como

$$S(t) \;=\; (1+K(i))^t S(0).$$

Es posible calcular $E[S(t)]$ usando el supuesto de que las $K(i)$´s son independiente e idénticamente distribuidas, de donde resulta

$$\begin{aligned} E[S(t)] &= E\left[(1+K(t))\cdots(1+K(1))S(0)\right] \\ &= E\left[(1+K(t))\right]\cdots E\left[(1+K(1))\right]S(0) \\ &= (1+E[K(t)])\cdots(1+E[K(1)])S(0) \\ &= (1+E[K(i)])^t S(0). \end{aligned}$$

Ahora, por la definición de $K(t)$, $E[K(t)] = pu + (1-p)d$ para toda $t = 1, 2, \ldots, T$, entonces

$$E[S(t)] = (1 + pu + (1-p)d)^t\, S(0). \tag{1.7}$$

La expresión $S(0)\,(1+pu+(1-p)d)^t$ recuerda a la fórmula para obtener el valor de un activo libre de riesgo, de modo que si fuera $E[K(t)] = r$ para toda $t = 1, 2, \ldots, T$, entonces, la expresión (1.7) estaría en la situación libre de riesgo, pero esto equivale a pedir

$$pu + (1-p)d \;=\; r\,. \tag{1.8}$$

El valor de p que resuelve (1.8) está dado por $p^* = \dfrac{r-d}{u-d}$, que se ha llamado probabilidad libre de riesgo (página 27), que cumple $0 < p^* < 1$ si y sólo si $d < r < u$.

Se acostumbra denotar por $E_*[S(t)]$ a la esperanza de $S(t)$ con respecto a la probabilidad libre de riesgo p^*, o *esperanza libre de riesgo*; esto es

$$E_*[S(t)] = (1 + E_*[K(1)])^t S(0) = (1+r)^t S(0). \tag{1.9}$$

La expresión (1.9) se obtiene de (1.7) y la igualdad $E_*[K(1)] = r$. A continuación se presentarán algunos ejemplos, pero ahora condicionando el valor del activo subyacente a un estado anterior.

Ejemplo 4. *Suponga que* $u = .2$, $d = -.1$, $r = .1$ *y* $S(0) = \$100$ *(Figura 2.13), y además se sabe que en el primer período el precio de la acción subió a* \$120. *¿Cuál es el valor esperado bajo la probabilidad libre de riesgo de* $S(2)$*?*

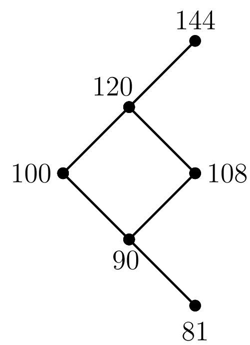

Figura 1.5: Comportamiento del precio de una acción cuando $u = .2$, $d = -.1$, $r = .1$ y $S(0) = 100$.

Solución

Se tiene que $p^* = \dfrac{r-d}{u-d} = \dfrac{2}{3}$, *entonces para obtener el resultado sólo hay que calcular la siguiente esperanza condicional:*

$$
\begin{aligned}
E_*[S(2)|S(1) = 120] &= \frac{2}{3}S(0)(1+u) + \frac{1}{3}S(0)(1+d) \\
&= \frac{2}{3}(144) + \frac{1}{3}(108) = 132 \\
&= 120(1.1).
\end{aligned}
$$

Ejemplo 5. *Con los mismos datos del ejemplo anterior, pero si ahora se sabe que el precio de la acción bajó a* \$90. *¿Cuál debe ser el valor esperado bajo la probabilidad libre de riesgo de* $S(2)$*?*

Solución

Como en el ejemplo anterior, basta calcular la siguiente esperanza condicionada

$$\begin{aligned} E_*[S(2)|S(1)=90] &= \frac{2}{3}S(0)(1+u)+\frac{1}{3}S(0)(1+d) \\ &= \frac{2}{3}(108)+\frac{1}{3}(81)=99 \\ &= 90(1.1). \end{aligned}$$

El propósito de haber presentado estos ejemplos es para dar a notar que

$$E_*[S(2)|S(1)] = S(1)(1+r)\,.$$

Se puede precisar mejor la idea de los ejemplos anteriores con el siguiente teorema:

Teorema 2. *Si el precio* $S(t)$ *de una opción en el modelo binomial se conoce al tiempo* t*, entonces*

$$E_*[S(t+1)|S(t)] = S(t)(1+r),$$

donde r *es la tasa libre de riesgo.*

Demostración

Puesto que $S(t+1)$ toma el valor $S(t)(1+u)$ con probabilidad p^* y $S(t)(1+d)$ con probabilidad $q^* = 1-p^*$, entonces resulta

$$\begin{aligned} E_*[S(t+1)|S(t)] &= p^*S(t)(1+u)+q^*S(t)(1+d) \\ &= S(t)\left(p^*(1+u)+q^*(1+d)\right) \\ &= S(t)\left(1+up^*+q^*d\right) \\ &= S(t)(1+r). \quad \square \end{aligned}$$

1.4.7

La Fórmula de Cox-Ross-Rubinstein

Como se expuso en la sección 1.4.5, el precio de la opción call europea viene dado por

$$C(0) \;=\; (1+r)^{-T}\sum_{n=0}^{N}\binom{T}{n}(p^*)^n(q^*)^{T-n}f(S(0)(1+u)^n(1+d)^{T-n}), \qquad (1.10)$$

la cual se obtuvo en (1.5). Además la función de pago de la opción call europea con precio strike X está dada por

$$f\left(S(T)\right)=\begin{cases} S(T)-X & \text{si} \quad S(T)>X \\ 0 & \text{si} \quad S(T)\leqslant X \end{cases} \;=\; (S(T)-X)^+,$$

con la cual se reducen términos de la expresión (1.10). Supóngase que $m \leqslant T$ es el primer tiempo tal que

$$S(0)(1+u)^m(1+d)^{T-m} > X,$$

entonces, la expresión (1.10) se convierte en

$$C(0) \;=\; (1+r)^{-T}\sum_{k=m}^{T}\binom{T}{k}(p^*)^n(q^*)^{T-n}(S(0)(1+u)^n(1+d)^{T-n}-X), \quad (1.11)$$

donde los primeros términos se han omitido porque para ellos

$$S(0)(1+u)^m(1+d)^{T-m} < X.$$

La ecuación (1.11) se puede reescribir en la forma $C(0) = xS(0) + yA(0)$, donde

$$\begin{aligned} x &= (1+r)^{-T}\sum_{k=m}^{T}\binom{T}{k}(p^*)^k(q^*)^{T-k}(1+u)^k(1+d)^{T-k}, \\ y &= -X(1+r)^{-T}\sum_{k=m}^{T}\binom{T}{k}(p^*)^k(q^*)^{T-k}. \end{aligned}$$

Además se puede reescribir a x de la siguiente forma

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=m}^{T}\binom{T}{k}\left[p^*\frac{1+u}{1+r}\right]^k\left[q^*\frac{1+d}{1+r}\right]^{T-k}, \\ &= \sum_{k=m}^{T}\binom{T}{k}(\widehat{p})^k(1-\widehat{p})^{T-k}, \end{aligned}$$

donde
$$\widehat{p} = p^* \frac{1+u}{1+r}.$$

Si se denota por $\mathbf{B}(m, T, p)$ como la distribución binomial acumulada con parámetros T y p, evaluada en m con $0 \leqslant m \leqslant T$ como
$$\mathbf{B}(m, T, p) = \sum_{k=0}^{m} \binom{T}{k} p^k (1-p)^{T-k},$$
entonces
$$C(0) = S(0)\left[1 - \mathbf{B}(m-1, T, \widehat{p})\right] - (1+r)^{-T} X \left[1 - \mathbf{B}(m-1, T, p^*)\right].$$

Esta formulación se hace de manera formal en el siguiente teorema, del cual se ha presentado la prueba.

Teorema 3 (Cox-Ross-Rubinstein). *El precio de una opción call europea para el modelo binomial con precio strike X a ser ejercido al tiempo T, está dado por*
$$C(0) = S(0)\left[1 - \boldsymbol{B}(m-1, T, \widehat{p})\right] - (1+r)^{-T} X \left[1 - \boldsymbol{B}(m-1, T, p^*)\right].$$

Ejemplo 6. *Suponga que $S(0) = \$50$, $r = .05$, $u = .3$ y $d = -.01$. Encontrar el precio de la opción call europea con precio strike $X = \$60$ y fecha de vencimiento $T = 3$.*

Solución

Se tiene que $p^* = .375$, $q^* = .625$, $\widehat{p} = .464285$ y $1 - p = .535715$. Por otra parte, se tiene que calcular m tal que $S(0)(1+u)^m(1+d)^{3-m} > X$. El m que cumple es cuando $m = 2$. Entonces el precio de la opción está dado por

$$\begin{aligned} C(0) &= 50\left[1 - (1 - (.464285)^3) - 3(.464285)(1 - .464285)^2\right] \\ &\quad - \frac{60}{(1.05)^3}\left[1 - (.375)^3 - 3(.375)(1 - .375)^2\right] \\ &= 22.3259 - 16.3994 = 5.9265. \end{aligned}$$

Es decir, el precio justo a pagar por esta opción call europea es $\$5.9265$.

CAPÍTULO 2

Fundamentos Matemáticos

En este capítulo se presentan los fundamentos matemáticos en que se basa el desarrollo del modelo en tiempo continuo utilizado para valuar una opción call europea, la fórmula de Black-Scholes. Esta presentación introduce las definiciones y notación necesarias para poder continuar, evitando en lo posible entrar en detalles técnicos que podrían alargar demasiado esta exposición. Si se quiere ver más de estos detalles se le recomienda que consulte [34], [17], [8] y [31]. La primera de estas referencias es la que se sigue más de cerca en este trabajo, sobre todo en terminología y notación.

2.1

Conceptos Básicos de Probabilidad

Para fundamentar apropiadamente el desarrollo de la fórmula de Black-Scholes es preciso establecer algunos aspectos de la teoría de probabilidad. Si bien se podría considerar a ésta como una parte de la teoría de la medida, en realidad su significado y resultados la distinguen por completo de la última.

Para comenzar, se dice que un experimento $\mathcal{E}$ es *aleatorio* si presenta las siguientes propiedades:

❶ $\mathcal{E}$ tiene al menos dos posibles resultados distintos;

❷ Es posible determinar el conjunto Ω de todos los posibles resultados del experimento $\mathcal{E}$ aún antes de realizarlo; y

❸ $\mathcal{E}$ puede repetirse esencialmente bajo las mismas condiciones.

Al conjunto Ω se le llama el espacio muestral asociado al experimento aleatorio $\mathcal{E}$. Por ejemplo, si $\mathcal{E}$ consiste en lanzar dos monedas al aire, y en cada lanzamiento se puede obtener sol (S) o águila (A), entonces

$$\Omega = \{SS, AA, SA, AS\}.$$

Un evento E es un subconjunto *apropiado* de Ω. En el ejemplo, el evento E de que las dos monedas muestren sol, se describe en este caso como $E = \{SS\}$.

En experimentos para los que el espacio muestral Ω es finito o numerable se podría considerar como evento a cualquiera de sus subconjuntos y esto no complicaría demasiado la teoría. Sin embargo, cuando Ω no es numerable las complicaciones que surgirían hacen necesario tomar las cosas con más precaución. En la teoría de probabilidad se sigue la definición dada axiomáticamente por Kolmogorov, basada en la teoría de la medida, y se insiste en que la familia de todos los eventos forme una σ-álgebra $\mathcal{A}$ (esto es, una familia de subconjuntos que contiene al vacío y Ω y es cerrada bajo complementos y uniones numerables), en la cual se define una medida de probabilidad $\mathbb{P}$. Esta medida cumple todas las condiciones que se exigen a una medida real y además que la medida del espacio Ω sea 1. Para futura referencia, se enuncia a continuación la definición

Definición 2. *Un* ***espacio de probabilidad*** *es una terna* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*, que consta de un espacio muestral* Ω *asociado a un experimento aleatorio* $\mathcal{E}$*, una* σ*-álgebra* $\mathcal{A}$ *de todos los posibles eventos de* $\mathcal{E}$*, y una medida* $\mathbb{P} : \Omega \to [0,1]$ *en* $(\Omega, \mathcal{A})$*. Es decir, se cumple:*

❶ $\mathbb{P}(E) \geqslant 0$ *para todo* $E \in \mathcal{A}$*.*

❷ $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$*.*

❸ *Si* $\{E_n\}$ *es una colección, a lo más numerable, de conjuntos en* $\mathcal{A}$ *disjuntos a pares, es decir, que* $E_i \cap E_j = \emptyset$ *para todo* $i \neq j$*, entonces* $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i)$*.*

Lo que resta del capítulo la terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ representa un espacio de probabilidad.

Dados dos espacios medibles $(\Omega, \mathcal{A})$ y $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}})$, una función $X : \Omega \to \tilde{\Omega}$ se dice que es *medible* si para todo $A \in \tilde{\mathcal{A}}$ se tiene $X^{-1}(A) \in \mathcal{A}$, es decir, la imagen inversa de conjuntos medibles es medible.

Si se considera una función X definida en un espacio de probabilidad y con valores en $\tilde{\Omega} = \mathbb{R}$ con la σ-álgebra de Borel (ésta es la σ-álgebra generada por los intervalos abiertos), denotada $\tilde{\mathcal{A}} = \mathbf{B}(\mathbb{R})$, entonces X se llama *variable aleatoria (real)* (así como se pueden considerar variables aleatorias vectoriales y complejas, en este trabajo sólo se restringe la atención a variables aleatorias reales). Esto se cumple si y sólo si $X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{A}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. A veces se dice para enfatizar que la variable aleatoria X es Borel-medible.

Una variable aleatoria se llama discreta si su imagen es un subconjunto discreto en $\mathbb{R}$, y continua si su imagen es un subconjunto continuo en $\mathbb{R}$.

Para una variable aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$, su función de distribución se define como

$$F(x) = \mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega \middle| X(\omega) \leqslant x\right\} = \begin{cases} \sum\limits_{x_i \leqslant x} \mathbb{P}(X = x_i) & \text{si } X \text{ es discreta,} \\ \int\limits_{-\infty}^{x} d\mathbb{P}(t) & \text{si } X \text{ es continua.} \end{cases}$$

Donde se supondrá que se puede expresar $d\mathbb{P}(t) = f(t)dt$ para alguna función, llamada *función de densidad de probabilidad*, no negativa e integrable (con respecto a la medida de Borel) tal que $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$. Para lo que resta del capítulo sólo se consideran variables aleatorias continuas.

La función de distribución es no decreciente, continua por la derecha y satisface $\mathbb{P}\left(\{a < x < b\}\right) = F(b) - F(a)$, además cuando $x \to \pm\infty$ se tiene $F(-\infty) = 0$ y $F(\infty) = 1$ respectivamente.

Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria en el espacio de probabilidad. El *valor esperado* (media o esperanza) y la *varianza* se definen respectivamente como

$$E[X] = \int\limits_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}} x dF(x)$$

y

$$Var[X] = E\left[X^2\right] - \left(E[X]\right)^2.$$

Si X es una variable aleatoria continua y g una función Borel-medible y acotada, entonces

$$E[g(X)] = \int\limits_{\Omega} g(X(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x) dF(x). \tag{2.1}$$

Cabe mencionar que si las variables aleatorias X e Y son independientes entonces cumplen que $E[XY] = E[X]E[Y]$.

Una variable aleatoria de interés en este trabajo es la *normal*, si X tiene distribución normal con media μ y varianza σ^2, entonces su función de densidad está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

y ésta es *normal estándar* si $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$.

Por otra parte, la fórmula (2.1) permite relacionar algunas afirmaciones acerca de probabilidades con la esperanza de ciertas variables aleatorias. Por ejemplo, si $A \subset \Omega$ se define la *función indicadora* de A, denotada por 1_A, como

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A; \\ \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

En este caso,

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\left[1_A\right] &= \int\limits_{\Omega} 1_A(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \int\limits_{A} 1_A(\omega) d\mathbb{P}(\omega) + \int\limits_{\Omega \setminus A} 1_A(\omega) d\mathbb{P}(\omega), \end{aligned}$$

donde $\int\limits_{\Omega \setminus A} 1_A(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = 0$, lo cual implica

$$\mathsf{E}\left[1_A\right] = \mathbb{P}(A). \tag{2.2}$$

Una de las características más importantes que distinguen a la probabilidad de la teoría de medida es la *probabilidad condicional* que ahora se considerará. La situación es que se quiere calcular la probabilidad de un evento A dada una información de la ocurrencia de un evento B, suponiendo que los eventos están relacionados. Si A y B son eventos en $\mathcal{A}$ con $\mathbb{P}(B) > 0$, se define la probabilidad condicional de A dado B, mediante

$$\mathbb{P}\left(A|B\right) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Así como se definió la probabilidad condicional, se puede definir el valor esperado condicional como: si X es una variable aleatoria definida en el espacio de probabilidad, y B un evento definido en $\mathcal{A}$, se define la esperanza condicional de X con respecto a B o dado B como

$$\mathsf{E}\left[X|B\right] = \frac{\mathsf{E}\left[X \cdot 1_B\right]}{\mathbb{P}(B)}.$$

Es de notarse que se cumple

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\left[1_A|B\right] &= \frac{\mathsf{E}[1_A \cdot 1_B]}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{\mathsf{E}[1_{A\cap B}]}{\mathbb{P}(B)}, \end{aligned}$$

y por (2.2) se tiene $\mathsf{E}\left[1_A|B\right] = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A|B)$

2.2

Convergencia en Espacios de Probabilidad

En la presente sección se presenta algunos tipos de convergencia para una sucesión de variables aleatorias.

Convergencia en Probabilidad

Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias, definidas en $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, y X otra variable aleatoria definida en el mismo espacio, se dice que la sucesión $\{X_n\}$ converge a la variable aleatoria X si para todo $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega \middle| |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\right\} \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

La convergencia en probabilidad suele denotarse como $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Un tipo de convergencia relacionado es la convergencia con probabilidad 1 que se define diciendo que la sucesión $\{X_n\}$ converge con probabilidad 1 o casi en todas partes (c.t.p.) si

$$\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega \middle| X_n(\omega) \to X(\omega) \quad \text{cuando} \quad n \to \infty\right\} = 1,$$

lo cual puede expresarse como $X_n \xrightarrow{\text{c.t.p.}} X$ o, más explícitamente, “$X_n \to X$ con probabilidad 1”. Es claro que si una sucesión converge con probabilidad 1 entonces también converge en probabilidad.

Convergencia en Distribución

Sea $\{F_n\}$ una sucesión de funciones de distribución (es decir satisfacen las propiedades enunciadas en la página 43). Si existe una función de distribución F tal que, cuando $n \to \infty$, $F_n(x) \to F(x)$ en cada punto donde F es continua, se dice que la sucesión $\{F_n\}$ converge débilmente a F, y se expresa como $F_n \xrightarrow{w} F$.

Por otra parte, si $\{X_n\}$ es una sucesión de variables aleatorias definidas en $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ y $\{F_n\}$ es su correspondiente sucesión de funciones de distribución, se dice que $\{X_n\}$ converge en distribución a una variable aleatoria X con función de distribución F si $F_n(x) \xrightarrow{w} F(x)$, lo cual se puede expresar mediante $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$.

Este tipo de convergencia es más débil que el anterior, en el sentido de sucesiones que convergen en distribución no necesariamente convergen en probabilidad.

Convergencia en Media Cuadrática

Este tipo de convergencia es el que se utilizará más adelante en la sección 2.4.1 donde se discute la integral estocástica.

Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias definidas en $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, tales que $\mathsf{E}\,[\,|X_n|^2\,] < \infty$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Se dice que $\{X_n\}$ converge en media cuadrática (m.c.) a una variable aleatoria X si $\mathsf{E}\,[\,|X|^2\,] < \infty$ y

$$\mathsf{E}\left[\,|X_n - X|^2\,\right] \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty,$$

lo cual suele denotarse por $X_n \overset{m.c.}{\to} X$.

En el contexto del análisis, la teoría de la medida e integración a este tipo también se le conoce como convergencia en $\mathcal{L}^2$. La importancia de este tipo de convergencia radica en el hecho de que el espacio de las variables aleatorias se puede dotar de la norma $\|X\|^2 = \mathsf{E}\,[\,|X|^2\,]$, con lo cual este espacio se convierte en un espacio de Hilbert [3].

2.3

Conceptos Básicos de Procesos Estocásticos

Una idea intuitiva de proceso estocástico es un sistema que evoluciona de manera aleatoria en cada instante de tiempo. El carácter aleatorio del fenómeno se puede capturar a través de un espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$. En este contexto, un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias $\{X_t\}_{t \in I}$, donde I representa un intervalo (puede pensar como tiempo), además, cada variable aleatoria X_t está definida en el espacio de probabilidad para todo $t \in I$ y toma valores en $(\mathbb{R}, \mathbf{B}(\mathbb{R}))$. A continuación se enuncia de manera formal la definición de Proceso Estocástico.

Definición 3. *Sean $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad e $I = [0, \infty)$. Un proceso estocástico*[1] *es una función*

$$X : \Omega \text{ x } I \to \mathbb{R},$$

tal que para cada $t \in I$ la función

$$X_t(\cdot) \equiv X(\cdot, t) : \Omega \to \mathbb{R}$$

es una variable aleatoria que cumple $X_t^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{A}$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Por otra parte, si $\omega \in \Omega$ la función

$$X_\omega(\cdot) \equiv X(\omega, \cdot) : I \to \mathbb{R},$$

[1] En este trabajo I siempre se considera así por conveniencia, aunque un proceso estocástico puede tener otros conjuntos como tiempo, por ejemplo, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{R}$.

es una familia de trayectorias del proceso. Un proceso es continuo si cada trayectoria es continua para cada punto de I.

2.3.1

Movimiento Browniano

El presente apartado presenta un proceso estocástico muy importante, a saber, el *movimiento Browniano*. Este proceso, junto con una expresión determinista, permitirá modelar de forma más realista el precio del activo subyacente en el tiempo, como se verá con más detalle en el Capítulo 3, en la sección 3.3.

Primera Aproximación al Movimiento Browniano

Considere el experimento aleatorio $\mathcal{E}$ de lanzar una moneda al aire. Como se sabe, el espacio muestral Ω consta de dos posibles valores, sol (S) y águila (A), es decir, $\Omega = \{S, A\}$. Considere la σ-álgebra $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{S\}, \{A\}\}$, que es el conjunto potencia de Ω. Se define ahora una función $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ como sigue

$$\mathbb{P}(\{S\}) = \mathbb{P}(\{S\}) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

La terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ define un espacio de probabilidad asociado al experimento $\mathcal{E}$. Suponga ahora que se realizan n repeticiones del experimento bajo las mismas condiciones, pero ahora si el resultado cae águila se gana $\frac{1}{\sqrt{n}}$ y si cae sol se pierde la misma cantidad. Se define la variable aleatoria $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ que representa la ganancia (o pérdida) en el i-ésimo lanzamiento, es decir $X_i(\{A\}) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ y $X_i(\{S\}) = -\frac{1}{\sqrt{n}}$. De esta manera

$$\mathbb{P}(\{A\}) = \mathbb{P}\left(X_i = \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(\{S\}) = \mathbb{P}\left(X_i = -\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2}.$$

El resultado de cada repetición del experimento es independiente de los lanzamientos anteriores. En este caso, es fácil ver que $E[X_i] = 0$ y $Var[X_1] = E[X_i^2] = \dfrac{1}{n}$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Defínase ahora a S_n como la ganancia acumulada hasta el n-ésimo lanzamiento, es decir

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

con $S_0 = X_0 = 0$. Resulta entonces

$$E[S_n] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = 0$$

y

$$\mathsf{Var}[S_n] = \mathsf{E}\left[S_n^2\right] = \mathsf{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} X_iX_j\right] = \mathsf{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)\right] = 1.$$

Definición 4. *Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que X_i toma exactamente dos valores a y $-a$ con probabilidad p y $1-p$ respectivamente. Sea $w_n = X_1 + \cdots + X_n$ para $n \geqslant 1$ y $w_0 = 0$. A la sucesión $\{w_n\}_{n\geqslant 0}$ se le llama **caminata aleatoria**; ésta se denomina **simétrica** si $p = \frac{1}{2}$.*

Al ser w_n una caminata aleatoria simétrica se cumple

❶ $\mathsf{E}\left[w_n\right] = 0$,

❷ $\mathsf{Var}\left[w_n\right] = na^2$.

El experimento de lanzar una moneda al aire n veces se puede ver como una caminata aleatoria simétrica, porque la probabilidad de ganar y de perder es la misma y se van a sumar los resultados de las ganancias. Por otra parte, el resultado del n-ésimo lanzamiento, X_n, es independiente del resultado del lanzamiento anterior, X_{n-1}. Sin embargo, el resultado de la ganancia acumulada en el n-ésimo lanzamiento, S_n, sí depende de la ganancia acumulada en el lanzamiento anterior, S_{n-1}. En este caso, la esperanza condicional de S_n, dada la ganancia acumulada de los $n-1$ primeros lanzamientos, es

$$\mathsf{E}\left[S_n | S_0, \ldots, S_{n-1}\right] = \mathsf{E}\left[S_n | S_{n-1}\right], \tag{2.3}$$

esto significa que la ganancia acumulada en el lanzamiento n depende sólo del lanzamiento anterior y no de toda la historia, esta propiedad es llamada *propiedad de Markov* [28].

Por otro lado la esperanza anterior se puede calcular de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left[S_n | S_{n-1}\right] &= \mathsf{E}\left[S_{n-1} + X_n | S_{n-1}\right] \\ &= \mathsf{E}\left[S_{n-1} | S_{n-1}\right] + \mathsf{E}\left[X_n | S_{n-1}\right] \\ &= S_{n-1} + \mathsf{E}\left[X_n\right] = S_{n-1}.\end{aligned}$$

En otras palabras, el mejor pronóstico de S_n dada la información actual, es exactamente la información que se cuenta en el presente, esta propiedad es conocida como *martingala.*

Cuando se realizan n repeticiones de un mismo experimento, el tiempo surge de una manera natural, pues las repeticiones que se hacen están separadas forzosamente por intervalos de tiempo, no necesariamente de la misma longitud, aunque así lo supondremos en este trabajo por simplicidad, es decir, se incorporará el tiempo en una caminata aleatoria y las repeticiones se supondrán en intervalos de misma longitud.

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, el siguiente proceso estocástico se define para cada $n \in \mathbb{N}$: se supone que se llevan a cabo n repeticiones del lanzamiento de una moneda en un tiempo t, de tal manera que estos se realizan en intervalos iguales, es decir cada $\frac{t}{n}$ unidades de tiempo. El monto de la apuesta también es modificado, ahora es de $\sqrt{\frac{t}{n}}$. La ganancia acumulada en el primer, segundo y n-ésimo lanzamiento, respectivamente, se encuentran como

$$\begin{aligned} w_n\left(\frac{t}{n}\right) &= X_1, \\ w_n\left(\frac{2t}{n}\right) &= w_n\left(\frac{t}{n}\right) + X_1, \\ &\vdots \\ w_n(t) &= w_n\left(\frac{(n-1)t}{n}\right) + X_n. \end{aligned} \tag{2.4}$$

En general se satisfacen que $w_n\left(\frac{it}{n}\right) = S_i$, donde $S_i = X_0 + X_1 + \cdots + X_i$, y además que $w_n(0) = 0$ para toda n.

Observación

Considere el intervalo de tiempo $[0, t]$. La *variación cuadrática* de w_n se define como

$$\begin{aligned} v_n^2 &= \sum_{i=1}^{n} \left[w_n\left(\frac{it}{n}\right) - w_n\left(\frac{(i-1)t}{n}\right) \right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(S_i - S_{i-1}\right)^2. \end{aligned}$$

Se puede observar mediante un cálculo simple que $E\left[\left(S_i - S_{i-1}\right)^2\right] = E\left[X_i^2\right] = \frac{t}{n}$.

De lo anterior, $v^2 = E\left[v_n^2\right] = t$. Se puede concluir que la variación cuadrática de w_n y v^2 es igual al tiempo total.

Caminata Aleatoria en Tiempo Continuo y Movimiento Browniano

Un resultado importante en la teoría de probabilidad es el Teorema del Límite Central (TLC) que se enuncia a continuación (la demostración se puede encontrar en [10] página 259)

Teorema del Límite Central. *Sean* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media* μ *y varianza finita no cero* σ^2*. Sea* $S_n = X_1 + \ldots + X_n$*, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant x\right) = \Phi(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

donde $\Phi(x)$ *es la función de distribución acumulada de la variable aleatoria normal estándar.*

Se aplicará el Teorema del Límite Central a una caminata aleatoria discreta en un intervalo de tiempo $[0, t]$ a fin de obtener su versión continua. Dicha versión es el movimiento Browniano. Se tiene que

$$w_n(t) = \sqrt{t}\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} \xrightarrow{\mathcal{D}} W_t \sim N(0, t) \quad \text{cuando } n \to \infty,$$

en otras palabras, $w_n(t)$ converge en distribución a una variable aleatoria W_t con distribución normal con media cero y varianza t. Por otra parte, si $t_i = \frac{it}{n}$, $i = 1, \ldots, n$, es una partición del intervalo $[0, t]$ en subintervalos de misma longitud, entonces la variación cuadrática media de W_t satisface

$$\begin{aligned} v_t^2 &= E\left[\sum_{i=1}^{n} (W_t - W_{t-1})^2\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} E\left[(W_t - W_{t-1})^2\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = t. \end{aligned}$$

En otras palabras, la variación cuadrática media de W_t concuerda con la variación cuadrática media de su análogo discreto $w_n(t)$. A continuación se define de manera formal el movimiento Browniano.

Definición 5. *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad. El movimiento Browniano (estándar) es una función*

$$W : \Omega \text{ x } [0, \infty) \to \mathbb{R},$$

tal que para cada $t \geqslant 0$*,* $W_t : \Omega \to \mathbb{R}$ *cumple con los siguiente:*

❶ $W_0 = 0$*, con probabilidad* 1*, es decir* $\mathbb{P}\{\omega \in \Omega | W_t(\omega) = 0\} = 1$.

❷ *Si* $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n$*, entonces sus incrementos*

$$W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

son variables aleatorias independientes.

❸ *Si* $s \leqslant t$, *entonces* $W_t - W_s$ *es una variable aleatoria con distribución normal con media cero y varianza* $t - s$, *es decir*

$$W_t - W_s \sim N(0, t - s).$$

En particular, W_t *tiene distribución normal con media cero y varianza* t, *esto es*

$$W_t \sim N(0, t).$$

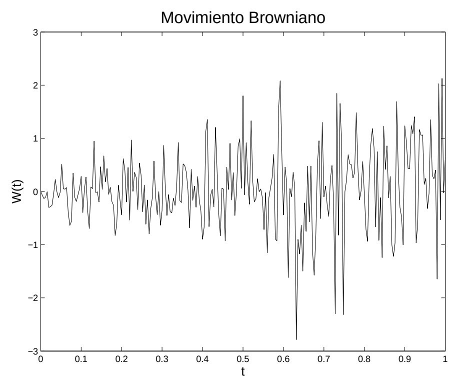

Figura 2.1: Posible Trayectoria del movimiento Browniano

En la Figura 2.1 se presenta una posible trayectoria de un movimiento Browniano. En este caso, el tiempo t corre en el eje horizontal y los posibles valores del movimiento Browniano son presentados en el eje vertical.

2.3.2

Concepto de Filtración

Cuando se trabaja con un procesos estocástico, si se quiere calcular la esperanza condicional de los valores futuros del proceso dada la información que se tiene disponible hasta un tiempo, entonces es necesario especificar de manera precisa que información se utiliza para estos cálculos. Esto se logra mediante un concepto llamado *filtración* que se define, para $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ como una familia creciente de σ-álgebras $\mathbb{A} = \{\mathcal{A}_t\}_{t \in I}$ con $\mathcal{A}_s \subset \mathcal{A}_t \subseteq \mathcal{A}$ para $s < t$.

Se puede pensar que una filtración es una estructura de información que se está actualizando constantemente, es decir, es una estructura de información dinámica. En otras palabras, $\mathcal{A}_t$ representa la información disponible que se tiene hasta el instante t. El hecho de que en la filtración la $\mathcal{A}_t$ esté aumentado con t quiere decir que hay más información conforme el tiempo transcurre y que la información pasada no se olvida, sino que se acumula.

Se puede relacionar un proceso con una filtración en el sentido de que la información que ella da es relevante para ese proceso. De la siguiente forma: si $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ es un proceso estocástico definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, se dice que este proceso es una *adaptación a la filtración* (o que está adaptado a ella) $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geqslant 0}$, si para cada $t \geqslant 0$, la función $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ satisface que

$$X_t^{-1}\left((-\infty, x]\right) \in \mathcal{A}_t,$$

para toda $x \in \mathbb{R}$.

Esto significa que el valor que tome X_t en el tiempo t depende sólo de la información disponible en ese instante.

2.3.3

Proceso de Wiener

Sea $\mathbb{A} = \{\mathcal{A}_t\}_{t\in I}$ una filtración. Un proceso estocástico $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ es un proceso de Wiener relativo a $\mathbb{A}$ si cumple con las siguientes condiciones:

❶ $W_0 = 0$ con probabilidad 1,

❷ W_t es continua en t,

❸ W_t es adaptado a la filtración $\mathbb{A}$,

❹ Si $0 \leqslant s < t$, el incremento $W_t - W_s$ es independiente de $\mathcal{A}_s$ y normalmente distribuido con media cero y varianza $t - s$.

Una diferencia entre el proceso de Wiener y el movimiento Browniano es que el primero considera una filtración $\mathbb{A}$ y el segundo no. En otras palabras, el movimiento Browniano es independiente del concepto de filtración. La segunda diferencia es la ausencia del concepto de incrementos independientes en el proceso de Wiener. Se puede demostrar que todo proceso de Wiener es un movimiento Browniano, esta demostración está fuera del alcance de este trabajo pero puede consultar [34] para dicha demostración.

2.3.4

Concepto de Martingala

Un concepto importante en la teoría de Valuación de Opciones es el concepto de martingala.

Definición 6. *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad equipado con una filtración* $\mathbb{A} = \{\mathcal{A}_t\}_{t\geqslant 0}$*, es decir, se considera el espacio* $(\Omega, \mathcal{A}, \{\mathcal{A}_t\}_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$*. Se dice que el proceso estocástico* $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ *es una martingala si cumple lo siguiente:*

❶ $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ *es un proceso adaptado a la filtración* $\mathbb{A}$*, es decir, para cada* $t \geqslant 0$*, la función* $M_t : \Omega \to \mathbb{R}$ *satisface que* $M_t^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{A}_t$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*;*

❷ $E[|M_t|] < \infty$ *para toda* $t \geqslant 0$*;*

❸ *Si* $s \leqslant t$*, entonces* $E[M_t|\mathcal{A}_s] = M_s$*.*

De acuerdo con la última condición, dada la información disponible hasta el tiempo s, denotado por $\mathcal{A}_s$, si $s < t$, el mejor pronóstico para M_t es justamente la información más reciente que se tiene, es decir M_s. Por otro lado, las variaciones futuras de una martingala son impredecibles dada la información $\mathcal{A}_s$, ya que

$$\begin{aligned} E[M_t - M_s|\mathcal{A}_s] &= E[M_t|\mathcal{A}_s] - E[M_s|\mathcal{A}_s] \\ &= M_s - M_s = 0. \end{aligned}$$

Observación:

El movimiento Browniano es una martingala. Para ver esto, sea $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ un movimiento Browniano definido sobre un espacio de probabilidad equipado con una filtración, $(\Omega, \mathcal{A}, \{\mathcal{A}_t\}_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$. La primera condición se cumple por definición, la segunda se sigue de

$$\begin{aligned} E[|W_t|] &= \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| \frac{1}{\sqrt{2t\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2t}} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2t\pi}} \int_{0}^{\infty} 2\omega e^{-\frac{\omega^2}{2t}} d\omega, \end{aligned}$$

haciendo $y = \omega^2$ resulta

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\left[|W_t|\right] &= \frac{1}{\sqrt{2t\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{y}{2t}} dy \\ &= \sqrt{\frac{2t}{\pi}} < \infty. \end{aligned}$$

Por último

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\left[W_t|\mathcal{A}_s\right] &= \mathsf{E}\left[W_t - W_s|\mathcal{A}_s\right] + \mathsf{E}\left[W_s|\mathcal{A}_s\right] \\ &= W_s, \end{aligned}$$

esto se cumple puesto que $\mathsf{E}\left[W_t - W_s|\mathcal{A}_s\right] = 0$, es decir $W_t - W_s$ es independiente de $\mathcal{A}_s$ y $W_t - W_s \sim \mathsf{N}(0, t-s)$.

Lo que demuestra que un movimiento Browniano es una martingala con respecto a la filtración $\mathbb{A} = \{\mathcal{A}_t\}_{t \geqslant 0}$.

2.3.5

Teorema de Girsanov

En esta subsección se expone, sin entrar a detalles técnicos, el teorema de Girsanov, que consiste básicamente en que dado un espacio de probabilidad donde está definido un movimiento Browniano con tendencia (es decir, la media, también conocida como *deriva* o *drift*, es diferente de cero), es posible transformarlo en un movimiento Browniano sin tendencia (es decir, el drift es igual a cero) definido en un espacio de probabilidad equivalente.

Cambio de variable

Para comenzar, sea W_T una variable aleatoria normal con media cero y varianza T definida en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, y considere la variable aleatoria $W_T + \lambda T$, $\lambda \in \mathbb{R}$. El valor esperado y la varianza de esta variable aleatoria están dados por

$$\mathsf{E}\left[W_T + \lambda T\right] = \frac{1}{\sqrt{2T\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega + \lambda T) e^{-\frac{\omega^2}{2T}} d\omega = \lambda T,$$

$$\mathsf{Var}\left[W_T + \lambda T\right] = \frac{1}{\sqrt{2T\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(\omega + \lambda T)^2 - \lambda^2 T^2\right] e^{-\frac{\omega^2}{2T}} d\omega = T.$$

De lo anterior se concluye que $W_T+\lambda T \sim N(\lambda T, T)$. Es decir, al pasar de W_T a $W_T+\lambda T$, la media cambia de cero a λT, en cambio, la varianza se mantiene fija. La idea es determinar una función $\varphi = \varphi(W_T)$ que cumpla las siguientes condiciones:

$$E\left[(W_T+\lambda T)\varphi(W_T)\right] = 0, \tag{2.5}$$

y

$$E\left[(W_T+\lambda T)^2\varphi(W_T)\right] = T. \tag{2.6}$$

Lo que equivale a pedir

$$\frac{1}{\sqrt{2T\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\omega+\lambda T)\varphi(\omega)e^{-\frac{\omega^2}{2T}}d\omega = 0, \tag{2.7}$$

y

$$\frac{1}{\sqrt{2T\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\omega+\lambda T)^2\varphi(\omega)e^{-\frac{\omega^2}{2T}}d\omega = T. \tag{2.8}$$

Note que

$$A_1 := \frac{1}{\sqrt{2T\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\omega+\lambda T)e^{-\frac{(\omega+\lambda T)^2}{2T}}d\omega = \frac{1}{\sqrt{2T\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}pe^{-\frac{p^2}{2T}}dp = 0,$$

y

$$A_2 := \frac{1}{\sqrt{2T\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\omega+\lambda T)^2e^{-\frac{(\omega+\lambda T)^2}{2T}}d\omega = \frac{1}{\sqrt{2T\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}p^2e^{-\frac{p^2}{2T}}dp = T,$$

donde se hizo el cambio de variable $p = \omega+\lambda T$ y A_1 y A_2 representan el valor esperado y la varianza, respectivamente, de una variable aleatoria $P \sim N(0,T)$. Note además que A_1 y A_2 se pueden escribir como

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2T\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\omega+\lambda T)e^{-\lambda\omega-\frac{1}{2}\lambda^2T}e^{\frac{-\omega^2}{2T}}d\omega = 0,$$

y

$$A_2 = \frac{1}{\sqrt{2T\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\omega+\lambda T)^2e^{-\lambda\omega-\frac{1}{2}\lambda^2T}e^{\frac{-\omega^2}{2T}}d\omega = T.$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones 2.7 y 2.8 se puede concluir que

$$\varphi(W_T) = e^{-\lambda W_T-\frac{1}{2}\lambda^2T},$$

es la función que hace cumplir las condiciones (2.5) y (2.6).

En resumen, se encontró que la función $\varphi = \varphi\left(W_t\right)$ hace que un movimiento Browniano con tendencia se transforme en un movimiento Browniano sin tendencia. Por otra parte, la función φ es muy importante en el desarrollo del modelo continuo para valuar una opción call europea, ya que esta hace que el comportamiento de un activo con riesgo se comporte de igual forma que un activo sin riesgo (esto se verá en el Capítulo 3).

Cambio de Espacio de Probabilidad

En este apartado se presenta el nuevo espacio de probabilidad donde el nuevo movimiento Browniano no tiene tendencia, además, se calculan los valores esperados en este nuevo espacio de probabilidad.

Considere la función g de $W_T + \lambda T$ que cumpla

$$\mathsf{E}\left[g(W_T + \lambda T)\varphi(W_T)\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g\left(\omega + \lambda T\right)\varphi(\omega) d\mathbb{P}(\omega) < \infty, \tag{2.9}$$

donde $d\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2T\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2T}} d\omega$.

Si se toma $\Omega = \mathbb{R}$ y $\mathcal{A} = \mathbf{B}(\mathbb{R})$, entonces W_T está definida sobre $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Suponga ahora que $W_T^* \sim \mathsf{N}(0, T)$. De este modo

$$\widetilde{\mathsf{E}}\left[g(W_T^*)\right] = \frac{1}{\sqrt{2T\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g\left(\omega^*\right) e^{-\frac{\omega^{*2}}{2T}} d\omega^* = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\omega^*) d\mathbb{P}^*(\omega^*), \tag{2.10}$$

donde ahora $d\mathbb{P}^*(\omega^*) = \frac{1}{\sqrt{2T\pi}} e^{-\frac{\omega^{*2}}{2T}}$. En este caso W_T^* está definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}^*)$.

La ecuación (2.9) puede transformarse a la ecuación (2.10) haciendo un cambio de variable $\omega^* = \omega + \lambda T$, es decir

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\left[(W_T + \lambda T)\varphi(W_T)\right] &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} g\left(\omega + \lambda T\right)\varphi(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} g\left(\omega^*\right) d\mathbb{P}(\omega^*) \\ &= \widetilde{\mathsf{E}}\left[g(W_T^*)\right]. \end{aligned}$$

La penúltima igualdad se obtiene ya que $\varphi(\omega)e^{-\frac{\omega^2}{2T}} = e^{-\frac{(\omega+\lambda T)^2}{2T}}$. En otras palabras, la igualdad $\mathsf{E}\left[(W_T + \lambda T)\varphi(W_T)\right] = \widetilde{\mathsf{E}}\left[g(W_T^*)\right]$ se cumple si y sólo si $W_T^* = W_T + \lambda T$. Por otra parte, si $A \in \mathcal{A}$ entonces

$$\mathbb{P}^*(A) = \widetilde{E}[1_A] = E\left[1_A \varphi(W_T)\right] = \int_A \varphi(\omega)d\mathbb{P}(\omega),$$

es decir

$$\mathbb{P}^*(A) \quad = \quad \int_A \varphi(\omega)d\mathbb{P}(\omega).$$

La función φ de la ecuación anterior se denomina en teoría de la medida *la derivada de Radón-Nikodym* de $\mathbb{P}^*$ con respecto a $\mathbb{P}$, cuya existencia está garantizada por el teorema con el mismo nombre (esta demostración se puede consultar en [3]) y se denota por

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = \varphi.$$

Cabe notar que $\mathbb{P}(A) = 0$ si y sólo si $\mathbb{P}^*(A) = 0$, lo que hace que las medidas sean equivalentes.

Por otro lado, la función $\varphi = \varphi(W_T)$ resulta ser una martingala, es decir, si $\{W_T\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ un movimiento Browniano definido en $(\Omega, \mathcal{A}, \{\mathcal{A}_t\}_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$, entonces

$$\begin{aligned} E\left[e^{-\lambda W_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T} | \mathcal{A}_t\right] &= E\left[e^{-\lambda(W_T - W_t) - \lambda W_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T} | \mathcal{A}_t\right] \\ &= e^{-\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 T} E\left[e^{-\lambda(W_T - W_t)} | \mathcal{A}_t\right] \\ &= e^{-\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 T} E\left[e^{-\lambda(W_T - W_t)}\right]. \end{aligned}$$

Ahora se calculará $E\left[e^{-\lambda(W_T - W_t)}\right]$, o equivalentemente $E\left[e^{-\lambda W_T}\right] E\left[e^{\lambda W_t}\right]$, por ser variables aleatorias independientes. Para la primera se tiene

$$\begin{aligned} E\left[e^{-\lambda W_T}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2T\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda\omega - \frac{\omega^2}{2T}} d\omega \\ &= e^{-\frac{T\lambda^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2T\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\omega+\lambda T)^2}{2T}} d\omega \\ &= e^{\frac{T\lambda^2}{2}}, \end{aligned}$$

y procediendo análogamente para $E\left[e^{\lambda W_t}\right]$, se obtiene $e^{-\frac{t\lambda^2}{2}}$. Finalmente,

$$\begin{aligned} E\left[e^{-\lambda W_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T} | \mathcal{A}_t\right] &= e^{-\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 T} e^{\frac{1}{2}\lambda^2 (T-t)} \\ &= e^{-\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t}. \end{aligned}$$

Así resulta que φ es una martingala.

2.4

Elementos Básicos del Cálculo de Itô

En esta sección se presenta de forma accesible el cálculo de Itô.

2.4.1

Motivación de la Integral Estocástica

Para comenzar, se darán un par de ejemplos para entender este tipo de integrales. Conside el movimiento Browniano $\{W_s\}_{0\leqslant s\leqslant t}$, definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, y una partición del intervalo $[0, t]$ en n subintervalos de misma longitud, es decir $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$, donde $t_i = \frac{it}{n}$. De esta manera $t_i - t_{i-1} = \frac{t}{n}$, $i = 1, \ldots, n$. Defínase la variable aleatoria:

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

Lo que se quiere hacer ahora es encontrar V_t tal que

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\left[(V_n - V_t)^2\right] = 0. \tag{2.11}$$

Un posible candidato para V_t es

$$\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\left[\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2\right].$$

Una de las razones que justifica esta elección es que

$$\begin{aligned} V_t &= \mathsf{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\left[\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = t, \end{aligned}$$

y no depende de n. En este caso, la ecuación (2.11) se transforma en el error cuadrático medio, a saber, $E\left[(V_t - E[V_t])^2\right]$. Observe que

$$E\left[(V_n - t)^2\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n}(\Delta W_{t_i})^4 + 2\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}(\Delta W_{t_i})^2\left(\Delta W_{t_j}\right)^2 + t^2 - 2t\sum_{i=1}^{n}(\Delta W_t)^2\right],$$

donde $\Delta W_{t_i} = W_{t_i} - W_{t_{t-1}}$. Considere ahora el lado derecho de la ecuación anterior. Dado que los incrementos $W_{t_i} - W_{t_{t-1}}$, $i = 1, \dots, n$, son variables aleatorias independientes, se obtiene

$$E\left[(\Delta W_{t_i})^2\left(\Delta W_{t_j}\right)^2\right] = (t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1}).$$

Por otra parte, si $X \sim N(0, \sigma^2)$, entonces $E\left[\left(\frac{X}{\sigma}\right)^4\right] = 3$. Por lo tanto $E\left[(\Delta W_{t_i})^4\right] = 3(t_i - t_{i-1})^2$. Entonces

$$E\left[(V_n - t)^2\right] = 3\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})^2 + 2\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}(t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1}) + t^2 - 2t\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}).$$

Utilizando el hecho de que $t_i - t_{i-1} = \frac{t}{n}$, para toda $i = 1, \dots, n$, se obtiene los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} 3\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})^2 &= 3n\left(\frac{t}{n}\right)^2 = \frac{3t^2}{n}, \\ 2\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}(t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1}) &= \binom{n}{2}\left(\frac{t}{n}\right)^2 = \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2n}. \end{aligned}$$

Finalmente

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\sum_{i=1}^{n}(\Delta W_{t_i})^2 - t\right]^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3t^2}{n} + t^2 - \frac{t^2}{n} + t^2 - 2t^2\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2t^2}{n} = 0.$$

Es razonable escribir a V_t como

$$\int_0^t (dW_s)^2 \equiv \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\Delta W_{t_i})^2 \overset{m.c.}{=\!\!\rightarrow} t.$$

La convergencia es en media cuadrática. De lo anterior se concluye que

$$\int_0^t (dW_s)^2 = t,$$

que también se puede escribir en su forma diferencial, abusando de la notación como

$$(dW_t)^2 = dt.$$

El objeto del estudio del cálculo estocástico son las integrales y no diferenciales. En otras palabras, cuando se escribe una ecuación diferencial estocástica, realmente se está pensando en una integral estocástica [34].

2.4.2

Integral de Itô

Después de motivar la idea de cómo se calcula una integral estocástica, a continuación se proporcionará la definición formal.

Definición 7. *La integral estocástica, o integral de Itô*

$$V_t \equiv \int_o^t f(s) dW_s,$$

es el proceso estocástico tal que

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right) - V_t\right]^2 = 0, \tag{2.12}$$

donde $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ *es un movimiento Browniano,* $0 = t_0 < t_2 < \cdots < t_n = t$ *es una partición del intervalo* $[0, t]$ *en* n *subintervalos de misma longitud, es decir* $t_i - t_{i-1} = \frac{it}{n}$.

Observación:

Cuando se está pensando en una integral de Itô, la función f en consideración se está valuando en el extremo izquierdo de cada subintervalo de la partición de $[0, t]$. En el caso en que se esté valuando en el extremo derecho el valor de la integral es diferente. Algunos ejemplos de esta observación, y más detalles, las puede consultar en [34].

Algo importante que se tiene que tomar en cuenta es que la función f puede ser tanto determinista como estocástica. Además, la definición de integral estocástica requiere que la función f se value en t_{i-1}. Cuando $f(s) = g(W_s)$ se supondrá que el valor de $f(s)$ depende sólo de los valores pasados de W_u, $u \leqslant s$. En este caso, se dice que la función f es *predecible.* Asimismo, se supondrá que

$$\int_0^t f^2(s) ds \;<\; \infty, \quad \text{casi en todas partes,}$$

$$\int_0^t E\left[f^2(s)\right] ds \;<\; \infty,$$

La condición de la primera integral garantiza que la integral de Itô, $\int_0^t f(s)dW_s$, esté bien definida, y la condición de la segunda integral asegura que la varianza de $\int_0^t f(s)dW_s$ se mantenga finita. Como se puede ver, si f es determinista, las dos condiciones anteriores coinciden. A continuación se mencionarán, sin demostración, algunas propiedades de la integral de Itô:

❶ Linealidad: Si f y g son tales que sus integrales de Itô existen y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_0^t (af(s) + bg(s))\, dW_s = a\int_0^t f(s)dW_s + b\int_0^t g(s)dW_s.$$

❷ Isometría: Si f es tal que la integral de Itô existe, entonces

$$E\left[\left(\int_0^t f(s)dW_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t f^2(s)ds\right] = \int_0^t E\left[f^2(s)\right] ds.$$

❸ Propiedad de martingala: Si f es tal que la integral de Itô existe, entonces

$$E\left[\int_0^t f(s)dW_s \middle| \mathcal{A}_u\right] = \int_0^u f(s)dW_s.$$

Continuando con la integral de Itô, se desarrollará un segundo ejemplo de integración estocástica con el propósito de ilustrar otro procedimiento para encontrar límites en media cuadrática. Considere ahora la siguiente sucesión

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} W_{t_{i-1}}\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right), \quad n = 1, 2, \ldots, .$$

En este caso, $f(t_{i-1}) = W_{t_{i-1}}$. Note que

$$ab = \frac{1}{2}\left[(a+b)^2 - a^2 - b^2\right].$$

Haciendo $a = W_{t_{i-1}}$ y $b = W_{t_i} - W_{t_{i-1}} = \Delta W_{t_i}$, para obtener

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(W_{t_{i-1}} + W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2 - W_{t_{i-1}}^2 - \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[W_{t_i}^2 - W_{t_{i-1}}^2 - (\Delta W_{t_i})^2\right]. \end{aligned}$$

Se analizará por partes el lado derecho de la ecuación. Observe primero que

$$\sum_{i=1}^{n}\left(W_{t_i}^2 - W_{t_{i-1}}^2\right) = W_t^2 - W_0^2 = W_t^2.$$

Por lo tanto

$$V_n = \frac{1}{2}\left[W_t^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(\Delta W_{t_i}\right)^2\right].$$

De acuerdo con (2.12), se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\frac{1}{2}\left(W_t^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(\Delta W_{t_i}\right)^2\right) - \frac{1}{2}\left(W_t^2 - t\right)\right] = 0.$$

En consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} W_{t_{i-1}}\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right) \overset{\text{m.c.}}{=} \frac{1}{2}\left(W_t^2 - t\right),$$

donde el límite se interpreta de acuerdo con (2.12). En conclusión

$$\int_0^t W_s dW_s \quad = \quad \frac{1}{2}\left(W_t^2 - t\right). \tag{2.13}$$

2.4.3

Lema de Itô

En esta subsección se presenta un resultado importante del cálculo estocástico, llamado lema de Itô, sobre la regla de la cadena para algunas funciones cuyo argumento es una variable aleatoria.

Definición 8. *Se dice que la familia de variables aleatorias* $\mathbf{X} = \{X_t\}_{t\geqslant 0}$ *es un proceso de Itô si se cumple*

$$dX_t \quad = \quad \mu_t dt + \sigma_t dW_t, \quad \text{con } X_0 = x,$$

donde $\mu_t = \mu(X_t, t)$ *y* $\sigma_t = \sigma(X_t, t)$ *son funciones conocidas y* dW_t *es el incremento de un movimiento Browniano.*

Se enuncia, sin demostración (consulte la idea en [34]), de uno de los resultados más importantes en la teoría del cálculo estocástico.

Lema de Itô. *Sea* X_t *un proceso de Itô que satisface*

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t, \quad \textit{con } X_0 = x,$$

y sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una función de clase* C^2*. Entonces,* $f(X_t, t)$ *es un proceso de Itô, y*

$$d(f(X_t,t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(X_t,t)dt + \frac{\partial f}{\partial X_t}(X_t,t)dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2}(X_t,t)(dX_t)^2, \tag{2.14}$$

con $(dX_t)^2$ *como*

$$(dt)^2 = 0, \quad dtdW_t = 0 \quad \textit{y} \quad (dW_t)^2 = dt, \tag{2.15}$$

y W_t *un movimiento Browniano.*

Para los fines de este trabajo, X_t es sólo un movimiento Browniano W_t. Si f sólo depende de W_t se tiene la diferencial

$$df(W_t,t) = \frac{\partial f}{\partial W_t}(W_t,t)dW_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial W_t^2}(W_t,t)dt. \tag{2.16}$$

Como ejemplo, considérese $Y_t = f(W_t,t) = W_t^2$, entonces por (2.14) se tiene

$$\frac{\partial Y_t}{\partial W_t} = 2W_t \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 Y_t}{\partial W_t^2} = 2,$$

para obtener

$$dY_t = 2W_t dW_t + dt, \tag{2.17}$$

o en su forma de integral estocástica

$$Y_t = Y_0 + 2\int_0^t W_s dW_s + \int_0^s ds.$$

Considere de nuevo (2.17) para obtener

$$W_t dW_t = \frac{1}{2}\left(dW_t^2 - dt\right).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_0^t W_s dW_s &= \frac{1}{2}\left(\int_0^t dW_s^2 - \int_0^t ds\right), \\ &= \frac{1}{2}\left(W_t^2 - t\right),\end{aligned}$$

lo cual es consistente con (2.13).

Considere ahora $G_t = G_0 \exp\{\sigma W_t + \nu t\}$. A $\{G_t, t \geqslant 0\}$ se le llama movimiento Browniano económico. Esta función se puede derivar mediante el lema de Itô. Si se define

$$f(x,t) \;=\; G_0 \exp\{\sigma x + \nu t\},$$

entonces se tiene que

$$G_t \;=\; f\left(W_t, t\right).$$

Al calcular las derivadas $\dfrac{\partial G_t}{\partial W_t}$, $\dfrac{\partial^2 G_t}{\partial W_t^2}$ y $\dfrac{\partial G_t}{\partial t}$, utilizando la fórmula de Itô resulta respectivamente

$$\frac{\partial G_t}{\partial W_t} = \sigma G_t, \quad \frac{\partial^2 G_t}{\partial W_t^2} = \sigma^2 G_t \quad \text{y} \quad \frac{\partial G_t}{\partial t} = \nu G_t,$$

de modo que

$$dG_t = df\left(W_t, t\right) = \sigma G_t dW_t + \frac{1}{2}\sigma^2 G_t dt + \nu G_t dt,$$

y finalmente

$$dG_t \;=\; \left(\nu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) G_t dt + \sigma G_t dW_t, \tag{2.18}$$

o en su forma de integral estocástica

$$G_t = G_0 + \left(\nu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \int_0^t G_s ds + \sigma \int_0^t G_s dW_s.$$

Esta diferencial es de suma importancia en las finanzas, así que se considerará en el capítulo siguiente.

CAPÍTULO 3

Un Modelo en Tiempo Continuo

3.1

Introducción

A partir de aquí, se considerará el problema de la valuación de opciones en tiempo continuo. El resultado más importante es el modelo de Black-Scholes, que se abordará en este capítulo. Para ello son necesarias algunas modificaciones sustanciales para empezar a desarrollar este modelo. Por otra parte, cabe mencionar, que el desarrollo de este capítulo se basó en los textos y artículos [9], [34], [14], [15], [20], [11] y [24].

3.2

Evolución del Modelo

El problema de la valuación de opciones se empezó a abordar a fines del siglo XIX. Uno de los primeros trabajos en mencionarlo fue escrito por *Charles Castelli*: "*The Theory of Options in Stocks and Shares*" [11]; desgraciadamente no existía una base teórica para sustentarlo matemáticamente y los resultados fueron olvidados.

El trabajo de Bachelier

Uno de los pioneros en la modelación y análisis de los mercados financieros fue *Louis Bachelier*, quien defendió exitosamente en la Universidad de la Sorbona en 1900 su tesis doctoral "*Theorie de la Spéculation*" bajo la supervisión de *Henri Poincaré*. Aunque no recibió la calificación más alta, "Honorable" según el tribunal compuesto por Joseph Boussinesq, Paul Appel y el propio Henri Poincaré [20]. Sin duda fue una tesis revolucionaria para esa época; en ella proponía un movimiento Browniano como modelo asociado a los precios de las acciones y obtuvo la primera formalización de una caminata aleatoria [20].

El movimiento Browniano fue descubierto por Robert Brown en 1827, mientras examinaba partículas de polen en el microscopio; él observó que cuando éstas se encontraban suspendidas en el agua y en otros líquidos se movían sin cesar en forma errática. Las primeras explicaciones que se había propuesto de este fenómeno fue que estas partículas tenían vida propia (observaciones que hicieron Buffon y Nedham, entre otros). Sin embargo, Brown experimentó ese movimiento errático en partículas que no eran de polen vivo y conjeturó que podría ser debido al golpeteo constante de las moléculas invisibles de agua sobre las partículas visibles. Estas últimas se movían en línea recta una corta trayectoria y cambiaban bruscamente de dirección para seguir indefinidamente, estos pequeños cambios eran completamente impredecibles a partir de su trayectoria anterior [13].

Bachelier se anticipó a Einstein[1] con la formulación matemática del movimiento Browniano. Es curioso que mientras Einstein estudiaba mecánica estadística y Brown el movimiento errático de las partículas de polen suspendidas en agua [20], también a Bachelier este movimiento le pareció una descripción precisa de lo que pasaba con los precios en los mercados. Una vez que los precios alcanzaban un valor, su próxima posición era completamente impredecible a partir de su valor anterior. Tanto el movimiento que describía la partícula de polen en el agua como la descripción que dio Bachelier al comportamiento de los precios en el mercado se manifiestan como casos límite de *caminatas aleatorias*.

Tanto para Bachelier como algunos otros académicos y expertos en economía y finanzas que le sucedieron [20], una de las hipótesis utilizadas en su trabajo fue que las diferencias de los precios eran independientes entre si, es decir, si se hace un registro durante un tiempo de los precios diarios y se considera la diferencia de un día al siguiente, entonces las frecuencias con que aparecen estas diferencias son estadísticamente independientes. Ellos sabían que esta independencia les permitiría aplicar métodos estadísticos para su estudio. Bachelier además se dio cuenta que si los precios seguían una caminata aleatoria, entonces la diferencia de los precios se distribuían normalmente; cabe señalar que el recíproco de esta afirmación no se cumple, esto es, si las diferencias de los precios se distribuyen normalmente, no necesariamente los precios siguen una caminata aleatoria [20].

Si los precios siguen una caminata aleatoria, entonces la información anterior que se tenga de éstos será irrelevante para su pronóstico. En consecuencia, el valor actual de los precios debe de tener ya incorporada toda la información anterior de los mercados, pero

[1]Einstein en 1905 escribió un artículo sobre mecánica estadística que proporciona la formulación matemática del movimiento Browniano, y demuestra que la dispersión promedio del desplazamiento de la partícula en un líquido, en un intervalo de tiempo Δt, es proporcional a Δt, como refiere [34].

puesto que el pasado es irrelevante la próxima variación de los precios sólo dependerá de los hechos actuales. En otras palabras, los precios cambian cuando el mercado recibe nueva información. A esto se le conoce como *Hipótesis de Mercados Eficientes* (HME).

La eficiencia de los mercados no implica necesariamente que la diferencia de los precios tenga distribución normal, ni mucho menos que sigan una caminata aleatoria. No obstante, la mayoría de los intentos de probar la validez de HME, en algunos casos de estudio, se ha basado en verificar la normalidad de la diferencia de los precios [20].

Existe mucha resistencia a aceptar esta suposición (HME) en general, y se dan algunas variantes: si se admite que la información que se incorpora inmediatamente a los precios es toda la información tanto pública como privada referida a los valores en los mercados, entonces se habla de la versión fuerte de la HME. La versión semifuerte establece que los mercados incorporan inmediatamente a los precios la información pública. Por último, la versión débil de la HME sólo establece que los cambios de los precios son independientes y pudieran ser una caminata aleatoria (para más información puede consultar [20] y [21]).

El trabajo de Bachelier fue olvidado casi sesenta años, quizá porque era poco realista, que no se contaba con suficiente información y tecnología, u otras razones [36].

La época de Black y Scholes

Tomando como base el trabajo de Bachelier, algunos economistas lo refinaron modificando algunos de los supuestos de su modelo. Personajes como *Paul Samuelson*, *Fischer Black*, *Myron Scholes* y *Robert Merton* supusieron la existencia de una tasa de interés y una distribución de probabilidad más realista para los precios de las acciones; además tuvieron en cuenta que los inversionistas son adversos al riesgo, y que posiblemente estén dispuestos a asumirlo, pero a cambio de una prima.

En 1960, Samuelson (premio otorgado por la fundación Nobel por su trabajo en Economía en 1970) propuso el movimiento browniano geométrico (que se mencionará con más detalle en las secciones siguientes) como un modelo para los precios que están sujetos a incertidumbre, particularmente, para el precio del activo subyacente [26]. En otras palabras, en dicho modelo el precio del activo subyacente seguía una distribución log-normal, lo que evitaba que los precios tomaran valores negativos, y también supuso una tasa de interés no nula, una prima por riesgo sobre la tasa de interés libre de riesgo, y aversión al riesgo por parte de los inversionistas. Por su parte *James Boness* en el año 1964 propuso una fórmula más parecida a la actual, pero que todavía incluía una tasa de interés desconocida, que Boness consideraba como la compensación por el riesgo asociado con el valor de la acción [26].

Posteriormente los economistas Black y Scholes propusieron un modelo más realista para la valuación de productos derivados, que culminó con una fórmula conocida como de *Black-Scholes*. Esta a su vez fue mejorada por Merton en 1973 [26]. Algunos autores se refieren a ella como la fórmula de Black- Scholes-Merton, en reconocimiento a la aportación que hizo éste último al modelo [14].

Black y Scholes empezaron desarrollando estudios sobre las relaciones existentes entre el riesgo y la rentabilidad [26]. A partir de ahí, comenzaron a trabajar sobre opciones y warrants (este es una opción del tipo call, cuyo activo subyacente proviene de la emisión de los bonos) en 1969. Inicialmente trabajaron sobre la valuación de opciones, incluyendo ideas relacionadas con arbitraje. Su método trataba fundamentalmente de determinar una fórmula que incluyese todos los factores que afectan al precio de las opciones, y al mismo tiempo, determinar cuántas opciones sufrirían el mismo cambio que el precio del activo subyacente, es decir, querían crear arbitraje. En 1970 trataron de publicar su artículo titulado "*A Theorical Valuation Formula for Options, Warrants and Other Securities*" en el Journal of Political Economy, de la universidad de Chicago, pero éste fue rechazado por ser excesivamente especializado [37]. Posteriormente, en 1971, enviaron a publicar su artículo en la Review of Economics and Statistics de la universidad de Harvard, donde nuevamente se rechazó. Finalmente, en 1972 fue aceptado en el Journal of Political Economy con el titulo *"The Pricing of Options and Corporate Liabilities"*, ya que un año antes se había probado empíricamente el modelo.

Otro economista importante que trabajó conjuntamente con Black y Scholes en la teoría de valuación de opciones fue Merton. Una de las aportaciones que él hizo al modelo fue que el intercambio continuo en la opción o en el subyacente permite mantener una relación estable entre ellos exenta de riesgo; observó también que para valuar una opción no se requiere que el mercado esté en equilibrio, basta que no haya oportunidades de arbitraje. Merton publicó un artículo en el que extiende la fórmula de Black-Scholes al permitir que la tasa de interés sea estocástica. En sus trabajos que publicó en 1977 desarrolló un método mucho más amplio para derivar la fórmula basándose en el hecho de que las opciones pueden ser creadas sintéticamente mediante el intercambio del activo subyacente y un bono libre de riesgo [22].

Para finalizar, en 1997 el premio otorgado por la fundación Nobel en Economía se otorgó a Merton y Scholes por su trabajo sobre la valuación de opciones. El jurado también reconoció las aportaciones de Black, quien no pudo compartir el premio con sus colegas por haber fallecido dos años antes.

3.3

Dinámica del Precio de una Acción.

En esta sección se presentará un modelo para el precio de la acción en tiempo continuo.

Para el caso continuo son necesarios los mismos supuestos que en caso Binomial para modelar el precio de una opción en tiempo continuo (sección 1.4.2). Sin embargo, el precio de una acción no toma solamente dos valores (como se supuso en el modelo binomial), por lo que resulta necesario un planteamiento más general.

Se definió en el capítulo 1 la tasa de utilidad de la acción en el período de tiempo $[n-1, n]$, mediante

$$K(n) = \begin{cases} u & \text{con probabilidad} \quad p, \\ \\ d & \text{con probabilidad} \quad 1-p. \end{cases}$$

Una de las hipótesis con las que se está trabajando es que la acción no paga dividendos, entonces

$$K(n) = \frac{S(n) - S(n-1)}{S(n-1)}.$$

De otro modo, la tasa de utilidad se modificaría a

$$K(n) = \frac{S(n) - S(n-1) + \mathrm{div}(n)}{S(n-1)},$$

donde $\mathrm{div}(n)$ representa el pago de dividendos, es decir, si un inversionista compra una acción al tiempo $n-1$ pagando $S(n-1)$ y desea vender la acción al tiempo n, entonces recibirá $S(n) + \mathrm{div}(n)$.

Se define ahora la *tasa de utilidad logarítmica* (o *retorno logarítmico*) en el mismo período y denotada por $\widehat{K}(n)$, como

$$\widehat{K}(n) := \log(1 + K(n)) = \begin{cases} \log(1+u) & \text{con probabilidad} \quad p, \\ \log(1+d) & \text{con probabilidad} \quad 1-p. \end{cases} \tag{3.1}$$

Se escribirá el precio de la acción en términos de la tasa de utilidad. Con la definición de utilidad logarítmica se tiene ahora que $S(n) = S(n-1)e^{\widehat{K}(n)}$. Por el momento, y para mayor simplicidad se considerará el caso en que $p = \frac{1}{2} = 1 - p$.

Se asumirá, en principio, que el tiempo corre de manera discreta, haciendo $t = n\tau$ donde $n = 1, 2, \ldots$ y τ es un valor fijo de tiempo como proporción en múltiplos de un año. En finanzas se considera que el año consta de 360 días. Es conveniente simplificar un poco la notación, se escribirá $S(1), \ldots, S(n)$ en vez de $S(\tau), S(2\tau), \ldots, S(n\tau)$, haciendo una identificación de n con $n\tau$.

La idea principal para pasar al modelo continuo es dividir a T en N subintervalos de misma longitud y considerar una sucesión de modelos binomiales (como en el caso binomial) con longitud de paso $\tau = \dfrac{1}{N}$, y después hacer tender N a infinito. Teniendo esto en cuenta, se continuará desarrollando la exposición.

Considere la suma de variables aleatorias

$$\widetilde{K}(1) + \widetilde{K}(2) + \ldots + \widetilde{K}(N),$$

en el intervalo de tiempo $[0, 1]$ de N pasos de misma longitud τ, con valor esperado y varianza denotados por μ y σ^2 respectivamente. Como las $\widetilde{K}(i)$´s son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \mu &= E\left[\widetilde{K}(1) + \ldots + \widetilde{K}(N)\right] \\ &= NE\left[\widetilde{K}(n)\right], \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= Var\left[\widetilde{K}(1) + \ldots + \widetilde{K}(N)\right] \\ &= NVar\left[\widetilde{K}(n)\right]. \end{aligned}$$

Para $n = 1, 2, \ldots, N$. Esto quiere decir que $E[\widehat{K}(n)] = \dfrac{\mu}{N} = \mu\tau$ y $Var(\widehat{K}(n)) = \dfrac{\sigma^2}{N} = \sigma^2\tau$.

Note que una variable aleatoria X que toma exactamente dos valores a y b con la misma probabilidad se puede escribir como

$$X = \begin{cases} E[X] + \sigma & \text{con probabilidad } \dfrac{1}{2}, \\ \\ E[X] - \sigma & \text{con probabilidad } \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

donde el valor esperado y la varianza están dados por $E[X] = \frac{a+b}{2}$ y $\sigma^2 = \frac{(a-b)^2}{4}$, respectivamente.

Ahora se puede escribir a $\widehat{K}(n)$ como

$$\widehat{K}(n) = \begin{cases} \mu\tau + \sigma\sqrt{\tau} & \text{con probabilidad } \dfrac{1}{2}, \\ \\ \mu\tau - \sigma\sqrt{\tau} & \text{con probabilidad } \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

A μ, la media de $\widetilde{K}(1) + \ldots + \widetilde{K}(N)$, se le conoce como *deriva* o *drift* y a σ, la desviación estándar, se le conoce como la *volatilidad* y es un parámetro muy importante, ya que cuantifica la variabilidad de los precios del activo subyacente en el período de un año.

Ahora se define la siguiente variable aleatoria:

$$\xi(n) = \begin{cases} \sqrt{\tau} & \text{con prob. } \dfrac{1}{2} \\ \\ -\sqrt{\tau} & \text{con prob. } \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

donde claramente se cumple $E[\xi(n)] = 0$ y $Var[\xi(n)] = \tau$.

Con esta notación se tiene

$$\widehat{K}(n) \;=\; \mu\tau + \sigma\xi(n). \tag{3.2}$$

Considérese la siguiente caminata aleatoria simétrica (página 48)

$$w_n = \xi(1) + \ldots + \xi(n) \quad \text{con } w(0) = 0, \tag{3.3}$$

donde $E[w_n] = 0$ y $Var[w_n] = n\tau = t$. Esto se obtiene puesto que las $\xi(i)$´s son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Por otra parte, la ecuación (3.3) se puede escribir como $\xi(n) = w_n - w_{n-1}$, de modo que la variable aleatoria $\xi(n)$ se refiere al incremento de w_n. A partir de ahora, se escribirá $S(t)$ y w_t en vez de $S(n)$ y w_n para $t = n\tau$, donde $n = 1, 2, \ldots$.

Proposición 1. *El precio de la acción al tiempo* $t = \tau n$ *está dado por*

$$S(t) \;=\; S(0)e^{t\mu + \sigma w_t}. \tag{3.4}$$

La demostración se obtiene directamente de las ecuaciones (3.1) y (3.2) y de que $S(n) = S(n-1)\,(1 + K(n))$, para $n \in \mathbb{N}$.

Para pasar a tiempo continuo, se usará la aproximación $e^x \approx 1 + x$, para x lo suficientemente pequeño, por lo que se puede escribir

$$\begin{aligned} S\left((n+1)\tau\right) &= S(n\tau)(1 + K(n+1)) \\ &= S(n\tau)e^{\widetilde{k}(n+1)} \\ &\approx S(n\tau)\left(1 + \widetilde{k}(n+1)\right), \end{aligned}$$

y por la ecuación (3.2) se obtiene

$$S\left((n+1)\tau\right) \;=\; S(n\tau)\left(1 + \mu\tau + \sigma\xi(n+1)\right),$$

es decir,

$$S(n\tau+\tau)-S(n\tau) \approx \mu\tau S(n\tau)+\sigma S(n\tau)\xi(n+1),$$

donde $\xi(n+1) = w_{(n+1)\tau} - w_{n\tau}$. Se tiene entonces una ecuación que aproxima a la dinámica que describe el precio de una acción, la cual se puede reescribir como

$$S(t+\tau)-S(t) \approx \mu\tau S(t)+\sigma S(t)\xi(n+1). \tag{3.5}$$

Para cada $N = 1, 2, \ldots$ se considera el modelo binomial con paso de longitud $\tau = \frac{1}{N}$. Se denota por $S_N(t)$ y $w_N(t)$. al precio de la acción y la caminata aleatoria correspondiente al modelo binomial con incrementos $\xi_N(t) = w_N(t) - w_N\left(t-\frac{1}{N}\right)$, donde $t = n\tau$ es el tiempo después del n-ésimo paso. Cabe mencionar que el valor esperado y la varianza de $w_N(t)$ son $E[w_N(t)] = 0$ y $Var(w_N(t)) = n\tau = t$ respectivamente.

Por otra parte, la ecuación (3.2) se puede transformar en $\xi(n) = \dfrac{K(n)-\mu\tau}{\sigma}$, para cada $n = 1, 2, \ldots$ Estas forman una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Entonces

$$\xi(n) = \frac{(K(n)-\mu\tau)\sqrt{\tau}}{\sigma\sqrt{\tau}} = \sqrt{\tau}Y(n)$$

donde $Y(n) = \dfrac{K(n)-\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$.

La variable aleatoria $Y(n)$ tiene valor esperado 0 y varianza 1 para cada $n = 1, 2, \ldots$ Esto se obtiene por lo siguiente:

$$E[\xi(n)] = \sqrt{\tau}E\left[Y(n)\right],$$

puesto que $E[\xi(n)] = 0$, se concluye que $E\left[Y(n)\right] = 0$. Por otra parte

$$Var(\xi(n)) = \tau Var\left(Y(n)\right),$$

puesto que $Var(\xi(n)) = \tau$, resulta que $Var\left(Y(n)\right) = 1$.

Fijemos ahora un $t > 0$ y para cada N sea t_N el múltiplo más cercano a t de longitud $\dfrac{1}{N}$, es decir, sea m entero tal que $t_N = \dfrac{m}{N}$ es el múltiplo más cercano a t. Esto se hace porque en la caminata aleatoria w_n sólo está definida en tiempo discreto, en este caso, para múltiplos enteros de paso $\tau = \frac{1}{N}$. Dicho lo anterior, note que $\mid t - t_N \mid \leqslant \dfrac{1}{N}$, lo cual implica que $\lim_{N\to\infty} t_N = t$, de modo que

$$\begin{aligned}
W_N(t_N) &= \xi_N(1) + \ldots + \xi_N(m) \\
&= \xi_N(1) + \ldots + \xi_N(Nt_N) \\
&= \sqrt{\tau} \quad (Y(1) + \ldots + Y(Nt_N)) \\
&= \frac{Y(1) + \ldots + Y(Nt_N)}{\sqrt{N}} \\
&= \sqrt{t_N} \quad \frac{(Y(1) + \ldots + Y(Nt_N))}{\sqrt{Nt_N}},
\end{aligned}$$

donde $Nt_N = m$ es un número entero para cada N. Ahora, cuando $N \to \infty$, se tiene que $t_N \to t$, y $Nt_N \to \infty$, así que

$$\sqrt{t_N}\frac{(Y(1) + \ldots + Y(Nt_N))}{\sqrt{Nt_N}} \quad \xrightarrow{\mathcal{D}} W_t \sim N(0, t), \tag{3.6}$$

donde $\xrightarrow{\mathcal{D}}$representa convergencia en distribución (como se había mencionado en el capítulo anterior). La expresión (3.6) se obtiene por el teorema del límite central, donde además W_t es una caminata aleatoria en tiempo continuo (subsección 2.3.1), es decir, un movimiento Browniano.

Establecido lo anterior, ya se puede dar una expresión para el precio de una acción en tiempo continuo. El precio de la acción al tiempo t está dado por

$$\begin{aligned}
S(t) &= \lim_{N\to\infty} S_N(t_N) \\
&= \lim_{N\to\infty} S(0)e^{t\mu+\sigma w_N(t_N)} \qquad \text{(ecuación 3.4).}
\end{aligned}$$

Haciendo $N \to \infty$ y utilizando (3.6), se puede concluir

$$S(t) = S(0)e^{t\mu+\sigma W_t}. \tag{3.7}$$

Por otra parte, al hacer $N \to \infty$ en la expresión en diferencias del precio de la acción (3.5) se tiene

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW_t. \tag{3.8}$$

Aquí, $dS(t) = S(t + dt) - S(t)$ y $dW_t = W_{t+dt} - W_t$, son incrementos de $S(t)$ y W_t respectivamente.

3.3.1

La Log-normalidad en el Precio de las Acciones

En esta subsección se analizará la función de distribución de la variable aleatoria $\ln(S(t))$, que se utilizará más adelante para determinar la volatilidad en el caso concreto de la valuación de una opción call europea.

Una variable aleatoria positiva tiene distribución log-normal si el logaritmo natural de la variable se distribuye normalmente. La hipótesis log-normal para los precios de las acciones implica, que $\ln(S(t))$ es normal ($t \geqslant 0$), donde la media $\widetilde{\mu}$ y la desviación estándar $\widetilde{\sigma}$ de $\ln(S(t))$ son:

$$\widetilde{\mu} = \ln(S(0)) + \mu t \qquad \text{y} \qquad \widetilde{\sigma} = \sigma\sqrt{t}.$$

Y esto se obtiene a partir de la ecuación (3.7), ya que

$$\ln(S(t)) = \ln(S(0)) + \mu t + \sigma W_t. \tag{3.9}$$

Esto se puede representar como

$$\ln(S(t)) \sim N\left(\ln(S(0)) + \mu t, \sigma\sqrt{t}\right), \tag{3.10}$$

donde N denota la densidad normal. La ecuación (3.10) muestra que $\ln(S(t))$ está normalmente distribuido, por lo cual $S(t)$ tiene distribución log-normal.

De la ecuación (3.7) y por las propiedades del valor esperado, se puede obtener que el valor esperado de $S(t)$ viene dado por

$$E[S(t)] = S(0)e^{\mu t}.$$

Por otra parte, se puede demostrar que la varianza de $S(t)$ está dada por

$$Var(S(t)) = (S(0))^2 e^{2\mu t}\left(e^{\sigma^2 t} - 1\right).$$

Por (3.9) se tiene

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) \sim N\left(\mu t, \sigma\sqrt{t}\right). \tag{3.11}$$

Este modelo es una representación más realista para el precio de las acciones, ya que este modelo no permite que el precio de la acción tome valores negativos (siempre y cuando $S(0) > 0$).

3.4

Modelo de Black-Scholes

En esta sección se presentará una breve exposición del resultado más importante en la valuación de opciones, la ecuación en derivadas parciales estocástica de Black-Scholes.

3.4.1

Movimiento Browniano Económico

En 1965 Samuelson propuso (referencia tomada de [24]) para el precio de la acciones la siguiente expresión

$$G(t) = G(0)\exp\{\sigma W_t + \nu t\}.$$

A $G(t)$ se le llama *movimiento Browniano económico*. Esta función se puede derivar mediante el lema de Itô (ejemplo 2.18 de la subsección 2.3.1), lo que resulta

$$\frac{dG(t)}{G(t)} = \left(\nu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW_t.$$

El movimiento Browniano económico es consistente con la definición del precio de una acción, pero ahora con $\mu = \nu + \dfrac{1}{2}\sigma^2$. Note que hay un término extra que aparece por la fórmula de Itô. Es decir, el movimiento Browniano económico es la "generalización" natural resultante de agregar ruido a la evolución de un activo con riesgo.

En conclusión, ahora el valor de la acción al tiempo t está dada por

$$S(t) = S(0)e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t},$$

O en su forma diferencial

$$dS(t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) S(t)dt + \sigma S(t)dW_t.$$

3.4.2

Probabilidad Libre de Riesgo

En esta subsección el objetivo es encontrar la probabilidad libre de riesgo en el caso de un activo con riesgo. Anteriormente, al discutir el modelo binomial, esto consistía en encontrar p^* tal que el valor esperado E_* bajo dicha probabilidad cumpliera

$$E_*\left[S(n)\right] = (1+r)^n S(0),$$

es decir, p^* era la tasa para la cual son iguales la utilidad media de los activos con riesgo y sin riesgo.

Si se considera una opción call europea con tiempo de vencimiento T y función de pago $f(S(T))$, entonces el precio de la opción está dado por

$$C(0) = E_*\left[e^{-rT} f\left(S(T)\right)\right],$$

que es la expresión análoga al modelo binomial pero ahora para un modelo en tiempo continuo. ¿Cuál es la medida con la que se calculará el valor esperado para que se esté en la situación libre de riesgo?

Como se mostró en la sección 2.3.5, la función $\varphi = \varphi(W_T)$ transforma un movimiento Browniano con tendencia a un movimiento Browniano sin tendencia encontrando una medida equivalente. En otras palabras, la función φ cumple

$$E\left[g(W_t + \lambda t)\varphi(W_t)\right] = \widetilde{E}\left[g(W_t^*)\right], \tag{3.12}$$

para alguna función g que cumple

$$E\left[g(W_T + \lambda T)\varphi(W_T)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} g\left(\omega + \lambda T\right)\varphi(\omega)d\mathbb{P}(\omega) < \infty.$$

Para el caso continuo, se tiene

$$E\left[e^{-rt}S(t)\right] = S(0),$$

que es el caso análogo al caso discreto. Note que si se hace $g(x) = S(0)e^{\sigma x}$, entonces

$$g(W_t + \lambda t) = S(0)e^{\sigma\left[W_t + (\frac{\mu - r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})t\right]}.$$

Si $\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}$, entonces

$$g(W_t + \lambda t) = S(0)e^{\sigma(W_t + \lambda t)},$$

cumpliendo con (3.12). Lo que implica

$$W_t^* \;=\; W_t + \left(\frac{\mu - r}{\sigma} - \frac{1}{2}\sigma\right) t. \tag{3.13}$$

Considerando ahora a W_t^*, se tiene

$$\begin{aligned} dS(t) &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) S(t)dt + \sigma S(t) dW_t \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) S(t)dt + \sigma S(t) d\left(W_t^* - \frac{\mu - r}{\sigma} t + \frac{1}{2}\sigma t\right), \end{aligned}$$

lo que resulta

$$dS(t) \;=\; rS(t)dt + \sigma S(t) dW_t^*, \tag{3.14}$$

lo cual sólo cambia $\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)$ por r.

Haciendo el cambio (3.13) se logra que los activos S y A tengan igual rendimiento, y con ello a su vez, en conclusión, el precio de la acción al tiempo t estará ahora dado por

$$S(t) \;=\; S(0)e^{rt + \sigma W_t^*}. \tag{3.15}$$

En la sección 3.5 se presenta un programa en `Matlab` para la simulación del precio de la acción al tiempo $t = \frac{i}{N}$, para $i = 0, 1, ..., N$, donde N representa el número de subintervalos que se quiere.

3.4.3

Ecuación de Black-Scholes

En esta sección se expone una derivación intuitiva de la ecuación en derivadas parciales estocástica conocida como el modelo de Black-Scholes.

Recuerde que el valor de un portafolio (x, y) al tiempo t está dado por

$$V(t) = xS(t) + yA(t),$$

cuya diferencial es

$$dV(t) \;=\; xdS(t) + ydA(t).$$

Sustituyendo la expresión (3.14) en la ecuación anterior resulta

$$\begin{aligned} dV(t) &= xS(t)\,(rdt + \sigma dW_t^*) + yrA(t)dt \\ &= r(xS(t) + yA(t))dt + x\sigma S(t)dW_t^* \\ &= rV(t)dt + x\sigma S(t)dW_t^*. \end{aligned}$$

Se utilizará una función $H : \mathbb{R}^+ \text{ x } \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ (donde $\mathbb{R}^+$ son los reales no negativos) de clase C^2 tal que

$$V(t) \;=\; H(z,t) \quad \text{para toda } t.$$

Por el método de la réplica, se tiene que $V(T) = f(S(T))$, de modo que, $H(z,T) = f(z)$, y de esta forma

$$C(0) \;=\; H(S(0), 0).$$

Se procederá entonces a determinar a la función $H(z,t)$, insistiendo que satisfaga

$$V(t) \;=\; H(S(t),t) \quad \text{para todo } t.$$

Observe que $S(t)$ está en función de W^* y $H(z,t)$ está en función de $S(t)$, por lo cual se puede utilizar la fórmula de Itô, resultando

$$\begin{aligned} dH &= \frac{\partial H}{\partial t}dt + \frac{\partial H}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial S^2}(dS)^2 \\ &= \frac{\partial H}{\partial t}dt + \frac{\partial H}{\partial S}\left(rSdt + \sigma S dW_t^*\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial S^2}\left((rSdt + \sigma S dW_t^*)^2\right) \\ &= \frac{\partial H}{\partial t}dt + \frac{\partial H}{\partial S}\left(rSdt + \sigma S dW_t^*\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial S^2}\left(r^2S^2(dt)^2 + \sigma^2 S^2 (dW_t^*)^2 + 2rS^2 dt dW_t^*\right). \end{aligned}$$

Dado que se desprecian los términos $(dt)^2 = 0$ y $dtdW_t^* = 0$ (ver 2.4.3), resulta

$$dH \;=\; \frac{\partial H}{\partial t}dt + \frac{\partial H}{\partial S}\left(rSdt + \sigma S dW_t^*\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 H}{\partial S^2}dt,$$

y lo anterior da lugar a

$$dH \;=\; \left(\frac{\partial H}{\partial t} + rS\frac{\partial H}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 H}{\partial S^2}\right)dt + \sigma S \frac{\partial H}{\partial S} dW_t^*. \tag{3.16}$$

Se propuso que $V(t) = H(S(t),t)$, por lo que se igualan los coeficientes de dt de la ecuaciones (3.16) y (3.16) para obtener

$$\frac{\partial H}{\partial t} + rS\frac{\partial H}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 H}{\partial S^2} \;=\; rH.$$

Además, para que se cumpla el método de la réplica se debe tener

$$H(S(T),T) \;=\; f(S(T)). \tag{3.17}$$

Finalmente, ambas condiciones conjuntamente dan lugar a la ecuación en derivadas parciales estocástica de Black-Scholes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial t}(S(t),t) + rS\dfrac{\partial H}{\partial S}(S(t),t) + \dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \dfrac{\partial^2 H}{\partial S^2}(S(t),t) = rH(S(t),t), \\ \\ H(S(T),T) = f(S(T)). \end{cases} \tag{3.18}$$

La condición de réplica (3.17) constituye la condición de (3.18).

Por otra parte, si se igualan los coeficientes de dW_t^* de las ecuaciones (3.16) y (3.16) resulta

$$x = \frac{\partial H}{\partial S}(S(t),t),$$

que es la cantidad de acciones necesarias para que se cumpla el principio de no arbitraje.

3.4.4

Solución a la ecuación de Black-Scholes

En esta sección se presenta una manera de resolver la ecuación en derivadas parciales de Black-Scholes, que consiste en reducirla a una ecuación de calor relativamente más fácil de manejar. En otras palabras, la ecuación de Black-Scholes, que es una ecuación en derivadas parciales estocástica, se reduce haciendo unos cambios de variables apropiados para obtener una ecuación de calor de una dimensión, la cual se puede resolver fácilmente.

En lo que sigue, se denota por $C(S,t) = H(S,t)$, sólo para enfatizar el hecho de que se está trabajando con una opción call europea. Entonces, la ecuación en derivadas parciales con condición de frontera por resolver es

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial t}(S,t) + rS\dfrac{\partial C}{\partial S}(S,t) + \dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \dfrac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S,t) = rC(S,t), \\ \\ C(S,T) = f(S(T)). \end{cases} \tag{3.19}$$

Considérense los siguientes cambios de variables:

- $\tau = \dfrac{1}{2}\sigma^2(T-t)$, y
- $S(t) = Xe^x$, llamada sustitución de Euler,

donde X es el precio strike de la opción.

Considerando además la sustitución $\widetilde{C}(x,\tau) = \dfrac{1}{X}C(S,t)$, entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \widetilde{C}}{\partial x} &= \frac{1}{X}\left[\frac{\partial C}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}\right] &= \frac{S}{X}\frac{\partial C}{\partial S},\\
\frac{\partial \widetilde{C}}{\partial \tau} &= \frac{1}{X}\left[\frac{\partial C}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial \tau} + \frac{\partial C}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \tau}\right] &= -\frac{2\tau}{X\sigma^2}\frac{\partial C}{\partial t},\\
\frac{\partial^2 \widetilde{C}}{\partial x^2} &= \frac{1}{X}\frac{\partial}{\partial x}\left[S\frac{\partial C}{\partial S}\right] &= \frac{1}{X}\left[S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + S\frac{\partial C}{\partial S}\right].
\end{aligned}
$$

Despejando $\dfrac{\partial C}{\partial S}$, $\dfrac{\partial^2 C}{\partial S^2}$ y $\dfrac{\partial C}{\partial t}$ en la ecuación anterior y sustituyendo en la ecuación (3.19) queda

$$
-\frac{X\sigma^2}{2}\frac{\partial \widetilde{C}}{\partial \tau} + \frac{X\sigma^2}{2}\left[\frac{\partial^2 \widetilde{C}}{\partial x^2} - \frac{\partial \widetilde{C}}{\partial x}\right] + rX\frac{\partial \widetilde{C}}{\partial x} = rX\widetilde{C}.
$$

Entonces la ecuación en derivadas parciales por resolver es

$$
\begin{cases}
-\dfrac{\partial \widetilde{C}}{\partial \tau} + \dfrac{\partial^2 \widetilde{C}}{\partial x^2} + \left(\dfrac{2r}{\sigma^2} - 1\right)\dfrac{\partial \widetilde{C}}{\partial x} = \dfrac{2r}{\sigma^2}\widetilde{C},\\[2ex]
\widetilde{C}(x,0) = \max\{e^x - 1, 0\}.
\end{cases}
\tag{3.20}
$$

Para resolver suponga que la solución es de la forma $u(x,\tau) = e^{ax+b\tau}\widetilde{C}(x,\tau)$, es decir, $u(x,\tau)$ es el valor futuro de $\widetilde{C}(x,\tau)$ para algunas constantes a y b, de modo que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= e^{ax+b\tau}\left[\frac{\partial \widetilde{C}}{\partial x} + a\widetilde{C}\right],\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= e^{ax+b\tau}\left[\frac{\partial^2 \widetilde{C}}{\partial x^2} + 2a\frac{\partial \widetilde{C}}{\partial x} + a^2\widetilde{C}\right],\\
\frac{\partial u}{\partial \tau} &= e^{ax+b\tau}\left[\frac{\partial \widetilde{C}}{\partial \tau} + b\widetilde{C}\right].
\end{aligned}
$$

Despejando $\dfrac{\partial \widehat{C}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 \widehat{C}}{\partial x^2}$ y $\dfrac{\partial \widehat{C}}{\partial \tau}$ en la ecuación anterior y sustituyendo en la ecuación (3.20) se tiene

$$
-\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x}\left[2a - \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)\right] + u\left[b + a^2 - a\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right) - \frac{2r}{\sigma^2}\right] \quad = \quad 0.
$$

Para simplificar la ecuación anterior, se propone $a = \frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)$ y $b = (1+a)^2$, lo que hace que $b + a^2 - a\left(\dfrac{2r}{\sigma^2} - 1\right) - \dfrac{2r}{\sigma^2} = 0$. De esta manera, sólo hay que resolver la siguiente ecuación de calor de una dimensión

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial \tau} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & = & 0, \\ u(x,0) = e^{ax}\widetilde{C}(x,0) = e^{ax}\max\{e^x - 1, 0\} = \max\left\{e^{\frac{x}{2}(\alpha+1)} - e^{\frac{x}{2}(\alpha-1)}, 0\right\}, \end{cases}$$

donde $\alpha = 2a + 1$. La solución de la ecuación de calor tiene la siguiente forma [34]

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u(s,0) e^{\frac{-(x-s)^2}{4\tau}} ds.$$

Propóngase el siguiente cambio de variable

$$y = \frac{s-x}{\sqrt{2\tau}}; \qquad dy = \frac{1}{\sqrt{2\tau}} ds$$

lo cual da lugar a

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x + \sqrt{2\tau}y, 0) e^{\frac{-y^2}{2}} ds.$$

Se tiene que $u(x,0) = \max\left\{e^{\frac{x}{2}(\alpha+1)} - e^{\frac{x}{2}(\alpha-1)}, 0\right\}$, entonces $u(x,0) \neq 0$ si $e^{\frac{x}{2}(\alpha+1)} > e^{\frac{x}{2}(\alpha-1)}$, y esto sucede si y sólo si $x > 0$, es decir si $x + \sqrt{2\tau}y > 0$, se sigue $y > -\dfrac{x}{\sqrt{2\tau}}$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} u(x,\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \left[e^{\frac{1}{2}(\alpha+1)\left(x+\sqrt{2\tau}y\right)} - e^{\frac{1}{2}(\alpha-1)\left(x+\sqrt{2\tau}y\right)}\right] e^{\frac{-y^2}{2}} dy \\ &= I_1 - I_2, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(\alpha+1)\left(x+\sqrt{2\tau}y\right) - \frac{y^2}{2}} dy \\ I_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(\alpha-1)\left(x+\sqrt{2\tau}y\right) - \frac{y^2}{2}} dy \end{aligned}$$

Completando cuadrados respecto de y en I_1 se obtiene

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{e^{\frac{x}{2}(\alpha+1)}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{y(\alpha+1)\sqrt{2\tau}}{2} - \frac{y^2}{2}} dy \\
&= \frac{e^{\frac{x}{2}(\alpha+1)+\frac{\tau}{4}(\alpha+1)^2}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-d_1}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} dy,
\end{aligned}
$$

donde $d_1 = \dfrac{x}{\sqrt{2\tau}} + \dfrac{\alpha+1}{2}\sqrt{2\tau}$.

Tome en cuenta que $\int\limits_{-d_1}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} dy = \Phi(d_1)$. Se puede escribir

$$
I_1 = e^{\frac{x}{2}(\alpha+1)+\frac{\tau}{4}(\alpha+1)^2} \Phi(d_1),
$$

y de manera análoga para el caso I_2

$$
I_2 = e^{\frac{x}{2}(\alpha-1)+\frac{\tau}{4}(\alpha-1)^2} \Phi(d_2),
$$

donde $d_2 = \dfrac{x}{\sqrt{2\tau}} + \dfrac{\alpha-1}{2}\sqrt{2\tau}$. Finalmente se tiene

$$
u(x,\tau) = e^{\frac{x}{2}(\alpha+1)+\frac{\tau}{4}(\alpha+1)^2} \Phi(d_1) - e^{\frac{x}{2}(\alpha-1)+\frac{\tau}{4}(\alpha-1)^2} \Phi(d_2).
$$

Al sustituir los valores $a = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2r}{\sigma^2 - 1}\right)$ y $b = (1+a)^2$ en la ecuación original de Black-Scholes, se obtiene

$$
\begin{aligned}
C(S,t) &= X\widetilde{C}(x,\tau) \\
&= Xe^{-(ax+b\tau)} \left[e^{x(a+1)+\tau(a+1)^2} \Phi(d_1) - e^{xa+\tau a^2} \Phi(d_2) \right] \\
&= Xe^{x}\Phi(d_1) - Xe^{-\tau(2a+1)}\Phi(d_2) \\
&= S(t)\Phi(d_1) - Xe^{-r(T-t)}\Phi(d_2),
\end{aligned}
$$

donde ahora

$$
d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad \text{y} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{X}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \tag{3.21}
$$

En resumen, la fórmula de Black-Scholes es

$$C(S,t) = S(t)\Phi(d_1) - Xe^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \tag{3.22}$$

donde d_1 y d_2 están dados por (3.21).

Observaciones:

❶ Note que si $\sigma \to 0$, es decir, si la volatilidad tiende a desaparecer, entonces

- si $S(t) \geqslant X$ se tiene que $d_1, d_2 \to +\infty$, en el límite se obtiene una expresión determinística

$$C(S,t) = S(t) - Xe^{-r(T-t)}. \tag{3.23}$$

- si $\ln S(t) + r\sqrt{T-t} < \ln X$ se tiene que $d_1, d_2 \to -\infty$, entonces $C \to 0$.

❷ El valor de los parámetros S, σ y r se obtiene mediante datos históricos, pero los parámetros T y X son fijados por el poseedor de la opción

3.5

Algoritmos

3.5.1

Algoritmo para Generar una Aproximación al Movimiento Browniano

A continuación se presenta un algoritmo en `Matlab` para generar una aproximación al movimiento Browniano haciendo una partición de N ($N = 250$) subintervalos (Figura 3.1) de misma longitud.

```
clc;
clear;
N=250;
t=1;
```

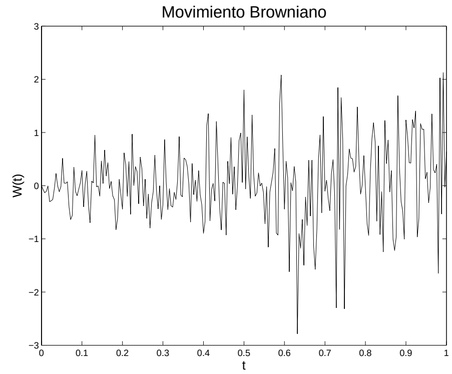

Figura 3.1: Aproximación al movimiento Browniano mediante una caminata aleatoria con una partición de 250 subintervalos

```
dt = t/N;
Dt=(0:dt:t);
for i = 1:N+1
G(i)=[sqrt(Dt(i))*randn(1,1)];
end
plot(Dt,G)
xlabel('t')
ylabel('W(t)')
title('Movimiento Browniano','FontSize',14)
```

3.5.2

Algoritmo para Simular la Dinámica del Precio de una Acción

A continuación se presentará un algoritmo en `Matlab` para generar un posible comportamiento del precio de una acción (Figura 3.2) con los parámetros establecidos en él.

```
clc;
clear;
S0=15;
T=1;
N=70;
r=.25;
sigma=.1;
dt = T/N;
```

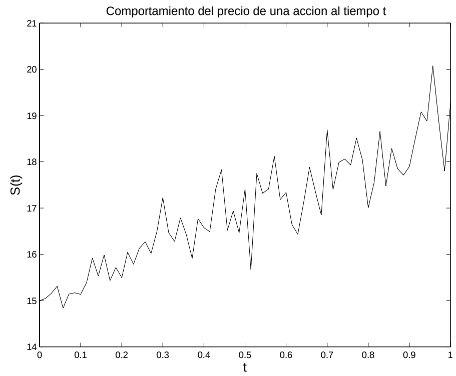

Figura 3.2: Simulación del precio de una acción

```
Dt=(0:dt:T);
for i = 1:N+1
S(i)=S0*cumprod(exp(r*Dt(i)+sigma*sqrt(Dt(i))*randn(1,1)));
end;
colordef black;
plot(Dt,S)
xlabel('t')
ylabel('S(t)')
title('Comportamiento del precio de una accion al tiempo t','FontSize',18)
```

3.5.3

Algoritmo para Obtener el Precio de una Opción Call Europea

Para concluir con esta sección, se presenta un código hecho en `MATLAB` para la valuación de una call europea utilizando la fórmula de Black-Scholes.

```
clear;
S0=1000;
X=1000;
T=5;
r=.25;
sigma=.01;
syms t
d1=(log(S0/X)+(r+(1/2)*(sigma)^2)*(T))/(sigma*sqrt(T));
d2=(log(S0/X)+(r-(1/2)*(sigma)^2)*(T))/(sigma*sqrt(T));
```

```
N1=1/sqrt(2*pi)*int(exp(-(t^2)/2),-inf,d1);
N2=1/sqrt(2*pi)*int(exp(-(t^2)/2),-inf,d2);
C=eval(S0*N1-X*exp(-r*T)*N2);
disp('El precio de la opción es:);
disp(C);
```

CAPÍTULO 4

Aplicación de la Fórmula de Black-Scholes a una Situación Real

El propósito de este capítulo es presentar algunas aplicaciones de la fórmula de Black-Scholes a datos reales, tomando el precio de una cierta acción con datos recopilados de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV).

Para hacer una comparación del modelo con una situación real se obtuvieron los precios de la acción y los valores de los CETES durante marzo de 2006 a febrero de 2007. Esta recopilación nos permitirá establecer los valores de los parámetros σ, r y s (X y T se pueden establecer de manera libre) para poder calcular el precio de la opción en cuestión. Por otra parte, se obtendrá el valor de una opción fijando cuatro parámetros y variar uno de ellos; esto nos permitirá ver el comportamiento del precio de la opción al variar los parámetros. Finalmente, se tomará como precio del subyacente uno de esos valores de los datos recopilados y proponer una fecha de vencimiento T de tal forma que el precio de la acción en T sea conocida y así determinar si conviene o no ejercer el contrato, además de saber de cuánto se hubiese ganado (o perdido) por la realización del contrato opción.

4.1

Descripción del Activo Subyacente

Para lograr un ejemplo de la aplicación de la fórmula de Black-Scholes en un caso real se podría escoger en principio cualquier acción que cotice en una bolsa de valores como activo subyacente. Para este trabajo el activo subyacente se escogió como la acción de Teléfonos de México (*Telmex*) que cotiza en la BMV.

Día hábil	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre	Enero	Febrero
i	12.05	12.41	12.25	11.43	12.19	13.09	13.46	13.95	14.23	14.39	15.32	17.19
ii	12.05	12.43	12.33	11.62	12.35	13.24	13.67	13.80	14.23	14.71	15.39	17.20
iii	12.28	12.63	12.22	11.43	11.73	13.26	13.49	14.20	14.18	14.84	15.38	17.20
iv	12.20	12.62	12.35	11.38	11.80	13.63	13.48	14.32	14.61	14.85	15.50	16.93
v	12.07	12.36	12.43	11.32	11.75	13.52	13.54	14.38	14.40	15.38	15.15	17.05
vi	11.97	12.25	12.73	11.00	11.81	13.35	13.33	14.41	14.44	15.31	14.95	17.09
vii	12.03	12.12	12.67	10.95	11.76	13.18	13.35	14.63	14.39	15.27	14.52	17.02
viii	12.03	11.75	12.65	10.48	11.71	13.08	13.41	14.58	14.26	15.27	14.46	16.79
ix	12.12	11.58	12.44	10.44	11.36	13.14	13.56	14.73	14.39	15.02	14.83	16.36
x	12.26	11.75	12.28	10.64	11.52	12.95	13.50	14.83	14.58	14.89	14.93	16.85
xi	12.22	11.53	12.43	11.17	11.94	13.02	13.31	14.74	14.60	14.92	14.95	17.06
xii	12.14	11.53	12.68	11.28	12.15	13.03	13.56	14.43	14.63	15.12	14.82	17.32
xiii	12.13	11.69	12.34	11.08	12.69	13.00	13.47	14.54	14.67	15.08	14.85	17.41
xiv	12.47	11.66	12.35	10.95	12.36	12.95	13.72	14.54	14.67	15.04	14.76	17.37
xv	12.47	11.72	12.30	11.13	12.37	12.91	13.58	14.60	14.58	15.00	14.76	17.20
xvi	12.68	11.72	11.86	11.29	12.81	12.99	13.45	14.62	14.60	14.96	14.79	17.07
xvii	12.67	11.94	11.81	11.44	12.94	12.94	13.56	14.61	14.60	14.96	14.90	16.99
xviii	12.81	12.09	11.58	11.37	13.10	13.12	13.63	14.72	14.76	15.11	15.52	16.96
xix	12.73	12.13	11.95	11.09	13.07	13.48	13.80	14.77	14.51	15.23	15.37	16.36
xx	12.34	12.21	12.03	11.27	12.95	13.57	14.01	14.32	14.27	15.28	16.09	16.23
xxi	12.28		11.90	11.61	12.85	13.45	14.12	14.17	14.49	15.32	16.09	
xxii	12.30		11.56	11.86		13.49	14.00	14.25	14.39		16.71	
xxiii	12.31		11.17			13.22					16.91	

Cuadro 4.1: Tabla de los precios correspondientes a los días hábiles de la acción de Telmex de marzo de 2006 a febrero de 2007.

En la recopilación de los datos, se obtuvieron un total de 262 observaciones del precio de cierre de la acción estudiada. Cabe mencionar que estos datos se obtuvieron de los días hábiles de la BMV. Se presenta la tabla (Cuadro 4.1) de los datos del precio de la acción obtenidos de marzo de 2006 a febrero de 2007, donde los números en romano indican el día hábil de cada mes y la entrada en la tabla el precio que tuvo la acción en ese día. De igual forma se representa su gráfica correspondiente (Figura 4.1), donde en el eje horizontal son los días consecutivos y en el eje vertical el valor que obtuvo.

En la Figura 4.1 se puede ver que el precio de la acción de Telmex presenta una *tendencia* creciente (la tendencia está definida como el comportamiento de largo plazo) durante el período de la obtención de los datos, además, se tiene también la gráfica (Figura 4.2) de la utilidad logarítmica del precio de las acciones, definida como $\widetilde{\mathsf{K}}(\mathsf{t}) = \ln\left(\frac{\mathsf{S}(\mathsf{t})}{\mathsf{s}}\right)$, para $\mathsf{t} = 0, 1, \ldots$.

Como se puede observar en las figuras 4.1 y 4.2, estas gráficas son prácticamente las mismas salvo que la escala es diferente, es decir, tomando la utilidad logarítmica se ve que no hay mucha variabilidad en el precio de las acciones[1], y por este motivo, se considerará la desviación estándar de la utilidad logarítmica para la volatilidad del precio del subyacente (ver la siguiente sección).

[1]Como se explicó en la sección 3.3.1, al considerar que el precio de las acciones sigue una distribución log-normal, se puede descartar la posibilidad de que tome valores negativos, por lo que el modelo es más creíble. Por esta razón se considera la utilidad logarítmica.

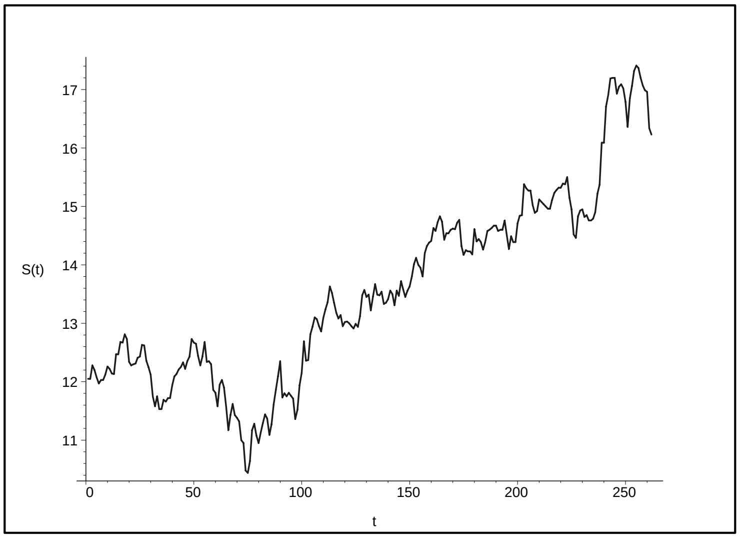

Figura 4.1: Representación gráfica del comportamiento del precio de las acciones de Telmex.

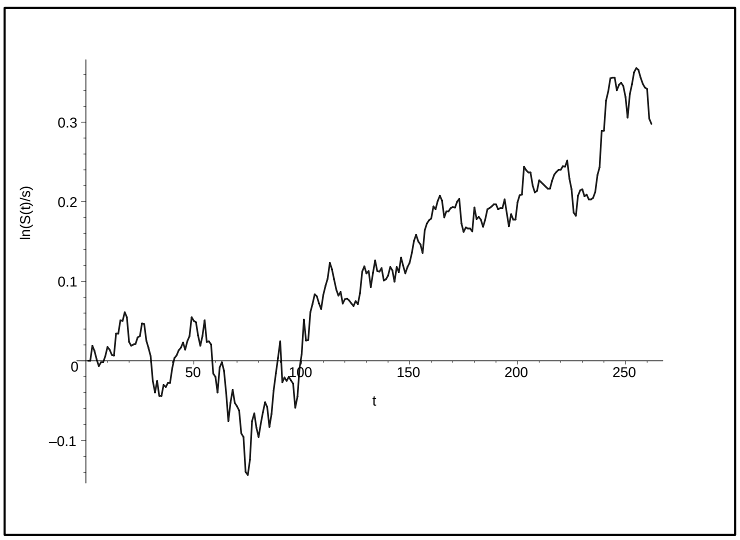

Figura 4.2: Representación gráfica de la utilidad logarítmica del precio de las acciones de Telmex.

4.2

Construcción del Producto Derivado

En esta sección se construye el producto derivado, es decir, se construirá la opción call europea que dependerá del precio de la acción de Telmex. Para esta construcción se tienen que determinar el valor de los parámetros de los que depende la fórmula de Black-Scholes. A continuación se presentan dichos valores para la construcción del producto derivado.

❶ s: el precio de la acción al tiempo 0 (o tiempo inicial), se tomará como el promedio aritmético del los precios de las acciones de Telmex que se obtuvieron en el período de recopilación. En este caso $s = \$13.55706107$.

❷ T: la fecha de vencimiento de la opción, se tomará a un año: $T = 1$.

❸ r: la tasa de interés libre de riesgo, se tomará como el promedio aritmético de la tasa de interés de los CETES a 28 días en el período de observación. En este caso, $r = .07214344608$ (o sea 7.214344608 %).

❹ σ: la volatilidad del activo subyacente, se tomará como la desviación estándar de la utilidad logarítmica (ecuación (3.11), página 74) de los precios observados. En este caso, $\sigma = .1197823001$, es decir, es la desviación estándar de $\ln\left(\frac{S(t)}{s}\right)$ con $t = 0, 1, \ldots$ (Figura (4.2)).

❺ X: el precio strike (o de ejercicio), se tomará simplemente como $X = s \pm \$2$ para diferentes ejemplos.

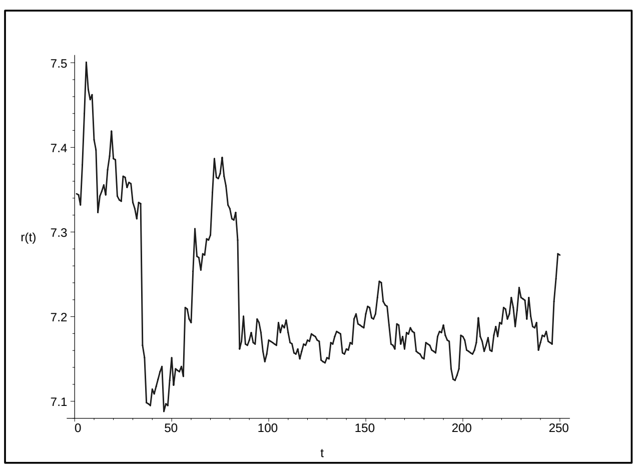

Figura 4.3: Representación gráfica del comportamiento del CETE.

Para el precio de la acción al tiempo $t = 0$ se tomará simplemente la media aritmética de los precios observados, el valor promedio que tomó el activo subyacente durante el período de observación. La fecha de vencimiento de la opción, es simplemente una fecha posible real que se puede considerar para hacer la simulación, y se tomará $T = 1$.

En cuanto a la tasa de interés libre de riesgo, se decidió tomar el promedio aritmético de la tasa de interés de los CETES a 28 días obtenidas en el período marzo de 2006 a

Día hábil	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre	Enero	Febrero
i	7.345206	7.337870	7.108689	7.271220	7.161833	7.181133	7.145402	7.203248	7.179361	7.172196	7.170782	7.219367
ii	7.343853	7.336365	7.117648	7.269765	7.170782	7.190043	7.151512	7.212144	7.186848	7.170782	7.158989	7.197211
iii	7.331976	7.365897	7.126074	7.254996	7.200381	7.186848	7.150082	7.210719	7.182560	7.138318	7.166124	7.222497
iv	7.379277	7.364580	7.135042	7.274267	7.167569	7.195767	7.169325	7.198654	7.181133	7.126074	7.175069	7.200381
v	7.439931	7.352717	7.141150	7.272759	7.166124	7.181133	7.167569	7.197211	7.158989	7.124682	7.160432	7.188278
vi	7.500524	7.358573	7.088039	7.291981	7.172196	7.169325	7.176486	7.203248	7.157194	7.130787	7.158989	7.186848
vii	7.468374	7.357083	7.096981	7.290500	7.181135	7.167912	7.182560	7.222497	7.155763	7.138318	7.178235	7.192882
viii	7.456453	7.334963	7.095000	7.296429	7.169325	7.157194	7.181133	7.241737	7.151512	7.177903	7.188278	7.160432
ix	7.462201	7.327498	7.124682	7.346724	7.167569	7.155763	7.179662	7.240123	7.150082	7.176486	7.176486	7.169325
x	7.408843	7.315650	7.151512	7.386634	7.197211	7.161833	7.157194	7.217938	7.169325	7.172196	7.192882	7.177903
xi	7.396981	7.334861	7.119037	7.364580	7.192882	7.150082	7.155763	7.213613	7.167569	7.160432	7.191441	7.176486
xii	7.323086	7.333469	7.138318	7.363088	7.181133	7.158989	7.161833	7.212144	7.166124	7.158989	7.210719	7.182560
xiii	7.342346	7.166124	7.136447	7.368946	7.158989	7.167569	7.160432	7.190043	7.160432	7.157194	7.209031	7.170782
xiv	7.348200	7.151512	7.135042	7.388120	7.146820	7.166124	7.169325	7.167569	7.158989	7.155763	7.197211	7.169325
xv	7.355551	7.098342	7.141150	7.365897	7.155763	7.172196	7.167569	7.166124	7.157194	7.160432	7.203248	7.167569
xvi	7.343853	7.096981	7.129385	7.354237	7.172196	7.170782	7.197211	7.161833	7.176486	7.169325	7.222497	7.217938
xvii	7.373460	7.095000	7.210719	7.331976	7.170782	7.179662	7.203248	7.191441	7.182560	7.198654	7.210719	7.244671
xviii	7.389651	7.114323	7.209031	7.327498	7.169325	7.177903	7.191441	7.190043	7.181133	7.176486	7.188278	7.274267
xix	7.419205		7.197211	7.315650	7.167569	7.176486	7.190043	7.167569	7.190043		7.207574	7.272759
xx	7.386634		7.192882	7.314173	7.166124	7.172196	7.188278	7.176486	7.177903		7.234303	
xxi	7.385351		7.253558	7.323086	7.192882	7.170782	7.186848	7.161833			7.222497	
xxii	7.342346		7.303830	7.290500		7.148653		7.181133			7.221058	

Cuadro 4.2: Tabla de los datos correspondientes a los días hábiles en que se obtuvo la tasa de interés de los CETES desde marzo de 2006 a febrero de 2007.

febrero de 2007, el cual se obtuvo un total de 249 observaciones. El Cuadro 4.2 muestra los datos de la tasa de interés de los CETES, donde los números en romano indican el día hábil de cada mes y la entrada en la tabla el valor de la tasa de los CETES.

Como se puede observar (Figura 4.3), no hay mucha variabilidad en los valores que tomó la la tasa de interés de los CETES durante el periodo de observación, esto quiere decir que la economía del país es de alguna forma estable. Por esta razón, es razonable considerar el promedio aritmético para la tasa de interés libre de riesgo.

Para el caso de la volatilidad, se tomará la desviación estándar de las utilidades logarítmicas del registro histórico. Por último, uno de los valores que es libre (o casi libre) de proponer (para el poseedor de la opción) es el precio strike. Cualquier valor del precio strike es válido en el modelo. Sin embargo, para los ejemplos que se van a considerar, el valor se tomará, como $X = s + 2$ y $X = s - 2$ (que son razonables como precio strike).

4.3

Valuación de la Opción Construida

En esta sección se valuará de forma explícita la opción construida de la sección anterior dando un par de ejemplos.

Ejemplo 7. *Suponga que se quiere realizar un contrato opción del tipo call europea con los siguientes datos:*

- $s = \$13.55706107$*;*
- $X = \$11.55706107$*;*
- $T = 1$*;*
- $r = 0.07214344608$*;*
- $\sigma = 0.1197823001$*;*

¿cuál es el valor de esta opción?.

Para responder esta pregunta se utiliza la fórmula de Black-Scholes obtenida en el capítulo anterior. En este caso los valores d_1 *y* d_2 *de la fórmula de Black-Scholes son*

$$
\begin{aligned}
d_1 &= 1.994685, \\
d_2 &= 1.874903.
\end{aligned}
$$

Lo que implica que $\Phi(1.994685) = 0.9769619$ *y* $\Phi(1.874903) = 0.9695975$*. Ahora se sustituyen los valores anteriores en la fórmula, lo que resulta*

$$\mathsf{C}(0) = 13.55706107(0.9769619) - 11.55706107(0.9303974)(0.9695975) = 2.81898,$$

En otras palabras, con el precio del activo subyacente de \$13.55706107 *y con un precio strike establecido de* \$11.55706107*, el poseedor de la opción deberá pagar* \$2.81898 *para la realización de dicho contrato.*

Ejemplo 8. *Suponga ahora que se modifica el valor anterior de* X *por* $\mathsf{X} = \$15.55706107$*. ¿Cuál es el valor de la opción con esta modificación?*

Ahora los valores d_1 *y* d_2 *de la fórmula de Black-Scholes son*

$$\begin{aligned} d_1 &= -0.4866307, \\ d_2 &= -0.6064131. \end{aligned}$$

En este caso $\Phi(-0.4866307) = 0.3132601$ *y* $\Phi(-0.6064131) = 0.2721203$*. De igual forma que el ejemplo anterior, se sustituyen los valores anteriores en la fórmula de Black-Scholes para obtener el valor que se quiere, entonces*

$$\mathsf{C}(0) = 13.55706107(0.3132601) - 15.55706107(0.9303974)(0.2721203) = 0.308149.$$

Para un precio strike de \$15.55706107*, el precio a pagar en este caso por dicha opción es de* \$0.308149*.*

Observaciones:

❶ El precio de la opción call europea que se ha determinado es sólo para una acción, si el contrato es para un número fijo k de acciones, entonces el precio total se obtiene multiplicando k por el precio de la opción call europea que se calculó para el caso de una acción (teniendo en cuenta que el precio strike viene dado por kX).

❷ Si el número de acciones que se fijan en la opción es k, con $\widetilde{\mathsf{s}} = \mathsf{sk}$ (el nuevo precio del activo subyacente), pero el precio strike no está dado por kX, entonces, se sustituyen estos nuevos valores en la fórmula de Black-Scholes para determinar el nuevo precio de la opción call europea.

A continuación se presentarán algunos ejemplos, también de forma explícita, de las observaciones que se mencionaron anteriormente.

Ejemplo 9. *Suponga que* $k = 1,000$ *(la opción que se está negociando involucra* $1,000$ *acciones).*

❶ *Se quiere determinar el valor de una opción call europea con los siguientes valores:*

- $s = \$13,557.06107$.
- $X = \$15,557.06107$.
- $T = 1$.
- $r = 0.07214344608$.
- $\sigma = 0.1197823001$.

Los valores d_1 *y* d_2 *de la fórmula de Black-Scholes son:*

$$\begin{aligned} d_1 &= -0.4866307, \\ d_2 &= -0.6064131. \end{aligned}$$

Lo que implica que $\Phi(-0.4866307) = 0.3132601$ *y* $\Phi(-0.6064131) = 0.2721203$. *Se sustituyen los valores anteriores en la fórmula para obtener el precio a pagar por la opción, es decir*

$$C(0) = 13,557.06107(0.3132601) - 15,557.06107(0.9303974)(0.2721203) = 308.149.$$

Este es el precio que se debe de pagar por la opción call europea que involucra $1,000$ *acciones Telmex. Es decir, si el precio del activo subyacente es de* $\$13,557.06107$ *y el precio strike es de* $\$15,557.06107$*, entonces, el precio a pagar por la opción es* $\$308.149$.

❷ *¿Cuál es el precio a pagar por una opción call europea si los valores son los del ejercicio anterior, pero ahora con* $X = \$12,000$*?*

En este caso, los valores d_1 *y* d_2 *de la fórmula son:*

$$\begin{aligned} d_1 &= 1.680701, \\ d_2 &= 1.560918. \end{aligned}$$

Lo que implica que $\Phi(1.680701) = 0.9535895$ *y* $\Phi(1.560918) = 0.9407284$. *Sustituyendo los valores anteriores en la fórmula de Black-Scholes resulta*

$$C(0) = 13,557.06107(0.9535895) - 12,000(0.9303974)(0.9407284) = 2,424.85.$$

Este es el precio que se debe pagar por la opción call europea que involucra $1,000$ *acciones de Telmex. En este caso el precio strike fue de* $\$12,000$*, y ahora el precio que se debe de pagar por la opción es* $\$2,424.85$.

❸ *Por último, se calcula el precio de una opción con un precio strike de* $\mathsf{X} = \$16,000$.

Para este ejemplo, los valores de d_1 *y* d_2 *son*

$$\begin{aligned} d_1 &= -0.7210076, \\ d_2 &= -0.8407903, \end{aligned}$$

donde ahora $\Phi(-0.7210076) = 0.2354524$ *y* $\Phi(-0.8407903) = 0.2002328$. *Sustituyendo nuevamente los valores en la fórmula de Black-scholes resulta*

$$\mathsf{C}(0) = 13,557.06107(0.2354524) - 16,000(0.9303974)(0.2002328) = 211.304.$$

Para esta opción call europea que involucra $1,000$ *acciones de Telmex, y con un precio strike de* $\$16,000$*; el precio a pagar es* $\$211.304$.

Como se observó en el primer ejemplo, el valor de la opción es mil veces lo que se obtuvo en el ejemplo 8.

4.4

Sensibilidad Respecto a los Parámetros.

La fórmula de Black-Scholes deja clara su dependencia con respecto a los parámetros $(\mathsf{T}, \mathsf{X}, \sigma, r, s)$. Aquí se trata de exponer lo que pasa al fijar cuatro parámetros y permitir variar uno solo de ellos. Además, se hará uso del programa que se propuso en la sección 3.5.3 para agilizar el análisis que se expone en este apartado.

4.4.1

Sensibilidad Respecto a T.

Uno de los parámetros de los que depende el precio de la opción es T, la fecha de vencimiento de ésta. Se analizará el siguiente ejemplo donde la fecha de vencimiento toma

T	C(0)
.5	.0679
1	.3081
1.5	.6184
2	.9578
2.5	1.3104
3	1.6679
3.5	2.0258
4	2.3812
4.5	2.7322
5	3.0773
5.5	3.4156
6	3.7465

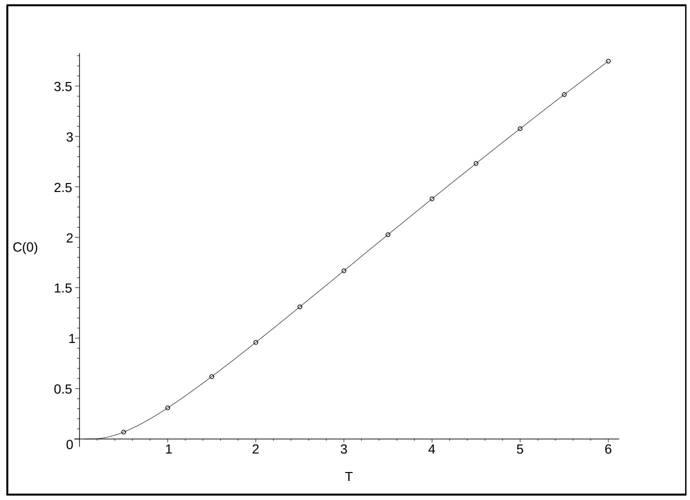

Figura 4.4: Tabla y gráfica del ejemplo 10.

diferentes valores y se verá qué sucede con el precio de la opción.

Ejemplo 10. *Cuál es el precio de una opción call europea si los parámetros tienen los siguientes valores*

- $s = \$13.55706107$.
- $X = \$15.55706107$.
- $T = 0.5, 1, 1.5, \ldots, 6$ *años.*
- $r = 0.07214344608$.
- $\sigma = 0.1197823001$.

Es decir, se calcula el precio de una opción aumentando cada vez la fecha de vencimiento medio año.

En el lado izquierdo de la Figura 4.4 se presenta la tabla donde se encuentran los precios de la opción correspondientes a la fecha de vencimiento T *. El valor de la opción se obtuvo sustituyendo los parámetros en el programa que se implementó en la sección 3.5.3.*

Como se puede observar, el precio de la opción se incrementa cuando T *aumenta, esta observación se presenta en la gráfica en el lado derecho de la Figura 4.4, donde los puntos son la fechas de vencimiento y precios de la opción correspondientes a la tabla presentada. También, en la gráfica se ve el precio de la opción cuando* $T \in [0, 6]$.

La siguiente proposición formaliza la observación presentada en el ejemplo anterior.

Proposición 2. *El precio de una opción call europea es una función creciente con respecto a la fecha de vencimiento* T.

Demostración

Se demostrará que $\dfrac{\partial C}{\partial T} > 0$. El precio de la opción es

$$C = s\Phi(d_1) - Xe^{-rT}\Phi(d_2),$$

donde

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{t^2}{2}} dt,$$

y

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{s}{X}) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right) T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = \frac{\ln(\frac{s}{X}) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Entonces

$$\frac{\partial C}{\partial T} = s\frac{\partial\Phi(d_1)}{\partial T} - Xe^{-rT}\left[\frac{\partial\Phi(d_2)}{\partial T} - r\Phi(d_2)\right].$$

Por la regla de Leibniz se tiene que

$$\frac{\partial\Phi(d_i)}{\partial T} = \Phi'(d_i)\frac{\partial d_i}{\partial T}, \quad \text{para} \quad i = 1, 2$$

donde

$$\Phi'(d_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{d_i^2}{2}},$$

y

$$\frac{\partial d_1}{\partial T} = \frac{2r + \sigma^2}{4\sigma\sqrt{T}},$$

$$\frac{\partial d_2}{\partial T} = \frac{2r - \sigma^2}{4\sigma\sqrt{T}}.$$

Lo cual arroja que

$$\frac{\partial C}{\partial T} = s\Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial T} - Xe^{-rT}\left[\Phi'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial T} - r\Phi(d_2)\right].$$

Nótese además que

$$\frac{\partial d_2}{\partial T} = \frac{\partial d_1}{\partial T} - \frac{\sigma^2}{2\sigma\sqrt{T}},$$

de modo que

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial T} &= \frac{\partial d_1}{\partial T}\left[s\Phi'(d_1) - Xe^{-rT}\Phi'(d_2)\right] + \frac{Xe^{-rT}\Phi'(d_2)\sigma^2}{2\sigma\sqrt{T}} + r\Phi(d_2)Xe^{-rT}\\ &= s\frac{\partial d_1}{\partial T}\left[\Phi'(d_1) - \frac{X}{s}e^{-rT}\Phi'(d_2)\right] + \frac{Xe^{-rT}\Phi'(d_2)\sigma^2}{2\sigma\sqrt{T}} + r\Phi(d_2)Xe^{-rT}.\end{aligned}$$

Ahora, se observa que

$$r\Phi(d_2)Xe^{-rT} > 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{Xe^{-rT}\Phi'(d_2)\sigma^2}{2\sigma\sqrt{T}} > 0\,.$$

Así, si se prueba que

$$\Phi'(d_1) - \frac{X}{s}e^{-rT}\Phi'(d_2) = 0,$$

y así se tendrá que $\dfrac{\partial C}{\partial T} > 0$.

Hay que tener en cuenta que $d_1^2 - d_2^2 = 2\ln\left(\frac{s}{X}\right) + 2rT$, y $\frac{\Phi'(d_1)}{\Phi'(d_2)} = e^{-\frac{1}{2}(d_2^2 - d_2^2)}$. Entonces

$$\frac{\Phi'(d_1)}{\Phi'(d_2)} = \frac{X}{s}e^{-rT}, \tag{4.1}$$

lo que implica

$$\begin{aligned}\Phi'(d_1) - \frac{X}{s}e^{-rT}\Phi'(d_2) &= \Phi'(d_1) - \frac{\Phi'(d_1)}{\Phi'(d_2)}\Phi'(d_2)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Finalmente

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{Xe^{-rT}\Phi'(d_2)\sigma}{2\sqrt{T}} + r\Phi(d_2)Xe^{-rT} > 0. \quad \square$$

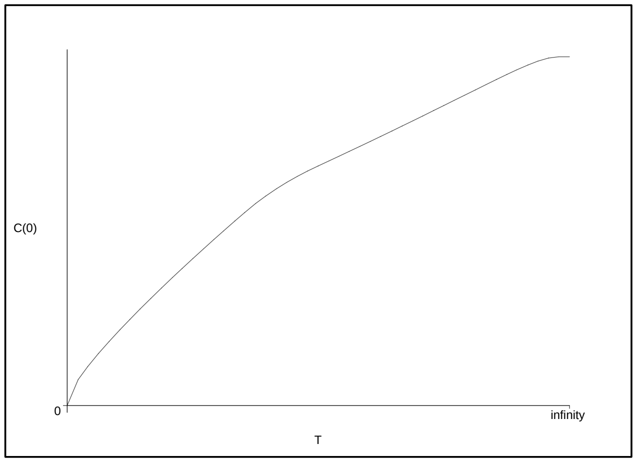

Figura 4.5: Comportamiento del precio de una opción call europea en función de T cuando $T \to \infty$.

En resumen, el precio de la opción en función de T es creciente, y, por esta razón, al aumentar la fecha e vencimiento, el precio de la opción aumenta. Cabe mencionar que si $T \to \infty$, entonces $C(0) \to s$, y esto se obtiene al calcular el siguiente límite

$$\lim_{T\to\infty} C(0) \;=\; \lim_{T\to\infty} \left[s\Phi(d_1) - Xe^{-rT}\Phi(d_2) \right],$$

donde

$$d_{1,2} \;=\; \frac{\ln\left(\frac{s}{X}\right) + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Lo que resulta

$$\lim_{T\to\infty} C(0) = s,$$

ya que

$$\lim_{T\to\infty} \Phi(d_1) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{T\to\infty} Xe^{-rT}\Phi(d_2) = 0.$$

La gráfica correspondiente al resultado anterior se encuentra en la Figura 4.5.

4.4.2

Sensibilidad Respecto a X.

X	C(0)
10	4.2534
10.5	3.7891
11	3.3271
11.5	2.8705
12	2.4248
12.5	1.9984
13	1.6014
13.5	1.2443
14	.9355
14.5	.6795
15	.4766
15.5	.3228

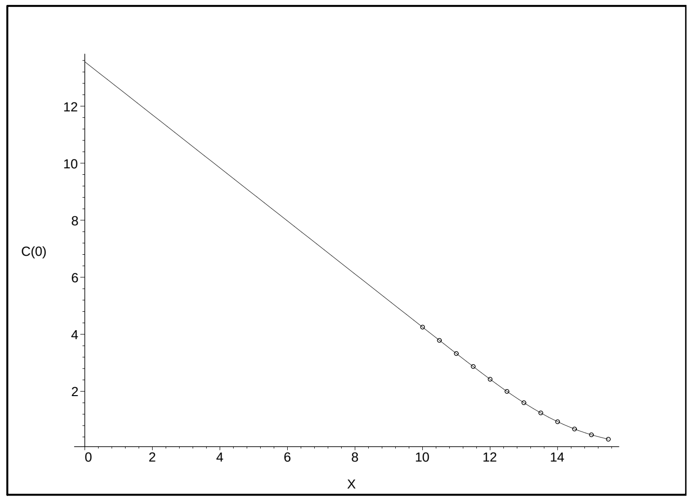

Figura 4.6: Tabla y gráfica del ejemplo 11.

El precio strike es un parámetro que establece la persona que compra la opción y en principio, puede ser un valor arbitrario. Se analiza el siguiente ejemplo donde este parámetro toma diferentes valores, para ver qué sucede con el precio de la opción.

Ejemplo 11. *Cuál es el precio de una opción call europea si los parámetros tienen los siguientes valores*

- $s = \$13.55706107$.
- $X = \$10, \$10.5, \ldots, \$16$.
- $T = 1$.
- $r = 0.07214344608$.
- $\sigma = 0.1197823001$.

En otras palabras, se calculará el precio de una opción aumentando cada vez el precio strike en 0.5 *pesos.*

En el lado izquierdo de la Figura 4.6 se presenta la tabla donde se encuentran los precios de la opción correspondientes al precio strike. Nuevamente, el valor de la opción se obtuvo sustituyendo los parámetros en el programa que se implementó en la sección 3.5.3.

Como se puede observar, el precio de la opción disminuye cuando X *aumenta, esta observación se presenta en la gráfica en el lado derecho de la Figura 4.6, donde los puntos son los valores del strike y precios de la opción correspondientes a la tabla dada. También, la gráfica presenta el precio de la opción cuando* $X \in [0, 15.5]$.

La siguiente proposición formaliza la observación presentada en el ejemplo anterior.

Proposición 3. *El precio de una opción call europea es una función decreciente con respecto al precio strike* X.

Demostración

Basta con demostrar que $\dfrac{\partial C}{\partial X} < 0$. Para ello se calcula

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial X} &= s\frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial X} - e^{-rT}\left[X\frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial X} + \Phi(d_2)\right] \\
&= s\Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial X} - e^{-rT}\left[X\Phi'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial X} + \Phi(d_2)\right]
\end{aligned}$$

puesto que

$$\frac{\partial d_1}{\partial s} = -\frac{1}{X\sigma\sqrt{T}} = \frac{\partial d_2}{\partial s},$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial X} &= s\frac{\partial d_1}{\partial s}\left[\Phi'(d_1) - \frac{Xe^{-rT}}{s}\Phi'(d_2)\right] - e^{-rT}\Phi(d_2) \\
&= -e^{-rT}\Phi(d_2) < 0,
\end{aligned}$$

porque $\Phi'(d_1) - \dfrac{Xe^{-rT}}{s}\Phi'(d_2) = 0$ (por (4.1)). □

En resumen, el precio de la opción como función de X es decreciente, y, por esta razón, al aumentar el precio strike, el precio de la opción disminuye. Este resultado refleja lo que en principio se espera, porque al incrementar el precio strike el valor $(S(T) - X)^+$ disminuye o puede llegar a ser cero, lo que implica que el precio de la opción sea menor, incluso puede que la opción valga cero (en cuyo caso sería un instrumento superfluo).

4.4.3

Sensibilidad Respecto a σ.

σ	C(0)
.05	.0312
.10	.2158
.15	.4577
.20	.7168
.25	.9828
.30	1.2518
.35	1.522
.40	1.7924
.45	2.0623
.50	2.3314
.55	2.5993
.60	2.8656

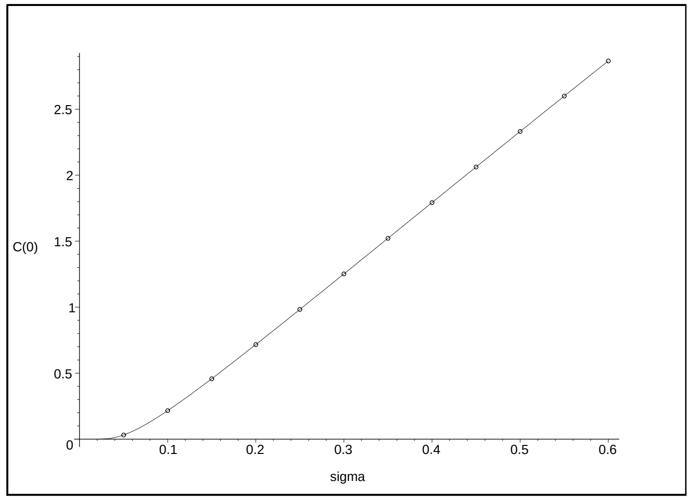

Figura 4.7: Tabla y gráfica del ejemplo 12.

Uno de los parámetros más importantes para determinar el precio de una opción es la volatilidad σ. Eso es tanto por la influencia en el resultado del cálculo σ como por lo que representa: cuantifica la variabilidad del precio del activo subyacente en períodos anuales. Se analizará el siguiente ejemplo donde la volatilidad toma diferentes valores, para ver qué sucede con el precio de la opción.

Ejemplo 12. *Cuál es el precio de una opción call europea si los parámetros tienen los siguientes valores*

- $s = \$13.55706107$.
- $X = \$15.55706107$.
- $T = 1$.
- $r = 0.07214344608$.
- $\sigma = 0.05,\ 0.1, \dots,\ 0.5$.

En otras palabras, se calculará el precio de una opción aumentando cada vez la volatilidad en cinco centésimas.

En el lado izquierdo de la Figura 4.7 se presenta la tabla donde se encuentran los precios de la opción correspondientes a la volatilidad σ.

Como se puede observar, el precio de la opción se incrementa cuando σ *aumenta, esta observación se presenta en la gráfica en el lado derecho de la Figura 4.4, donde los puntos son los diferentes valores que toma* σ *y el precio de la opción correspondientes a la tabla. También, la gráfica presenta el precio de la opción cuando* $\sigma \in [0, 0.6]$.

La siguiente proposición formaliza la observación presentada en el ejemplo anterior.

Proposición 4. *El precio de una opción call europea es una función creciente con respecto a la volatilidad* σ.

Demostración

Para demostrar que $\dfrac{\partial C}{\partial \sigma} > 0$, se calcula

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial \sigma} &= s\frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial \sigma} - Xe^{-rT}\frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial \sigma} \\
&= s\Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - Xe^{-rT}\Phi'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial \sigma},
\end{aligned}$$

puesto que

$$\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} = -\frac{\ln(\frac{s}{X})}{\sigma^2\sqrt{T}} - \frac{r\sqrt{T}}{\sigma^2} + \frac{1}{2}\sqrt{T},$$

$$\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = -\frac{\ln(\frac{s}{X})}{\sigma^2\sqrt{T}} - \frac{r\sqrt{T}}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\sqrt{T},$$

entonces

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} = s\frac{\ln(\frac{s}{X}) + rT}{\sigma^2 T}\left[\frac{Xe^{-rT}}{S}\Phi'(d_2) - \Phi'(d_1)\right] + \frac{s\sqrt{T}}{2}\left[\Phi'(d_1) + \frac{Xe^{-rT}}{s}\Phi'(d_2)\right],$$

teniendo en cuenta la igualdad en (4.1), resulta

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} = s\sqrt{T}\Phi'(d_1) > 0 \quad \square$$

El resultado que se obtuvo puede no parecer muy intuitivo, pero se podría explicar en términos de la variabilidad misma, que refleja de alguna manera lo rápido que podría

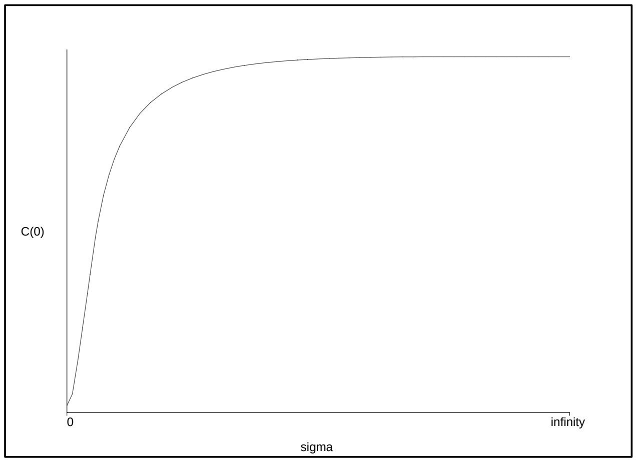

Figura 4.8: Comportamiento del precio de una opción call europea cuando $\sigma \to \infty$.

cambiar el valor del activo subyacente, y la incertidumbre que es necesario afrontar al establecer el contrato. ¿Qué pasa con el precio de la opción cuando $\sigma \to 0$ y $\sigma \to \infty$?

Para el caso en que $\sigma \to 0$, la volatilidad tiende a desaparecer (subsección 3.4.4), lo que implica

- si $s < X$ se tiene que

$$\lim_{\sigma \to +0} \Phi(d_1) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{\sigma \to +0} Xe^{-rT}\Phi(d_2) = 1,$$

  lo que se obtiene

$$C(0) = s - Xe^{-rT}.$$

- si $\ln s + r\sqrt{T} < \ln X$ se tiene que

$$\lim_{\sigma \to +0} \Phi(d_1) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\sigma \to +0} Xe^{-rT}\Phi(d_2) = 0,$$

  lo que implica que $C(0) \to 0$.

Por otra parte, si $\sigma \to \infty$, entonces $C(0) \to s$, ya que

$$\lim_{\sigma \to \infty} \Phi(d_1) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{\sigma \to \infty} Xe^{-rT}\Phi(d_2) = 0.$$

La gráfica correspondiente al resultado anterior se encuentra en la Figura 4.8.

r	C(0)
.005	.1172
.055	.2458
.105	.4577
.155	.7654
.205	1.1645
.255	1.6339
.305	2.1445
.355	2.6688
.405	3.1871
.455	3.6886
.505	4.1687
.555	4.6262

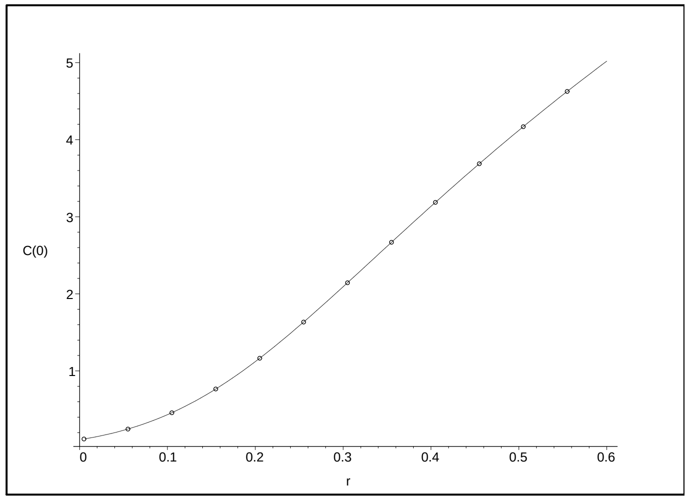

Figura 4.9: Tabla y gráfica del ejemplo 13.

4.4.4

Sensibilidad Respecto a r.

Otro de los parámetros de la fórmula es r, la tasa de interés libre de riesgo. Se analizará el siguiente ejemplo donde este parámetro toma diferentes valores, para ver qué sucede con el precio de la opción.

Ejemplo 13. *Cuál es el precio de una opción call europea si los parámetros tienen los siguientes valores*

- $s = \$13.55706107$.
- $X = \$15.55706107$.
- $T = 1$.
- $r = 0.005, 0.01, \ldots, 0.6$.
- $\sigma = 0.1197823001$.

En otras palabras, se calculará el precio de una opción aumentando cada vez la tasa de interés libre de riesgo en cinco milésimas.

En el lado izquierdo de la Figura 4.9 se presenta la tabla donde representa el precio de la opción correspondiente al valor r *.*

Como se puede apreciar, el precio se incrementa cuando r *aumenta, esta observación se presenta en la gráfica en el lado derecho de la Figura 4.9, donde los puntos son los valores de la tasa de interés y del precio de la opción correspondientes a la tabla. También, la gráfica presenta el precio de la opción cuando* $\mathsf{r} \in [0, 0.6]$.

La siguiente proposición formaliza la observación presentada en el ejemplo anterior.

Proposición 5. *El precio de una opción call europea es una función creciente con respecto a la tasa de interés libre de riesgo* r.

Demostración

Hay que demostrar que $\frac{\partial C}{\partial r} > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial r} &= s\frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial r} - Xe^{-rT}\left[\frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial r} - T\Phi(d_2)\right] \\ &= s\Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial r} - Xe^{-rT}\left[\Phi'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial r} - T\Phi(d_2)\right] \end{aligned}$$

puesto que

$$\frac{\partial d_1}{\partial r} = \frac{\sqrt{T}}{\sigma} = \frac{\partial d_2}{\partial r},$$

se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial r} &= s\frac{\partial d_1}{\partial r}\left[\Phi'(d_1) - \frac{Xe^{-rT}}{s}\Phi'(d_2)\right] + Xe^{-rT}T\Phi(d_2) \\ &= Xe^{-rT}T\Phi(d_2) > 0, \end{aligned}$$

porque $\Phi'(d_1) - \frac{Xe^{-rT}}{s}\Phi'(d_2) = 0$ (por la ecuación (4.1)).

En resumen, si r aumenta también $C(0)$. Este resultado es conciso con lo intuitivo, ya si aumenta la tasa de interés, el precio de la acción también aumenta (y de los activos libres de riesgo con más razón), ya que el precio de este activo está en función de la tasa de interés y un factor aleatorio. Al fijar el precio strike X (y los demás parámetros) y al aumentar la tasa de interés libre de riesgo r se tiene que $S(T) > X$ con mayor probabilidad, y esto da lugar a que se ejerza la opción. Por esta razón, el subscriptor de dicha opción queda desprotegido de este incremento, lo cual hace que el contrato se vuelva desventajoso, a menos a que también se incremente el valor de la opción. Finalmente, sólo por curiosidad,note que si $r \to \infty$, entonces $C(0) \to s$, esto se obtiene al calcular $\lim\limits_{r\to\infty} C(0)$, lo que resulta

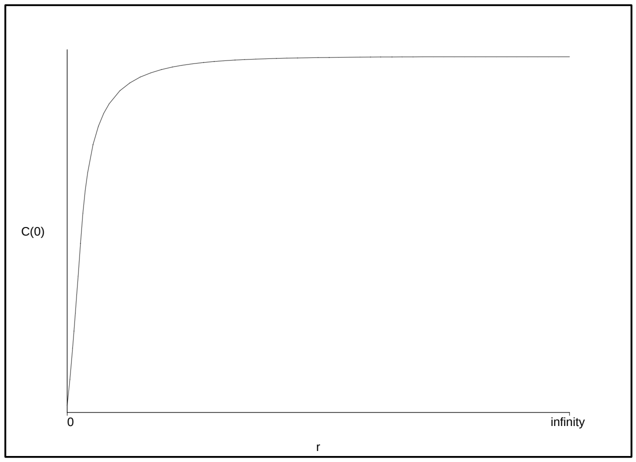

Figura 4.10: Comportamiento del precio de una opción call europea cuando $r \to \infty$.

$$\lim_{r\to\infty} C(0) = s,$$

ya que

$$\lim_{r\to\infty} \Phi(d_1) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{r\to\infty} Xe^{-rT}\Phi(d_2) = 0.$$

La gráfica correspondiente al resultado anterior se encuentra en la Figura 4.10.

4.4.5

Sensibilidad Respecto a s.

El parámetro s del cual depende la fórmula de Black-Scholes es importante, ya que es el precio del activo subyacente (la acción Telmex) al tiempo en que se va a comprar la opción. El siguiente ejemplo muestra lo que sucede cuando este parámetro toma diferentes valores y el efecto obtenido en el precio de la opción.

Ejemplo 14. *Cuál es el precio de una opción call europea si los parámetros tienen los siguientes valores*

- $s = \$10,\ \$10.5,\ \ldots,\ \$16.$
- $X = \$15.55706107.$
- $T = 1.$
- $r = 0.07214344608.$

s	C(0)
10	.0004
10.5	.0016
11	.0056
11.5	.0161
12	.0397
12.5	.0858
13	.1658
13.5	.2906
14	.4689
14.5	.7048
15	.9976
15.5	1.3422

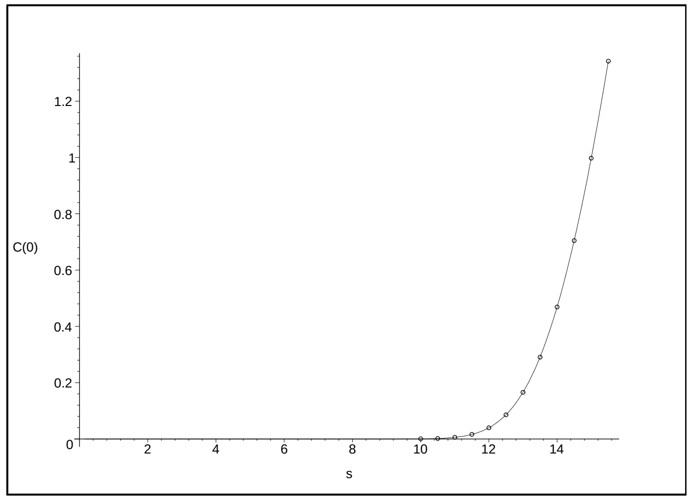

Figura 4.11: Tabla y gráfica del ejemplo 14.

- $\sigma = 0.1197823001$.

En otras palabras, se calculará el precio de una opción aumentando cada vez el precio inicial del activo subyacente en 0.5 *pesos.*

En el lado izquierdo de la Figura 4.11 se presenta la tabla donde representa el precio de la opción correspondiente al valor s.

Como se puede apreciar, el precio se incrementa cuando s *aumenta, esta observación se presenta en la gráfica en el lado derecho de la Figura 4.9, donde los puntos son los valores que toma el subyacente al inicio de contrato y los precios de la opción correspondientes* s. *También, la gráfica presenta el precio de la opción cuando* $s \in [0, 15.5]$.

La siguiente proposición formaliza la observación presentada en el ejemplo anterior.

Proposición 6. *El precio de una opción call europea es una función creciente con respecto a* s.

Demostración

Hay que demostrar que $\dfrac{\partial C}{\partial s} > 0$. Para ello se calcula

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial s} &= s\frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial s} + \Phi(d_1) - Xe^{-rT}\frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial s} \\
&= s\Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial s} + \Phi(d_1) - Xe^{-rT}\Phi(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial s},
\end{aligned}$$

puesto que

$$\frac{\partial d_1}{\partial s} = \frac{1}{s\sigma\sqrt{T}} = \frac{\partial d_1}{\partial s},$$

resulta entonces que

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial s} &= s\frac{\partial d_1}{\partial s}\left[\Phi'(d_1) - \frac{Xe^{-rT}}{s}\Phi'(d_2)\right] + \Phi(d_1)\\ &= \Phi(d_1) > 0,\end{aligned}$$

porque $\Phi'(d_1) - \dfrac{Xe^{-rT}}{s}\Phi'(d_2) = 0$ (por (4.1)). □

En resumen, el precio de la opción como función de s es creciente, y, por esta razón, al aumentar el precio de la acción en el momento en que se realiza el contrato, el precio de la opción aumenta. Este resultado confirma la similitud que tiene la opción con cualquier otro instrumento financiero: al incrementar el precio del activo subyacente, mayor será el precio que hay que pagar por la opción.

4.5

Simplificación en un Caso Particular

En la sección 4.2, el precio strike que se propuso para el activo subyacente fue de $X = s \pm 2$. Es válido preguntarse cuál sería el valor más apropiado para X. Para responder esta pregunta, se propone el siguiente análisis: si el activo subyacente fuese determinista, no tendría sentido hablar de contratos opción, ya que su precio S sería conocido para todo tiempo futuro t; en ese caso al hablar de opciones el precio strike X debería ser igual al valor futuro del precio del subyacente (precio del subyacente en la realización del contrato) a la fecha de vencimiento T de la opción, es decir $X = se^{rT}$, lo cual implica que el precio de la opción tendría que ser cero (ver ecuación (3.23)). Teniendo en cuenta lo antes mencionado, ¿convendrá proponer para el caso de las acciones de Telmex $X = se^{rT}$?.

Un parámetro muy importante es σ, éste nos indica qué tanto "varía" el precio de la acción durante el año. En el ejemplo de las acciones de Telmex este parámetro fue relativamente pequeño, es decir, no hubo mucha variabilidad (figura 4.2) en ese período. Esto sugiere tomar a $X = se^{rT}$ con lo cual se llegaría al siguiente resultado:

La fórmula para valuar una opción call europea está dada por

$$C(0) = s\Phi(d_1) - Xe^{-rT}\Phi(d_2),$$

donde

$$d_{1,2} = \frac{\ln\left(\frac{s}{X}\right) + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

puesto que se está suponiendo $X = se^{rT}$, se tiene entonces

$$d_{1,2} = \pm\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}.$$

De donde se obtiene

$$\begin{aligned} C &= s\Phi(d_1) - Xe^{-rT}\Phi(d_2) \\ &= s\left[\Phi(d_1) - \Phi(d_2)\right] \\ &= \frac{s}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}}^{\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \end{aligned}$$

Bajo el supuesto enunciado antes ($X = se^{rT}$), esta última integral sería la que proporciona el costo de la opción y en ella no aparecen los parámetros r y X. Se puede avanzar un poco más si se aproxima su valor para lo cual se pueden emplear varios métodos numéricos.

Dado que $\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$ es relativamente pequeño en aplicaciones prácticas, casi cualquier método dará aproximaciones razonablemente precisas, aquí se empleará el siguiente resultado: si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right].$$

Esta aproximación se conoce como *regla de Simpson*; este método representa una aproximación de una integral definida mediante un polinomio cuadrático [1].

Teniendo en cuenta lo anterior, se tiene finalmente

$$C(0) \approx \frac{s\sigma\sqrt{T}}{3\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{\sigma^2 T}{8}} + 2\right]. \quad (4.2)$$

Para mostrar la utilidad de la fórmula 4.2 se presentarán algunos ejemplos tomando precios que tuvo la acción de Telmex durante el mes de marzo de 2006 (Tabla 4.1), con la suposición de que $X = se^{rT}$.

Ejemplo 15. *Cuál será el precio de una opción call europea si se tienen los siguientes valores:*

- $s = \$12.05$.
- $X = \$12.95145460$.
- $r = 0.07214344608$.
- $T = 1$.
- $\sigma = .1197823001$.

En este caso s *es el primer valor del precio de la acción Telmex del mes de marzo de* 2006 *(ver Cuadro 4.1). Al sustituir los valores en la ecuación (4.2) resulta*

$$\begin{aligned} C(0) &\approx \frac{(12.05)(0.1197823001)}{3\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{(0.1197823001)^2}{8}}+2\right] \\ &= 0.5754802. \end{aligned}$$

En otras palabras, el precio de la opción call europea tomando como precio strike el valor futuro del subyacente llevado a la fecha de vencimiento de la opción es de $\$0.5754802$. *Por otra parte, si se calcula el precio de la opción directamente de la fórmula resultaría que* $C(0) = \$0.575482$, *lo que resulta que la aproximación 4.2 es bastante buena, con un error de* 1.8×10^{-6}.

Ejemplo 16. *Cuál será el precio de una opción call europea si se tienen los siguientes valores:*

- $s = \$11.97$.
- $r = .07214344608$.
- $X = \$12.865469$.
- $T = 1$.
- $\sigma = .1197823001$.

Al igual que en el ejemplo anterior, s *es el sexto valor del precio de la acción que tomó durante marzo de* 2006 *(ver Cuadro 4.1). Sustituyendo los valores en la ecuación (4.2) resulta*

$$\begin{aligned} C(0) &\approx \frac{(11.97)(0.1197823001)}{3\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{(0.1197823001))^2}{8}}+2\right] \\ &= 0.5716594. \end{aligned}$$

En este caso, el precio de la opción call europea es $\$0.5716594$. *De igual forma, el precio de la opción al sustituir directamente en la fórmula de Black-Scholes es* $C(0) = \$0.571656$, *con un error de* 3.4×10^{-6}.

En estos ejemplos se puede observar que la aproximación (ecuación 4.2) al precio de la opción consta de un error de orden de 10^{-6}.

Observación

i	16.26	v	16.51	ix	16.63	xiii	16.89	xvii	17.62	xxi	18.45
ii	16.14	vi	16.64	x	16.58	xiv	17.53	xviii	17.95	xxii	18.83
iii	15.98	vii	17.02	xi	16.61	xv	17.67	xix	17.98		
iv	16.43	viii	17.30	xii	16.49	xvi	17.73	xx	18.51		

Cuadro 4.3: Tabla de los precios de la acción de Telmex durante el mes de marzo de 2007 en los días hábiles

¿Cuánto se gana (o pierde) realmente por una opción call europea? Suponga que se quiere comprar una opción call europea con activo subyacente la acción de Telmex. El contrato se establece el primer día en que efectúa operaciones la BMV en el mes de marzo de 2006 (Cuadro 4.1), ese día, el precio de la acción fue de $s = \$12.05$. El contrato se establece a un año $T = 1$ con un precio strike de $X = \$14$, además, se estima que la volatilidad es de $\sigma = 0.1197823001$ y una tasa de interés libre de riesgo de $r = .07214344608$. El precio a pagar por dicha opción es $\$0.232962$ (y esto es porque $C(0) = 12.05(.2775847)$-14$(.9303974)$ $(.2389098)$=$\$0.232962$). Ya llegada la fecha de vencimiento de la opción, el propietario de ésta decide si ejercer o no dicho contrato; se da cuenta que el precio de la acción es de $\$16.26$, primer precio correspondiente al mes de marzo de 2007 (Cuadro 4.3). Como se puede observar, al poseedor de la opción le conviene ejercerla, puesto que va a comprar la acción en \$14. En este caso, la ganancia que obtiene por la compra de la acción a este precio es de $\$2.26$. ¿Cuánto es lo que gana realmente? Para contestar esta pregunta, se tiene que tomar en cuenta el valor futuro a un año (puesto que $T = 1$) del precio de la opción ($C(0)e^{.07214344608} = \$0.25038977$) para determinar la ganancia "real" que se obtiene. En este caso es de $\$2.26 - \$0.25038977 = \$2.00961022$, que es la ganancia que obtiene por la compra del activo subyacente menos lo que pagó por la opción pero llevado a valor futuro (un año). Por otra parte, si el precio strike hubiese estado por encima del precio de la acción en la fecha de vencimiento, no se ejercería, lo cual implica una pérdida de sólo $\$0.25038977$.

En resumen, si $S(T) \geqslant X$ conviene ejercer la opción, lo que implica una ganancia por la compra del subyacente de $S(T) - X$. Si se toma en cuenta lo que se paga por la opción pero llevada a valor futuro T, entonces, se gana realmente (o posiblemente sea pérdida) $S(T) - X - C(0)e^{rT}$. Por otra parte, si $X < S(T)$ no conviene ejercer la opción, lo cual implica una pérdida de $C(0)e^{rT}$ por la compra de dicho contrato. En resumen, la ganancia total para el poseedor de la opción es

$$\begin{cases} S(T) - X - C(0)e^{rT} & \text{si} \quad S(T) > X, \\ \\ -C(0)e^{rT} & \text{si} \quad S(T) \leqslant X. \end{cases}$$

Para los ejemplos 15 y 16, y con la ayuda de la tabla de los precios de la acción de Telmex en el mes de marzo de 2007, se tiene una ganancia total de \$2.690013 y \$2.7801052 respectivamente.

Conclusiones

El propósito de este trabajo fue presentar algunos ejemplos de valuación de opciones del tipo call europea, usando datos reales de los precios de la acción de Telmex y de la tasa de interés de los CETES recopilados durante marzo de 2006 a febrero de 2007; esta información permite establecer los parámetros σ, r y s, ya que X y T son arbitrarios (los establece el poseedor de la opción), para la valuación de la opción correspondiente. El análisis de estos ejemplos permitió, por una parte, constatar que la fórmula de Black-Scholes responde de manera directa a la pregunta sobre cuál es el precio justo a pagar por el producto derivado de interés. Por otra parte, la misma aplicación dio lugar a analizar el comportamiento del precio de la opción determinado por la fórmula con respecto a cada uno de sus parámetros.

La fórmula de Black-Scholes es una herramienta que permite valuar cualquier producto derivado. Para obtener un modelo más realista se pueden relajar algunas hipótesis para obtener un modelo más preciso para la valuación de opciones, y posiblemente más complejo. Se puede pensar que hay pagos de dividendos y considerar que la tasa de utilidad libre de riesgo no se tome como constante. De lo anterior, resulta claro que la aplicabilidad de dicha fórmula es realmente amplia.

Por último, y no menos importante, se presentan las aportaciones de este trabajo (que se distingue de otros relacionados a este tema), las que se mencionan a continuación:

❶ Se describieron los paso a seguir, así como los supuestos económicos y financieros, para obtener la fórmula de Black-Scholes.

❷ Se desarrolló un programa en `MatLab` para el cálculo de una opción, dados los parámetros (T, X, σ, r, s).

❸ Se recopilaron los precios de una acción en particular y los valores que tomó la tasa de interés de los CETES, durante marzo de 2006 a febrero de 2007, los cuales sirvieron para establecer los valores de σ, r y s (ya que T y X fueron arbitrarios) para la valuación de la opción correspondiente a esos datos.

❹ Se presentaron ejemplos en los cuales se analizó el precio de la opción cuando varia un parámetro y dejando fijos los demás.

❺ Se consideró, como caso particular, que el precio *strike* sea el valor futuro a la fecha de vencimiento del precio del subyacente al instante en que se establece dicho contrato; esta suposición permitió simplificar la fórmula de Black-Scholes a una fórmula en la que sólo depende de s, T y σ. Cabe mencionar que en los ejemplos que se discutieron se obtuvo un error del orden 10^{-6}.

❻ Finalmente, se dio un ejemplo para valuar una opción call europea proponiendo como precio del activo subyacente uno conocido (precio obtenido en la recopilación) y se estableció una fecha de vencimiento apropiada para la cual se conociera el precio de la acción y así determinar si conviene o no ejercer dicho contrato. Esto nos permite establecer la ganancia (o pérdida) de adquirir la opción tomando en cuenta lo que se paga por la opción.

BIBLIOGRAFÍA

[1] T.M. Apostol, (2002). *Calculus*. Volumen II, Editorial Reverté. España.

[2] L. Bachelier, (1900). *Théorie de la spéculation*. Tesis doctoral, Facultad de Ciencias de París. Ecole Norm. Sup. v. 17, pp $21 - 86$.

[3] R.G. Bartle, (1995). *The elements of Integration and Lebesgue Measure*. Wiley Classics Library. New York.

[4] M. Baxter y A. Rennie, (2003). *Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing*. Cambridge Universty Press. New York.

[5] N.H Bingham y R. Kiesel, (2004). *Risk-Neutral Valuation: Hedging of Financial Derivatives*. Springer-Verlag. U.S.A

[6] J.P. Bouchaud y M. Potters, (2000). *Theory of financial risks: from Statistical Physics to Risk Management*. Cambridge Universty Press. United Kingdom.

[7] F. Black y M. Scholes, (1973). *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. J. Political Economy 81. pp. $637 - 659$.

[8] Z. Brzezniak y T. Zastawniak (2003). *Basic Stochastic Processes*. Springer-Verlag. Great Britain.

[9] Z. Capinski y T. Marek, (2003). *Mathematics for Finance*. Springer-Verlag. U.S.A.

[10] W. Feller, (1968). *An Introduction to Probability Theory and Its Application*. Volúmen II, Cambridge University Press. U.S.A.

[11] H.J. Girlich, (2002). *Bachelier´s Predecessors*. Universidad de Leipzig, Alemania.

[12] G. Chichilnisky, (1996). *Fischer Black: The Mathematics of Uncertainty.* Notices of the American Mathematical Society. Volumen 43. número 3. pp. $319-322$. New York.

[13] B.J. Ford, (1992). *Brownian Movement in Clarkia Polen: a Reprise of the First Observations.* The microscope. **40**. pp. $235-241$.

[14] J.C. Hull, (2003). *Options, Futures and other Derivatives.* Editorial Prentice Hall. U.S.A.

[15] M. Joshi, (2003). *The Concepts and Practice of Mathematical Finance.* Cambridge University Press. United Kingdom.

[16] I. Karatzas y S. Shreve, (1999). *Methods of Mathematical Finance.* Springer-Verlag. New York.

[17] D. Lamberton y B. Lapeyre, (2000). *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance.* Editorial Chapman & Hall. U.S.A

[18] M.D. Levi, (1997). *Finanzas Internacionales.* Editorial Mc Graw Hill. México.

[19] J. Macbeth y L. Merville (1979). *An Empirical Examination of the Black-Scholes Call Option Pricing Model.* The journal of finance. pp. $73-86$.

[20] R. Mancilla, (2003). *Introducción a la Econofísica.* Editorial Equipo Sirius. México.

[21] J. Martínez, (1999). *La Hipótesis de los Mercados Eficientes, el Modelo del Juego Justo y el Recorrido Aleatorio.* Universidad de A Coruña.

[22] R. Merton, (1973). "Theory of Rational Option Pricing". *The Bell Journal of Economics and Management Science.* Volumen 4. número 4. pp. $141-183$. Massachusetts.

[23] R. Merton, (1990). *Continuous Time Finance.* Editorial Cambridge Ma & Oxford, United Kingdom.

[24] E. Mordecki, (1998). *Modelos Matemáticos en Finanzas: Valuación de Opciones.* Centro de Matemáticas. Facultad de Ciencias Montevideo, Uruguay.

[25] M. Marek y R. Marek, (1998). *Martingale Methods in Financial Modelling.* Springer-Verlag. New York.

[26] R. Roca, (1997). *Robert Merton y Myron Scholes: Premios Nobel de Economía* 1997 *y sus Aportes a la Teoría Financiera.* Revista de la Facultad de Ciencias Económicas de la UNMSM.

[27] H. L. Royden, (1998). *Real Analysis.* Editorial Prentice Hall. U.S.A.

[28] S. Ross, (2003). *An Elementary Introduction to Mathematical Finance*. Cambridge University Press. U.S.A.

[29] P. Samuelson, (1965). *Rational Theory of Warrant Pricing*. Industrial Management. Reviews 6. pp. $13 - 32$.

[30] N. Samuelson y W. Paul, (2000). *Economía*. Editorial Mc Graw Hill. México.

[31] K. Sobczyk, (1991). *Stochastic Differential Equations*. Kluwer Academic Publishers.

[32] S.E. Shreve, (2004). *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model*. Springer-Verlag. U.S.A.

[33] S.E. Shreve, (2004). *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer-Verlag. U.S.A.

[34] F. Venegas, (2006). *Riegos Financieros y Económicos: Productos Derivados y Decisiones Económicas Bajo Incertidumbre*. Editorial Cengage Learning. México.

[35] J. Villamil, (2006). *Modelos de Valoración de Opciones Europeas en Tiempo Continuo*. Cuadernos de Economía. XXV (**44**): pp. $177 - 196$, Bogotá.

Cybergrafía

[36] `http//es.wikipedia.org/wiki/Louis_Bachelier`

[37] `http//www.monografias.com/trabajos21/modelo-black-scholes-merton.shtml`

[38] `http//www.wikipedia.org`