



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DEL ESTADO DE HIDALGO



INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN TECNOLOGÍAS DE INFORMACIÓN Y SISTEMAS

INGENIERÍA EN ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES

**DISEÑO, CONSTRUCCIÓN Y CONTROL DE UN
“*BALL AND BEAM*”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE INGENIERO EN
ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES

PRESENTAN:

FÉLIX CUEVAS LÓPEZ

MARCO ANTONIO MORA REYES

CÉSAR OLVERA MERA

ASESORES:

M. EN C. MARÍA ANGÉLICA ESPEJEL RIVERA

DR. LUIS ENRIQUE RAMOS VELASCO

PACHUCA HGO., MÉXICO 19 DE FEBRERO DE 2008



Félix Cuevas López

Marco Antonio Mora Reyes

César Olvera Mera

Diseño, construcción y
control de un “*Ball and
Beam*”

*Esta tesis la dedico a mi familia,
a mi papá Félix, a mi mamá Esperanza y a mi hermano Pédro,
quienes siempre han estado conmigo,
en fracasos, alegrías y ha hecho lo que ahora soy.
Un hombre de bien.
Félix III*

Agradecimientos

Quisiera mencionar a tantas personas que al momento de escribir estas palabras pasan por mi mente, sin embargo no quisiera dejar fuera a nadie por error o por falta de espacio así que comenzaré de una vez.

Agradezco a Dios y a la vida por ponerme en este lugar y momento donde puedo ver alcanzada una de tantas metas en mi vida. Agradezco a mi familia a mis padres por ese amor, por ese ejemplo de responsabilidad y rectitud, por todas esos momentos de tarea, llantos, juegos, risas, platicas y lecciones de vida que me han seguido hasta hoy, a mi hermano Pédro por ser como eres, por estar aquí conmigo, por todos esos momentos de compañía, complicidad, risas, llantos y todas esas tocaditas de mucho rock (y los q faltan).

Agradezco a mis abuelos Pedro y Aurora que me cuidan desde el cielo, Félix y Concha que me cuidan desde la tierra.

Agradezco a la Fam. Mancillas López a quienes quiero mucho y han sido un gran apoyo, a mis tíos Baudelio y Eugenia a mis primos Yaucalli, Yoloxochitl y Cuauhtemoc, y a mi sobrino Ahuitz.

Agradezco a la Fam. Cuevas Rubín por los buenos deseos y por estar ahí conmigo.

Agradezco a mis compañeros de tesis que además son mis amigos de toda la uni, por todos esos momentos que pasamos y por ser el mejor equipo.

Agradezco a mis amigos que siempre han estado ahí me han apoyado y me han consolado, me han aguantado y me han regañado, se que cuento con ellos y ellos conmigo.

Finalmente pero no menos importante agradezco enormemente a mis asesores, al Dr. Luis Enrique y la M. en C Angelica por el apoyo y paciencia para la realización de este trabajo, también por todas esas lecciones no solo académicas si no de vida, mil gracias.

*Esta tesis,
la dedico a mis padres y a mi hermano,
a quienes les debo todo lo que soy y seré.
Marco*

Agradecimientos

A mi papá y mi mamá, quiero agradecerles toda su comprensión, amor y cariño durante toda mi vida, gracias por confiar en mí, gracias por ser pacientes, gracias por estar conmigo en todo momento, gracias por las lecciones de vida, gracias por todo, gracias por ser un buen ejemplo, sin ustedes ninguno de mis logros hubiera sido posible.

A mi hermano Martín, gracias por compartir tantos momentos agradables y otros tantos no tan agradables, gracias por tantas risas y alegrías, eres el mejor hermano, gracias carnal.

A mi tía Magy gracias por los consejos, pláticas y palabras de aliento, agradezco también el apoyo de mi tío Sergio y Chio, a mis tíos Fidel, Elvira y Elsa gracias por su cariño, a mis primos Chuchín y Dianis.

También quiero agradecer el apoyo de mis tíos Bety, Norma y Quique, gracias por sus buenos deseos, y por supuesto a mi abuela Juana gracias por todo abuela, yo sé que soy tu nieto favorito, a mis primos Isabel, Alan y Adriana.

Quiero agradecer también a mis compañeros de tesis, amigos y equipo de toda la uni, Cuevas y César, gracias por tantas inolvidables anécdotas que pasamos.

Un agradecimiento a una persona especial, gracias por compartir parte de tu vida conmigo, gracias chikita por todo tu amor, comprensión y cariño, gracias Diana.

Finalmente, agradezco a mis asesores de tesis Dr. Luis Enrique Ramos Velasco, gracias por los consejos y M. en C. María Angélica Espejel Rivera, gracias por su tiempo y dedicación.

*Este trabajo y toda mi vida,
los dedico a mis padres y mi hermana,
por su apoyo y cariño siempre incondicionales.*
César

Agradecimientos

Quiero agradecerles a mis padres Juan y Florencia, quienes me han apoyado durante 23 años de mi vida y que siempre han estado ahí conmigo en los momentos gratos, pero también en los momentos difíciles para darme ánimos, también a mi hermana Brigitte quien siempre ha estado a mi lado apoyándome en cada momento de mi vida.

Gracias papá por ayudarme a salir adelante en mi formación profesional, de verdad te estoy gratamente agradecido y lo estaré así por toda la vida.

Gracias mamá por cuidarme como hasta ahora, gracias a tu coraje y entrega para conmigo es que he podido salir adelante no solo en mi formación como profesionista sino también como ser humano.

Gracias hermana por tu cariño y comprensión en todo momento.

También quiero agradecer a toda mi familia por haber creído en mí y por su apoyo incondicional en todo momento, sin sus palabras de aliento no habría podido salir adelante.

Un agradecimiento especial a mis asesores de tesis Dr. Luis Enrique y M. Ma. Angélica ya que gracias a ellos fue posible la realización de ésta, de verdad fue un placer haber trabajado con ustedes.

A mis camaradas y por siempre amigos quienes colaboraron conmigo en este trabajo para sacarlo adelante, gracias Félix y Marco.

Y a ti princesa que has estado a mi lado durante prácticamente toda mi formación profesional y que gracias a tu apoyo todo lo que me he propuesto lo he logrado, gracias Tania.

Resumen

Diseño, construcción y control de un “*Ball and Beam*”

El *Ball and Beam* (*Bola y Barra*) así como otros sistemas surgen en esa búsqueda de hacer más sencilla la manera de aprender temas de control así como poder realizar prácticas que involucren a los alumnos con los temas de control que se ven en clase. En este trabajo se presenta el desarrollo del sistema *Ball and Beam* el cual se encuentra en la clasificación de los sistemas subactuados ya que cuenta con dos grados de libertad y un solo actuador, consiste en balancear una bola de acero sobre una barra y llevarla a una posición deseada, balancear la bola de acuerdo a ciertos patrones de control o que la bola represente el comportamiento de un sistema dado. La primera parte de este trabajo esta dedicada al diseño de todas las partes que conforman el sistema incluyendo los diagramas que describan o especifiquen medidas, ángulos, pesos (según sea el caso), despiece y materiales, tomando como referencia algunos prototipos existentes. En la segunda parte se obtiene el modelo matemático del sistema a partir del método Euler-Lagrange. Por último se presentan las simulaciones y resultados de laboratorio.

Índice general

Dedicatoria	III
Agradecimientos	V
Dedicatoria	VII
Agradecimientos	IX
Dedicatoria	XI
Agradecimientos	XIII
Resumen	XV
Índice general	XVII
Índice de figuras	XX
Índice de cuadros	XXIII
Acrónimos	XXV
Notación	XXVII
1. Introducción	1
1.1. Versiones del <i>Ball and Beam</i>	2
1.2. Algunos ejemplos de robots subactuados	5
1.3. Objetivos de la tesis	7
1.4. Planteamiento del problema	8
1.5. Solución propuesta	8
1.6. Alcance y limitaciones	8
1.7. Justificación	9
1.8. Aportaciones de la tesis	10
1.9. Cuerpo del trabajo de tesis	10
2. Diseño del <i>Ball and Beam</i>	11
2.1. Etapa Mecánica	11
2.1.1. Sistema de soporte y acoplamiento	11
2.1.1.1. Esqueleto	12
2.1.1.2. Sistema de acoplamiento	17

2.1.1.3.	Eslabón	20
2.1.1.4.	Pivote	22
2.1.2.	Sistema de balanceo	26
2.1.2.1.	Barra	26
2.1.2.2.	Bola	30
2.2.	Etapa Electrónica	32
2.2.1.	Etapa de potencia	32
2.2.1.1.	Entrada y rectificación	33
2.2.1.2.	Regulación	34
2.2.1.3.	Salida	35
2.2.2.	Etapa de sensado	35
2.2.2.1.	Sensor de la barra	35
2.2.2.2.	Sensor de la inclinación de la barra	36
2.2.3.	Etapa de control	37
2.2.3.1.	Puente H	37
2.2.3.2.	Microcontrolador	39
2.3.	Comentarios	39
3.	Modelado del sistema	41
3.1.	Introducción	41
3.2.	Ecuaciones dinámicas del <i>Ball and Beam</i>	42
3.2.1.	Energía cinética del sistema <i>Ball and Beam</i>	43
3.2.2.	Energía potencial del sistema <i>Ball and Beam</i>	46
3.2.3.	Lagrangiano y coordenadas generalizadas del <i>Ball and Beam</i>	47
3.2.4.	Cambio de variables	52
3.3.	Linealización del modelo no lineal	53
3.3.1.	Punto de equilibrio	54
3.3.2.	Expansión por series de Taylor	55
3.3.3.	Ecuaciones en el espacio de estados	56
3.3.4.	Linealización del sistema mediante <i>MATLAB</i>	57
3.3.5.	Función de transferencia para el sistema en lazo abierto	59
3.3.5.1.	Obtención de la función de transferencia con <i>MATLAB</i>	61
3.3.5.2.	Obtención de polos y ceros mediante <i>MATLAB</i>	62
3.3.6.	Función de transferencia para el sistema en lazo cerrado	66
3.4.	Comentarios	67
4.	Simulación del <i>Ball and Beam</i>	69
4.1.	Introducción	69
4.2.	Representación del <i>Ball and Beam</i> en <i>Simulink</i>	69
4.2.1.	La planta (<i>Ball and Beam</i>)	70

4.3.	Diseño de un controlador por retroalimentación de estados	72
4.3.1.	Resultados de simulación para el sistema en lazo cerrado . . .	75
4.3.2.	Comportamiento del sistema en lazo cerrado para una entrada de referencia escalón	76
4.3.3.	Comportamiento del sistema en lazo cerrado para una entrada de referencia sinusoidal	79
4.4.	Comentarios	84
5.	Construcción del <i>Ball and Beam</i>	85
5.1.	Prototipo	85
5.2.	Etapa mecánica	85
5.3.	Etapa electrónica	92
5.4.	Comentarios	95
6.	Implantación de un control <i>on-off</i>	97
6.1.	Introducción	97
6.2.	Programación del PIC	98
6.2.1.	Funciones	100
6.2.2.	Configuración de puertos	100
6.2.3.	Conversión Analógica/Digital (A/D)	102
6.2.4.	Modulador de ancho de pulso (PWM)	104
6.3.	Resultados de laboratorio	105
6.4.	Comentarios	108
7.	Conclusiones y trabajos futuros	109
7.1.	Conclusiones	109
7.2.	Trabajos futuros	109
	Glosario	111
	Bibliografía	115
	A. Especificaciones técnicas del microcontrolador	117
	B. Especificaciones técnicas de los componentes electrónicos	121
	C. Fórmula de Ackermann	129

Índice de figuras

1.1. Prototipo <i>Ball and Beam</i>	2
1.2. Diagrama a bloques del sistema maestro-esclavo para el <i>Ball and Beam</i>	3
1.3. Variación del prototipo <i>Ball and Beam</i>	4
1.4. Ball and Circle.	4
1.5. Ball and Plate.	5
1.6. Helicóptero.	6
1.7. Pendubot.	6
1.8. Péndulo invertido.	7
2.1. Descripción del <i>Ball and Beam</i>	12
2.2. Despiece del <i>esqueleto</i> y <i>sistema de acoplamiento</i>	13
2.3. Despiece del <i>esqueleto</i> y <i>sistema de acoplamiento</i> vista lateral.	14
2.4. <i>Sistema de acoplamiento</i> adaptado al <i>esqueleto</i>	15
2.5. <i>Esqueleto</i>	15
2.6. Placa frontal del <i>esqueleto</i> vista de ambos lados.	16
2.7. Orificios en la placa frontal del <i>esqueleto</i>	16
2.8. Placa frontal del <i>esqueleto</i>	17
2.9. <i>Unión de placas</i> del <i>esqueleto</i>	17
2.10. <i>Unión de placas</i> del <i>esqueleto</i> , vista transversal.	18
2.11. <i>Engrane 1</i> del <i>sistema de acoplamiento</i>	18
2.12. <i>Engrane 2</i> del <i>sistema de acoplamiento</i>	18
2.13. <i>Engrane 3</i> del <i>sistema de acoplamiento</i>	19
2.14. <i>Engrane 4</i> del <i>sistema de acoplamiento</i>	19
2.15. Arreglo de engranes del <i>sistema acoplamiento</i>	20
2.16. Eje del <i>sistema de acoplamiento</i>	21
2.17. Eje y balero del <i>sistema de acoplamiento</i> , vista transversal.	21
2.18. <i>Eslabón</i>	22
2.19. <i>Pivote</i>	23
2.20. <i>Pivote</i> , vista lateral.	23
2.21. <i>Soporte del pivote</i>	24

2.22. Soporte del pivote vista superior.	24
2.23. Soporte del pivote vista frontal.	25
2.24. Eslabón del pivote.	25
2.25. Barra.	27
2.26. Ángulos, vista lateral.	27
2.27. Ángulos, vista transversal.	28
2.28. Unión de los ángulos, vista frontal.	28
2.29. Unión de los ángulos, vista inferior.	29
2.30. Unión de los ángulos, medidas de los orificios.	29
2.31. Despiece de la barra.	30
2.32. Despiece del conector de la barra.	30
2.33. Conector de la barra, vista lateral.	31
2.34. Bola.	31
2.35. Diagrama a bloques de la fuente de voltaje.	32
2.36. Rectificación de la señal.	34
2.37. Regulación de la señal.	34
2.38. Diagrama eléctrico completo de la fuente de alimentación.	35
2.39. Sensor de la Barra.	36
2.40. Comparación de un potenciómetro con el sensor que se coloca en la Barra.	37
2.41. Sensor del motor.	38
2.42. Diagrama a bloques del puente <i>H</i>	38
2.43. Diagrama a bloques de la conexión del microcontrolador.	39
3.1. Descripción del sistema <i>Ball and Beam</i>	42
3.2. Variables del sistema <i>Ball and Beam</i>	43
3.3. Vector de posición del centro de masa de la bola.	45
3.5. Eje perpendicular a la barra.	49
3.6. Seccionamiento del eslabón en placas rectangulares.	49
3.7. Sistema en lazo abierto.	60
3.8. Lugar de las raíces.	65
3.9. Sistema en lazo cerrado.	66
4.1. Diagrama a bloques del <i>Ball and Beam</i> en <i>Simulink</i>	70
4.2. Diagrama a bloques del sistema.	74
4.3. Comportamiento de las variables de estado y la entrada <i>In 1</i> en lazo cerrado.	75
4.4. Comportamiento de la bola en lazo abierto.	76
4.5. Comportamiento de la barra en lazo abierto.	77
4.6. Diagrama a bloques del sistema con una entrada de referencia escalón.	78

4.7. Comportamiento de las variables de estado a una entrada de referencia escalón.	80
4.8. Comportamiento de la bola a una entrada de referencia escalón.	80
4.9. Comportamiento de la barra a una entrada de referencia escalón.	81
4.10. Diagrama a bloques del sistema con una entrada de referencia sinusoidal.	82
4.11. Comportamiento de las variables de estado a una entrada de referencia sinusoidal.	82
4.12. Comportamiento de la bola a una entrada de referencia sinusoidal.	83
4.13. Comportamiento de la barra a una entrada de referencia sinusoidal.	83
5.1. Prototipo <i>Ball and Beam</i>	86
5.2. Sistema mecánico del <i>Ball and Beam</i> , vista frontal.	86
5.3. Sistema mecánico del <i>Ball and Beam</i> , vista lateral.	87
5.4. Barra.	88
5.5. Alambre <i>microm</i>	89
5.6. Unión de ángulos	89
5.8. Sistema de acoplamiento, esqueleto y eslabón ensamblados.	90
5.9. Engranajes.	91
5.10. Programador y microcontrolador.	93
5.11. Etapa de potencia del <i>Ball and Beam</i>	93
5.12. Motor.	94
6.1. Control <i>on-off</i>	98
6.2. Evolución de la posición de la bola, ante el control <i>on-off</i>	105
6.3. Fotografía de la señal de la bola en el osciloscopio.	106
6.4. Evolución de la posición de la barra, ante una entrada de control <i>on-off</i>	106
6.5. Fotografía de la señal de la barra en el osciloscopio.	107
A.1. Configuración de pines del microcontrolador.	118
A.2. Hoja de características del microcontrolador.	119
A.3. Diagrama a bloques del microcontrolador.	120
B.1. Especificaciones del puente H.	122
B.2. Diagrama del puente H.	123
B.3. Características eléctricas del puente H.	124
B.4. Especificaciones de los reguladores de voltaje serie L7800.	125
B.5. Diagrama esquemático de los reguladores de voltaje.	126
B.6. Diagrama de conexiones de los reguladores de voltaje.	127

Índice de cuadros

2.1. Dispositivos de la fuente de alimentación.	33
3.1. Parámetros y variables del sistema <i>Ball and Beam</i>	44
3.2. MATLAB: Matrices de estado	57
3.3. MATLAB: Función de transferencia	61
3.4. MATLAB: Simulación polos y ceros del sistema	62
3.5. MATLAB: Lugar de las raíces	64
4.1. MATLAB: Ganancias	72
6.1. MPLAB: Programa principal del <i>Ball and Beam</i>	98
6.2. MPLAB: Función de la configuración de puertos	100
6.3. MPLAB: Conversión A/D	102
6.4. MPLAB: PWM	104

Acrónimos

Siglas	Descripción
CA	Corriente alterna.
CD	Corriente directa.
CINVESTAV	Centro de investigacion y de estudios avanzados.
ITESM	Instituto tecnológico de estudios superiores de Monterrey.
UNAM	Universidad nacional autónoma de Mexico.
IPN	Instituto politécnico nacional.
LAROSA	Laboratorio de robots subactuados.
FEM	Fuerza electromotriz.
PIC	Peripheral interface controller.
PWM	Pulse-width modulation.
RISC	Reduced instruction set computer.

Notación

Símbolo	Descripción
\mathbf{A}	Matriz de $n \times n$.
$Adj \mathbf{A}$	Adjunta de la matriz \mathbf{A} .
\mathbf{B}	Matriz de $n \times m$.
\mathbf{C}	Matriz de $m \times n$.
$C(q, \dot{q})$	Matriz de <i>Coriolis</i> .
\mathbf{D}	Matriz de $m \times m$.
$\dot{x}(t)$	Derivada del estado del sistema.
\in	Elemento de.
K	Energía cinética.
$x(t)$	Estado del sistema.
f	Fuerza aplicada a la bola.
τ	Fuerza generalizada del sistema.
\mathbf{A}^{-1}	Inversa de la matriz \mathbf{A} .
L	Lagrangiano.
$G(q)$	Matriz de gravedad.
$M(q)$	Matriz de inercia.
\mathbb{Z}	Números enteros.
\sum	Sumatoria.
\mathbf{A}^T	Transpuesta de la matriz \mathbf{A} .
\vec{R}_m	Vector posición del centro de masa.
q_i	Coordenada generalizada donde $i = 1, 2, 3, \dots$
\vec{V}_m	Velocidad del vector posición del centro de masa.
$y(t)$	Salida del sistema.
km	Kilómetros.
gm	Gramos.
cm	Centímetros.
m	Metros.
v	Volts.
A	Amperes.

Símbolo	Descripción
mA	Miliamperes.
rpm	Revoluciones por minuto.
Ω	Ohms.
oz/in	Onzas por pulgada.

Capítulo 1

Introducción

La evolución de los robots industriales desde su aplicación en la producción en serie ha sido vertiginosa frente a la evolución de la robótica en otros campos. Esto ha hecho que los robots que más abundan hoy en día sean los manipuladores industriales que se han denominado, por su predominancia, robots convencionales [8, 9]. Pero existen otros tipos de robots manipuladores, como son los robots redundantes y los robots subactuados [2, 3].

Los robots redundantes, al poseer mayor número de grados de libertad de los estrictamente necesarios para realizar la tarea, ganan a los robots convencionales en prestaciones y versatilidad, pudiendo realizar tareas vetadas para estos. Por otra parte los robots subactuados, al carecer de alguno de sus actuadores, aventajan a los convencionales al ser más compactos, ligeros y tener un menor consumo energético. Las ventajas que presentan estos dos tipos de robots les hacen más adecuados para realizar unas determinadas tareas.

El principal problema es que, tanto los robots redundantes como los robots subactuados están en desventaja con respecto a los robots convencionales en la sencillez del control. No sólo su control es más complejo sino que, además, no ha sido tan profundamente estudiado.

Una de las grandes dificultades que se presenta en el control de sistemas subactuados es el controlar los grados de libertad no actuados (de manera indirecta) mediante los grados de libertad actuados.

Esta tesis se enfoca al estudio de los robots subactuados, en específico al denominado *Ball and Beam* o *Bola y Barra*. En este trabajo se opta por emplear el primer nombre al prototipo realizado, es decir el de *Ball and Beam*, ya que este nombre es más común en el área de los sistemas subactuados.

1.1. Versiones del *Ball and Beam*

En los laboratorios de control se tienen básicamente, dos versiones del *Ball and Beam*.

La primera versión de un sistema *Ball and Beam* consiste en una esfera de acero que es colocada sobre una barra, la cual esta acoplada a un motor mediante un sistema de engranes, cuya función principal es la de manipular el ángulo de posición de la barra que sostiene la esfera el cual está sensado por medio de un potenciómetro. Para poder colocar dicha esfera en la posición deseada, es necesario colocar un sensor, en paralelo con la barra que conjuntamente sostienen la esfera de metal, dicho sensor detecta la posición de la esfera sobre la barra, y mediante esta medición, se envían señales al motor para que éste modifique su posición de acuerdo a la que se desea obtener para la esfera, como se muestra en la Figura 1.1.

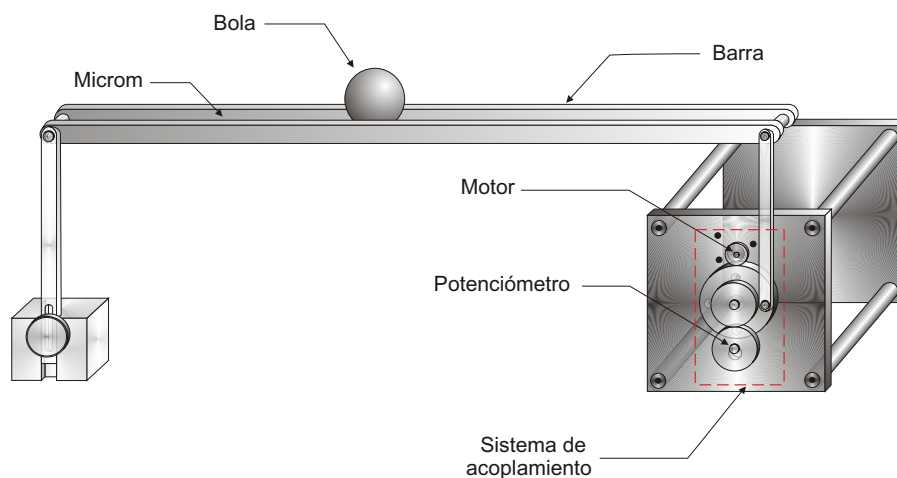


Figura 1.1: Prototipo *Ball and Beam*.

Un esquema de control que es comúnmente usado en este tipo de sistema subactuado es el esquema maestro-esclavo, mostrado en la Figura 1.2, dicho sistema consta de dos partes modulares que considerar, la primera, el esclavo o parte a controlar y la segunda, el maestro que genera la señal de referencia. Considerando estas definiciones para aplicarlo al sistema se tiene que la parte del esclavo es la más compleja, se instala un motor de corriente continua acoplado a un potenciómetro junto con una barra de aluminio sobre la cual se desliza una esfera de acero, y por otra parte el maestro consta sólo de una barra la cual tiene un sensor de una esfera, la cual da la referencia que dicta las órdenes para el esclavo. Este sistema es empleado en medicina, donde el

maestro esta dado por un brazo que es manipulado por el médico el cual genera los movimientos deseados que a su vez son reproducidos por otro manipulador en otro lugar, el cuarto de operaciones, por ejemplo.

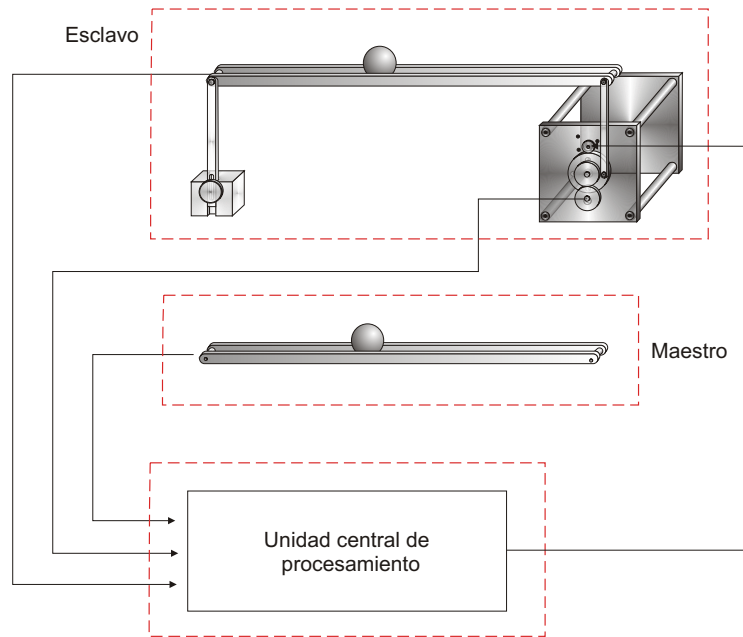


Figura 1.2: Diagrama a bloques del sistema maestro-esclavo para el *Ball and Beam*.

Es conveniente mencionar que en el prototipo desarrollado en esta tesis, la referencia del maestro esta dada a nivel de software, es decir no existe físicamente ni la barra ni la bola que se observa en la Figura 1.2; la referencia es programada en el microcontrolador.

El prototipo que se desarrolla es manipulado como se menciona anteriormente por un microcontrolador el cual contiene todas las instrucciones necesarias para poder manipular el sistema. Así, entonces el sistema tiene como unidad central de procesamiento a un microcontrolador de la familia de *MICROCHIP* con número 18LF4550.

En la Figura 1.3 se puede observar un prototipo de *Ball and Beam* que difiere un poco a la versión anterior, ya que como se puede ver el actuador se encuentra justo en medio de la barra.

Ahora en la Figura 1.4 se observa el prototipo *Ball and Circle* que como se observa, en lugar de tener una barra lineal tiene una barra en forma de círculo, con lo cual se evita que la bola tenga limitantes mecánicas para su movimiento.

Una variación más del sistema *Ball and Beam* es el *Ball and Plate*, éste consta de

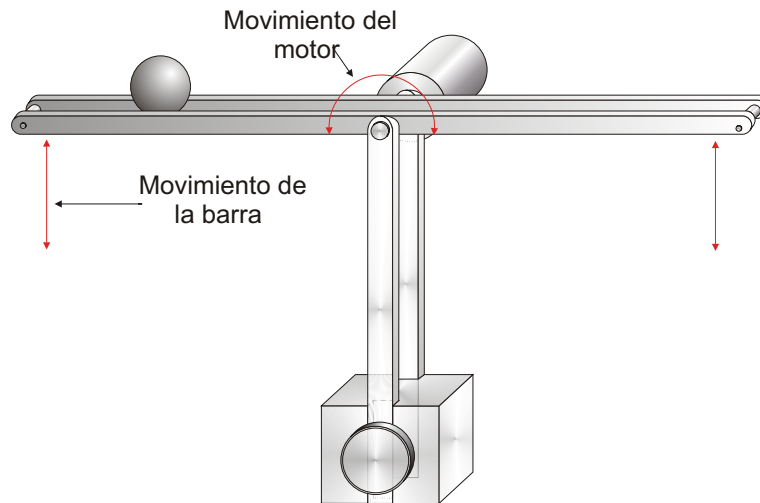


Figura 1.3: Variación del prototipo *Ball and Beam*.

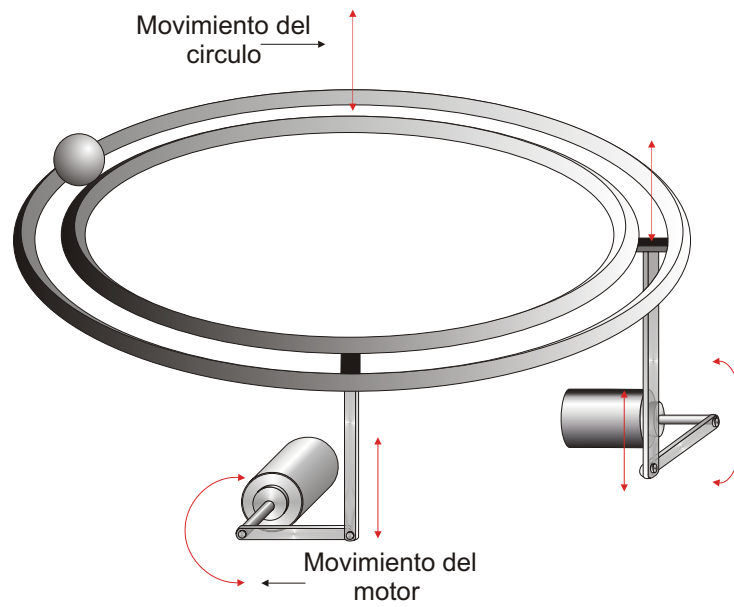


Figura 1.4: Ball and Circle.

dos actuadores y tres grados de libertad, esto permite que la bola se pueda mover en cualquier dirección como se puede observar en la Figura 1.5.

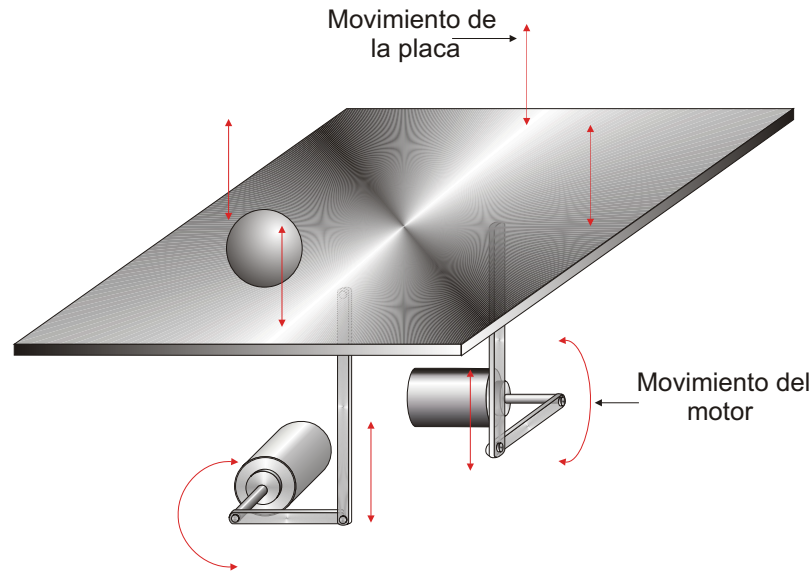


Figura 1.5: Ball and Plate.

1.2. Algunos ejemplos de robots subactuados

El tratar de equilibrar un palo de escoba o varilla sobre la palma de la mano es un ejemplo sencillo que se presenta en la vida cotidiana donde se observa el fenómeno de subactuación.

Otros ejemplos de este tipo de sistemas subactuados son: un helicóptero que se observa en la Figura 1.6 [3], con tres grados de libertad y dos actuadores, el pendubot, Figura 1.7 [10], con dos grados de libertad y un actuador, el péndulo invertido, Figura 1.8 [1], con dos grados de libertad y un actuador. Este tipo de sistemas subactuados pueden encontrarse en casi todos los tipos de industrias como son la automotriz, la industria espacial, y en las cuales se cuenta con un área de automatización.

Un sistema subactuado más complejo es un robot bípedo. La complejidad de este sistema radica en hacer funcionar más de dos grados de libertad con un solo actuador. Haciendo una analogía de éste con el pendubot de la Figura 1.7, se puede ver que los dos eslabones simulan la pierna del bípedo y al incluir un tercer eslabón (que simula el pie) se complica el control del sistema.

Un sistema subactuado se puede hacer presente por dos causas, primera, que el sistema sea completamente diseñado para funcionar como tal, y segundo, se puede

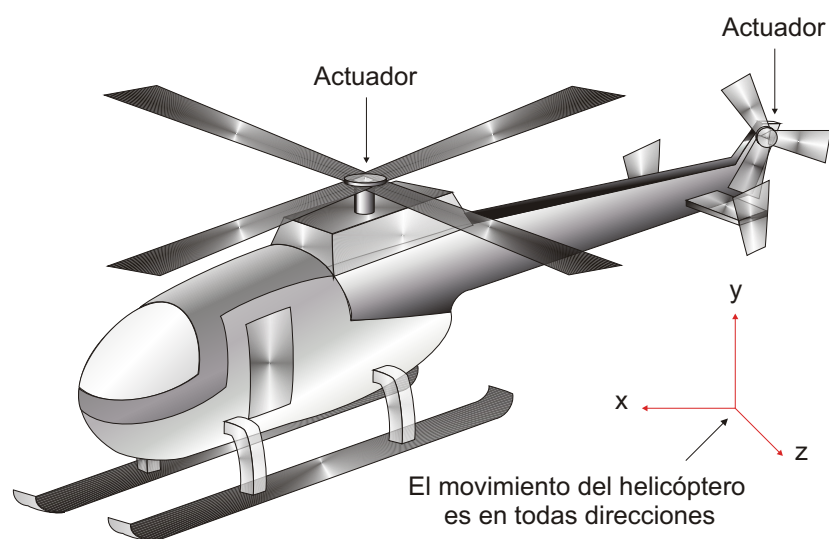


Figura 1.6: Helicóptero.

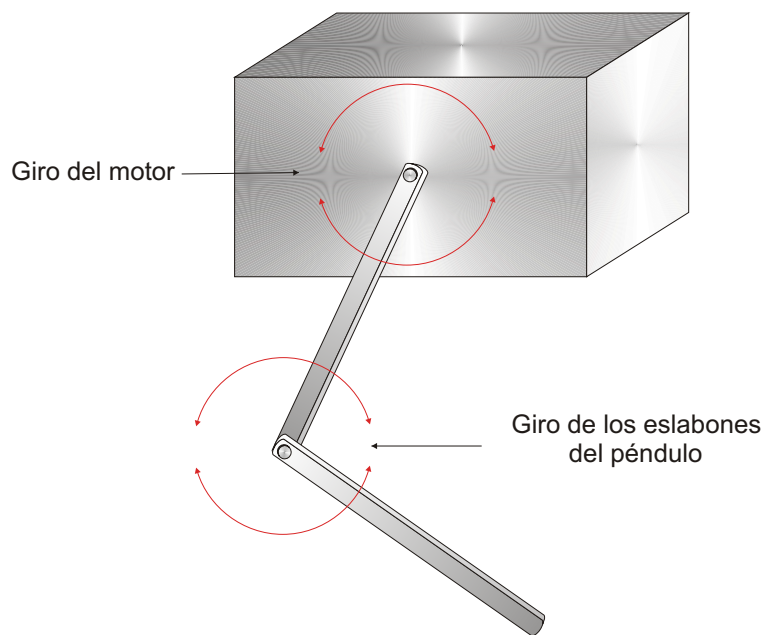


Figura 1.7: Pendubot.

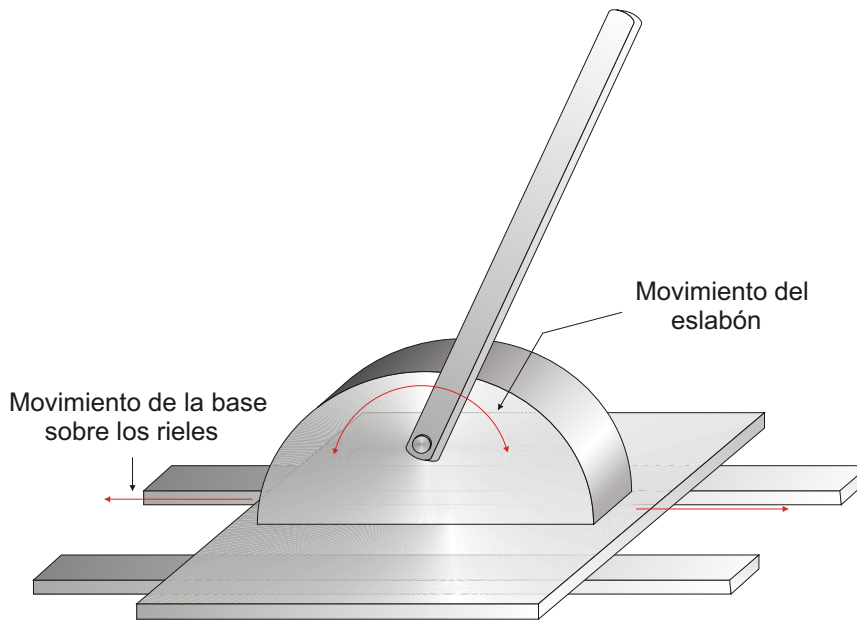


Figura 1.8: Péndulo invertido.

presentar de manera indirecta en un sistema actuado, debido a la existencia de una falla en alguno de los actuadores del sistema.

Un sistema subactuado por diseño tiene características que lo hacen único y muy rentable, ya que presenta un ahorro en varios aspectos como lo pueden ser la construcción, el espacio, la economía y el ahorro de energía, ya que con menos actuadores demanda menos energía, ejemplo de este sistema es un robot bípedo.

Ahora bien, un sistema subactuado por fallas se debe a que en algún punto de la operación uno de los actuadores deja de funcionar convirtiendo al sistema actuado en subactuado y es aquí donde se presenta la necesidad de diseñar controladores para sistemas subactuados.

1.3. Objetivos de la tesis

Objetivo general

El principal objetivo que se persigue en este trabajo es el de diseñar, construir y controlar un prototipo denominado *Ball and Beam*.

Objetivos específicos

Los objetivos específicos de este trabajo se enumeran a continuación:

- Diseñar un *Ball and Beam* que sea funcional, flexible y sobretodo económico.
- Construir un prototipo *Ball and Beam* que pueda ser utilizado por alumnos e investigadores.
- Implantar algunos algoritmos de control clásicos al prototipo.
- Estudio del microcontrolador empleado para el control.

1.4. Planteamiento del problema

La práctica es parte fundamental del aprendizaje para que éste sea integral, es por eso que surge la necesidad de desarrollar un laboratorio especializado en robótica para alumnos de la Licenciatura en Ingeniería en Electrónica y Telecomunicaciones y de la maestría en Automatización y Control que se ofrecen en la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, este laboratorio denominado LAROSA (Laboratorio de Robots Subactuados) tiene dicho propósito.

Se pretende que LAROSA sea auto equipado por alumnos e investigadores, es así como surge la idea de este trabajo que pretende aportar un robot subactuado llamado *Ball and Beam*.

1.5. Solución propuesta

La propuesta de solución es diseñar primeramente mediante software un sistema denominado *Ball and Beam*, para posteriormente construir el prototipo con materiales de bajo costo y cuyas características principales son: fácil transportación y sencilla manipulación.

A continuación se realiza su modelo matemático, por medio de ecuaciones de Euler-Lagrange, posteriormente se procede a linealizar este modelo matemático, para poder así aplicar una ley de control sobre él. Además de la construcción del prototipo, también se diseña la parte de instrumentación y programación del microcontrolador que es el cerebro del sistema subactuado.

1.6. Alcance y limitaciones

El alcance de esta tesis es el de diseñar, construir y controlar un robot subactuado de dos grados de libertad con un actuador, llamado *Ball and Beam*.

Esto es posible gracias a que se construye de materiales de bajo costo y fáciles de conseguir.

Además se aporta a la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo este prototipo con la meta de que sea de gran utilidad para los alumnos e investigadores como un instrumento didáctico, que contribuye a la aplicación de las leyes y técnicas de control.

El desarrollo del prototipo *Ball and Beam* tiene también como finalidad la elaboración y publicación de una tesis que sirve como medio para obtener el título de Ingeniero en Electrónica y Telecomunicaciones.

Por último con el desarrollo del prototipo *Ball and Beam* se propicia la creación de un laboratorio especializado en robótica, LAROSA (Laboratorio de Robots Subactuados) esperando que alumnos e investigadores diseñen y construyan otros prototipos de control que busquen la misma finalidad.

Una limitante de este prototipo es que el largo de la barra es el único espacio que tiene la bola para poder desplazarse, limitando así su funcionamiento.

1.7. Justificación

Con la creciente necesidad de tener un laboratorio de robótica equipado y funcional, que provea a los alumnos de la Licenciatura en Ingeniería en Electrónica y Telecomunicaciones y de la Maestría en Automatización y Control de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH), los medios adecuados para realizar prácticas útiles para la comprensión de las técnicas de control se contempla realizar un instrumento para dicho propósito, con el cual las futuras generaciones que ingresen a la institución tengan las herramientas necesarias para aplicar los conocimientos adquiridos durante su preparación académica, científica y tecnológica.

Debido a que la institución no cuenta con este tipo de laboratorios y además, la compra del equipo a compañías transnacionales resulta excesivamente costoso, es necesario comenzar a desarrollarlo con propios medios logrando así un sustancial ahorro monetario, además de llevar a la práctica los conocimientos adquiridos durante el proceso de aprendizaje, específicamente se refiere a la construcción del prototipo *Ball and Beam* cuya elaboración requiere de conocimientos básicos de control, así como de un amplio conocimiento en el área electrónica y robótica.

El prototipo a construir denominado *Ball and Beam* es uno de los primeros pasos en el desarrollo de un laboratorio de robótica que es indispensable tener, ya que las universidades más importantes y de prestigio que existen en el país como el Instituto Politécnico Nacional (IPN) en el Centro de Investigaciones Avanzadas (CINVESTAV), ITESM (Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey) y la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) por mencionar algunas, cuentan con este tipo de laboratorios con lo cual sus egresados mantienen un alto nivel de preparación

científica y tecnológica. Es por eso que en el CITIS-UAEH se pretende estar a la vanguardia con este tipo de laboratorios.

1.8. Aportaciones de la tesis

Ya que se logra construir un prototipo final, podemos decir que la aportación de la tesis es de tipo tecnológica.

1.9. Cuerpo del trabajo de tesis

La tesis está organizada en siete capítulos y tres apéndices, los cuales están estructurados de la siguiente manera:

En el Capítulo 1 se presenta un panorama general de los sistemas subactuados, con especial atención en el *Ball and Beam*, también se dan los objetivos de la tesis, el planteamiento del problema, la solución propuesta, los alcances y limitaciones la justificación y finalmente las aportaciones de la tesis.

En el Capítulo 2 se da el diseño del *Ball and Beam* que se propone, el capítulo esta dividido en dos secciones principales: la mecánica y la electrónica, en cada una de ellas, se dan los detalles para su construcción.

En el Capítulo 3 se obtiene el modelo matemático del sistema y se realiza el estudio de las propiedades estructurales del sistema como lo es la controlabilidad y la estabilidad.

En el Capítulo 4 se presentan los resultados en simulación del sistema en lazo cerrado utilizando *MATLAB*.

En el Capítulo 5 se muestra el prototipo obtenido físicamente.

En el Capítulo 6 se describe el programa grabado en el microcontrolador y la forma en que se aplica el control.

Finalmente, las conclusiones y trabajos futuros se dan en el Capítulo 7.

En los apéndices A y B se dan algunas especificaciones técnicas del microcontrolador y los dispositivos electrónicos usados, respectivamente.

En el Apéndice C se muestra el procedimiento de la obtención de la matriz de ganancias de retroalimentación del estado K .

Capítulo 2

Diseño del *Ball and Beam*

Para este capítulo se precisaron dos áreas de trabajo sobre las cuales se separa el diseño:

- Etapa mecánica. Aquí se maneja lo relacionado a las piezas que serán acopladas al motor como lo son el *sistema de soporte y acoplamiento*, placas y uniones, también se detallan características del *sistema de balanceo* sobre el que se desplaza la *bola*.
- Etapa electrónica. Aquí se da todo lo relacionado a la electrónica que se maneja dentro del sistema, ahí se puede encontrar la fuente de voltaje que alimenta todos los elementos electrónicos utilizados, así como los sensores de la *barra* y del motor, el *punte H* que permite controlar el sentido del giro del motor, y el microcontrolador.

2.1. Etapa Mecánica

En esta sección se describe la parte mecánica del prototipo de lo general a lo particular, dividiendo la arquitectura en dos sistemas principales, como se muestra en la Figura 2.1:

- *Sistema de soporte y acoplamiento.*
- *Sistema de balanceo.*

2.1.1. Sistema de soporte y acoplamiento

El *sistema de soporte y acoplamiento* es la parte del sistema *Ball and Beam* que contiene las partes mecánicas que conjuntamente a los dispositivos eléctricos y elec-

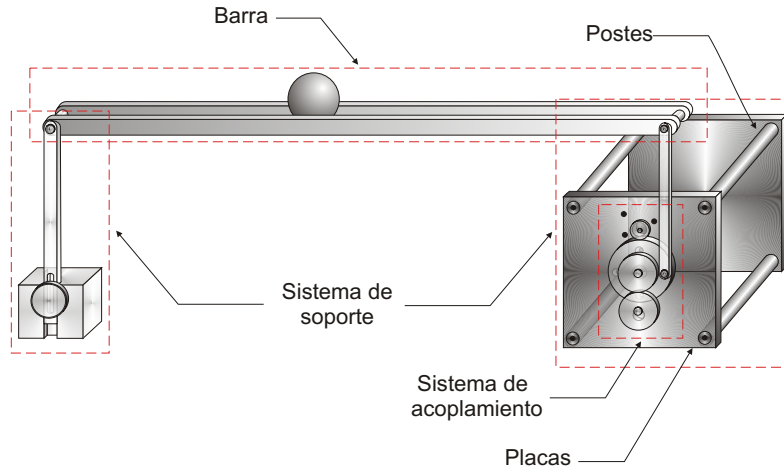


Figura 2.1: Descripción del *Ball and Beam*.

trónicos hacen posible el control y movimiento del sistema. El *sistema de soporte y acoplamiento* se divide en:

- *Esqueleto*
- *Sistema de acoplamiento*
- *Eslabón*
- *Pivote*

El despiece completo del *sistema de acoplamiento* adaptado al *esqueleto* se muestra en las figuras 2.2 y 2.3.

En la Figura 2.4 se muestra el *sistema de acoplamiento* con todas sus piezas ensambladas al *esqueleto*.

2.1.1.1. Esqueleto

El *esqueleto* es la estructura metálica en la cual se montan las diferentes partes que conforman el sistema de acoplamiento como se muestra en la Figura 2.5, como son motor, potenciómetro, eje y engranes.

Se conforma de dos placas rectangulares metálicas y cuatro postes cilíndricos, construido todo en acero, como se ve en la Figura 2.6, la placa frontal a su vez cuenta

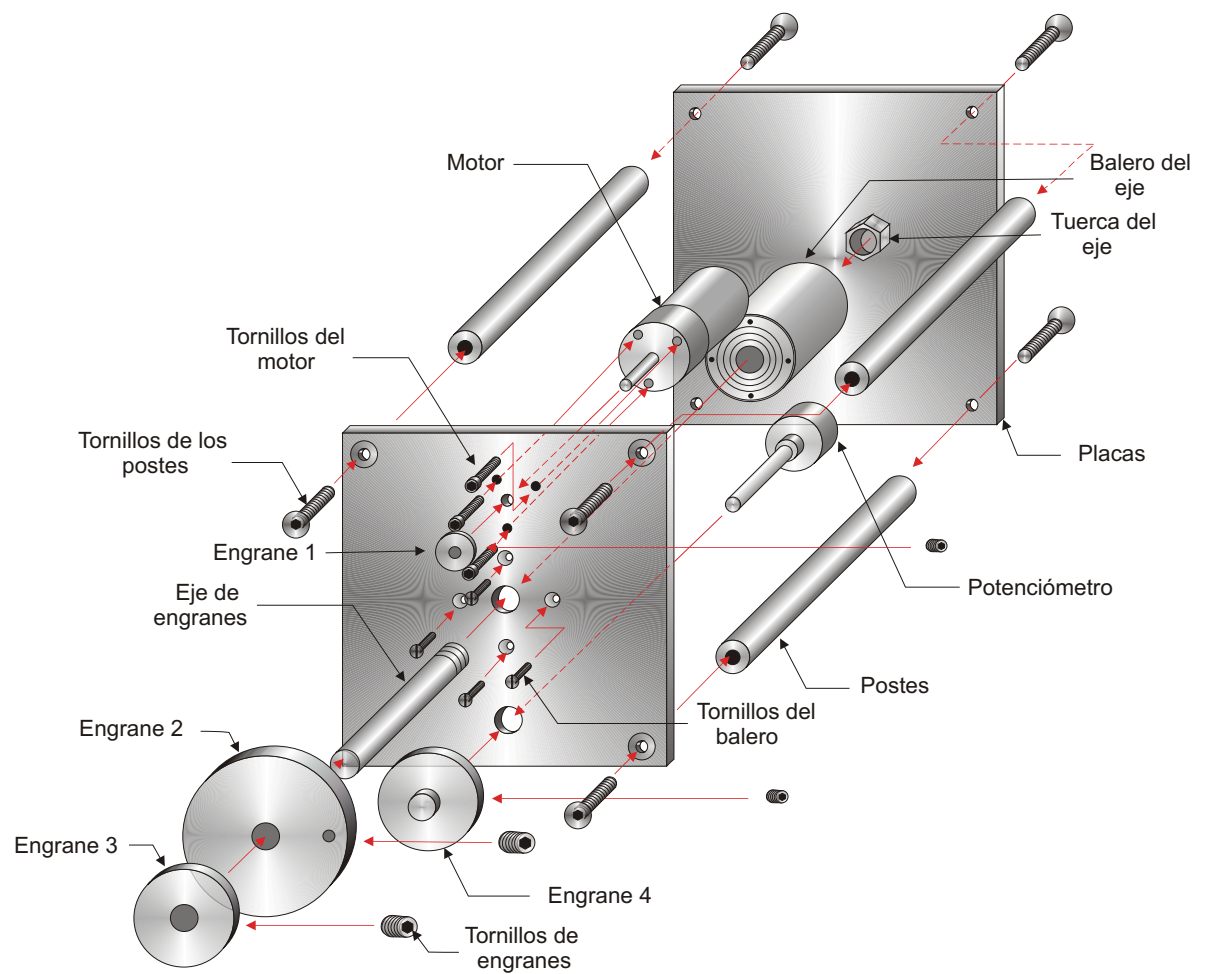


Figura 2.2: Despiece del *esqueleto* y *sistema de acoplamiento*.

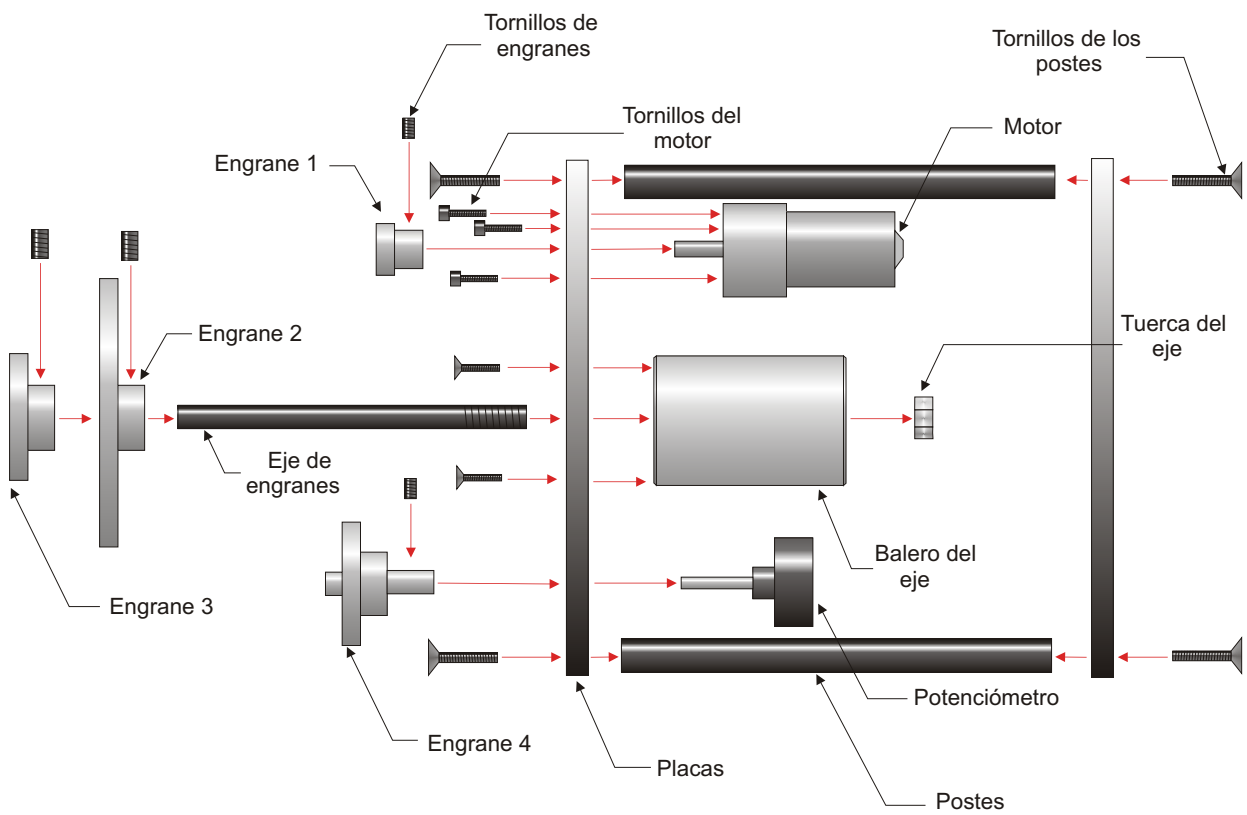


Figura 2.3: Despiece del *esqueleto* y *sistema de acoplamiento* vista lateral.

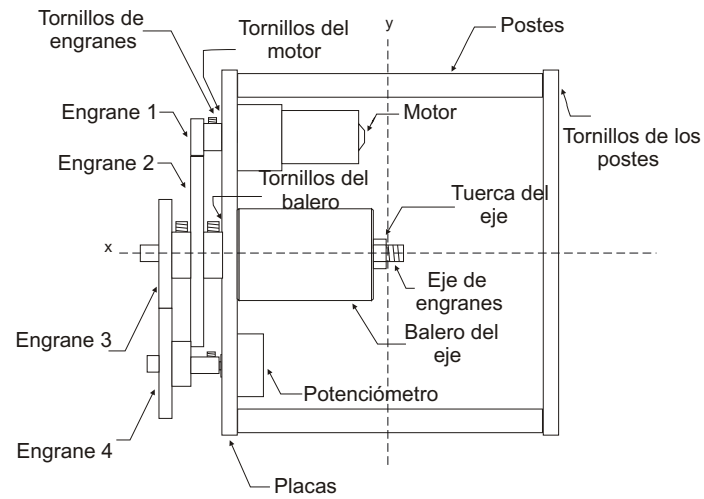


Figura 2.4: Sistema de acoplamiento adaptado al esqueleto.

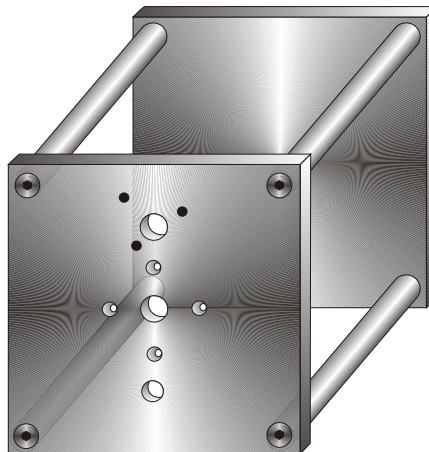


Figura 2.5: Esqueleto.

con tres orificios acomodados verticalmente como se muestra en la Figura 2.8 para la inserción de:

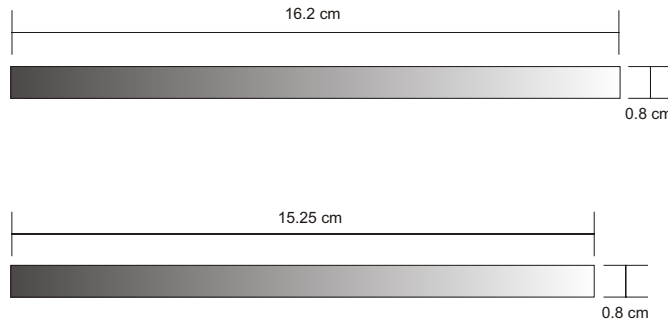


Figura 2.6: Placa frontal del *esqueleto* vista de ambos lados.

1. El motor (orificio 1).
2. El eje de soporte (orificio 2).
3. El potenciómetro (orificio 3).

En la Figura 2.7 se muestra la posición de los orificios en la placa frontal del *esqueleto*.

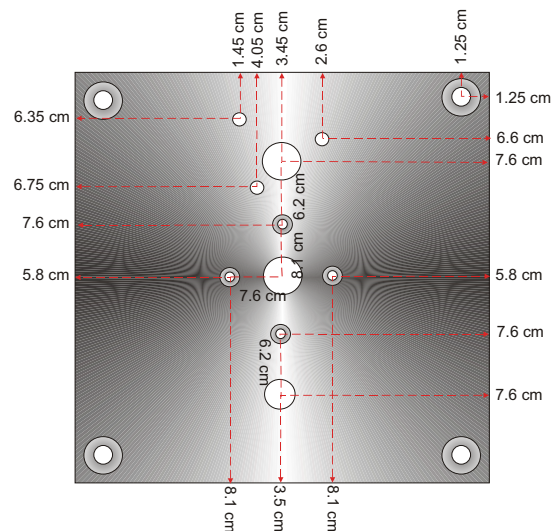
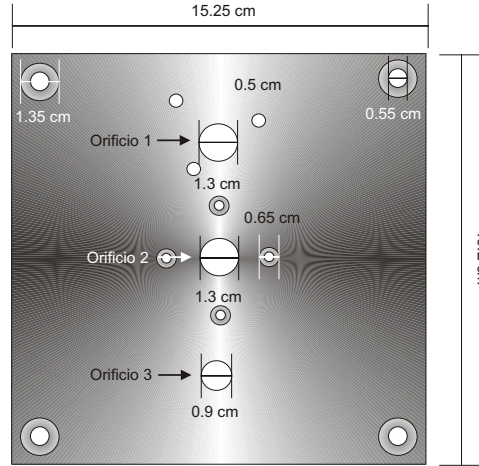
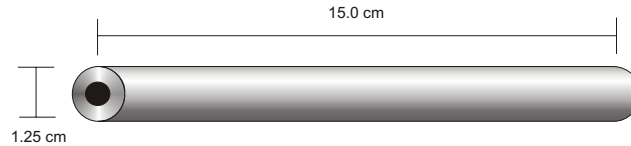


Figura 2.7: Orificios en la placa frontal del *esqueleto*.

Figura 2.8: Placa frontal del *esqueleto*.

La placa trasera conformada con las mismas medidas que la placa frontal se encuentra fijada mediante los cuatro postes cilíndricos a la placa frontal como se observa en la Figura 2.5 .

Los cuatro postes cilíndricos unen a las placas, frontal y trasera, por las cuatro esquinas de cada placa mediante tornillos de cabeza plana y muesca tipo Allen, las medidas de estos son de 15cm de largo, 1.25cm de radio externo y 0.55cm de radio interno como se observa en las figuras 2.9 y 2.10.

Figura 2.9: Unión de placas del *esqueleto*.

2.1.1.2. Sistema de acoplamiento

El *sistema de acoplamiento* es un sistema que no es demasiado complejo, consta de cuatro engranes de diferente diámetro, un eje y un balero.

El primer engrane al que se le denomina *engrane 1* (ver Figura 2.11) es el más pequeño de los cuatro, éste se encuentra fijado a la flecha del motor y se acopla al *engrane 2* (ver Figura 2.15), tiene un diámetro interior de 0.5cm, un diámetro exterior de 1.6cm y se conforma de 24 dientes.

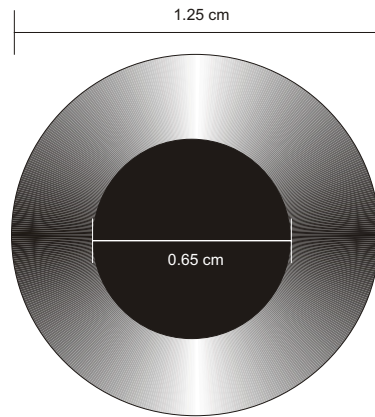


Figura 2.10: *Unión de placas del esqueleto, vista transversal.*

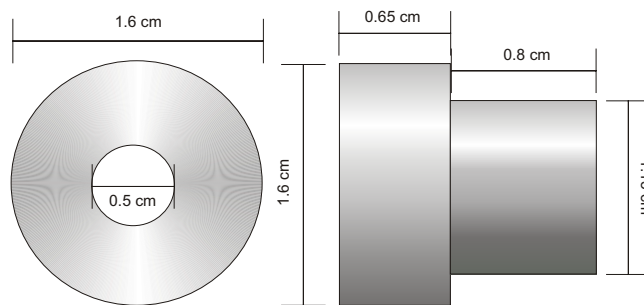


Figura 2.11: *Engrane 1 del sistema de acoplamiento.*

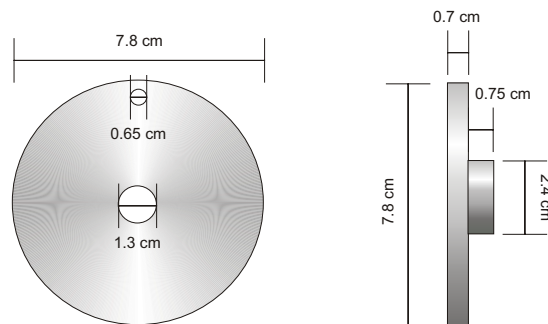


Figura 2.12: *Engrane 2 del sistema de acoplamiento.*

El *engrane 2* Figura 2.12 es el más grande de los cuatro y está fijado a un eje debajo de un segundo engrane denominado *engrane 3* en el centro de la placa frontal del sistema de acoplamiento (ver Figura 2.15), se acopla al *engrane 1* y tiene la función de reducir la velocidad de giro proveniente del motor. Cuenta con un diámetro interior de 1.3cm, con un diámetro exterior de 7.8cm y se conforma de 120 dientes.

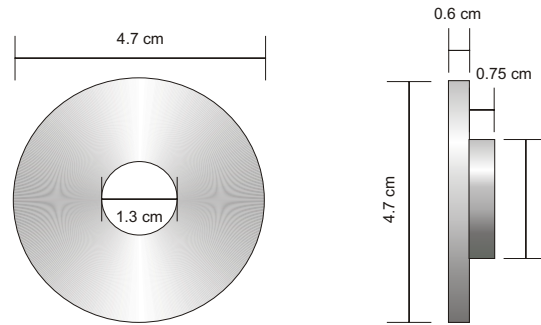


Figura 2.13: *Engrane 3* del sistema de acoplamiento.

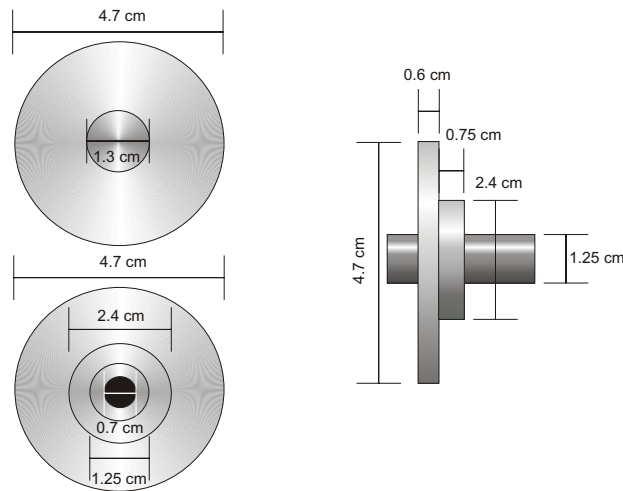


Figura 2.14: *Engrane 4* del sistema de acoplamiento.

Los engranes restantes, *engrane 3* y *engrane 4* (ver figuras 2.13 y 2.14 respectivamente) cuentan con el mismo diámetro interior de 1.3cm y exterior de 4.7cm además del mismo número de dientes con 72 cada uno. El *engrane 3* se encuentra fijado al eje de la placa frontal sobre el *engrane 2*, su función es la de acoplar el movimiento

del *engrane 2* con el *engrane 4* que a su vez se encuentra acoplado al potenciómetro que sirve como sensor para la posición del giro.

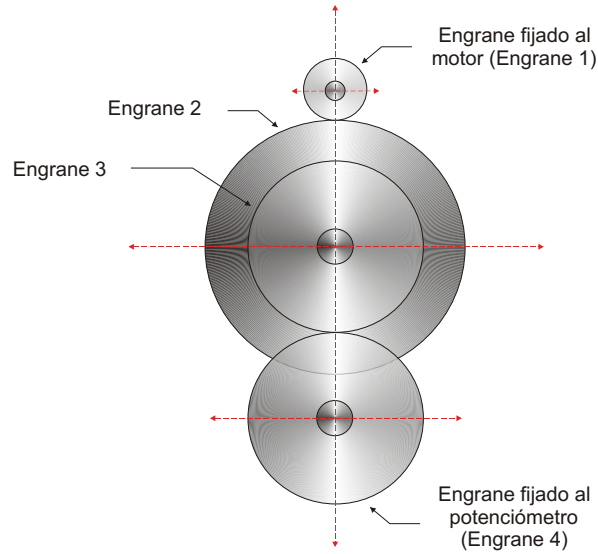


Figura 2.15: Arreglo de engranes del *sistema acoplamiento*.

El *sistema de acoplamiento* tiene diferentes finalidades, en primer lugar la de reducir la velocidad de giro y trabajo del motor, en segundo lugar acoplar el motor a un potenciómetro lineal el cual sensa la posición de éste. El *sistema de acoplamiento* esta limitado a mover la *barra* únicamente en el rango de -45° a $+45^\circ$ con respecto al eje x .

En la Figura 2.4 se observa que el *engrane 2* que está acoplado al eje, está fijo a un balero que permite el giro de todo el *sistema de acoplamiento*.

En las figuras 2.16 y 2.17 se pueden observar las dimensiones del eje con balero que se encuentra fijo al centro de la placa frontal del *esqueleto*.

2.1.1.3. Eslabón

Al *sistema de acoplamiento* se añade un *eslabón*, el cual está adaptado en un extremo al *engrane 2* y en el otro extremo a la *barra*, sus medidas se pueden observar en la Figura 2.18.

Este *eslabón* al igual que el *sistema de acoplamiento* está hecho de aluminio con la finalidad de que el motor haga menos esfuerzo al tratar de moverlo, debido a lo ligero del material.

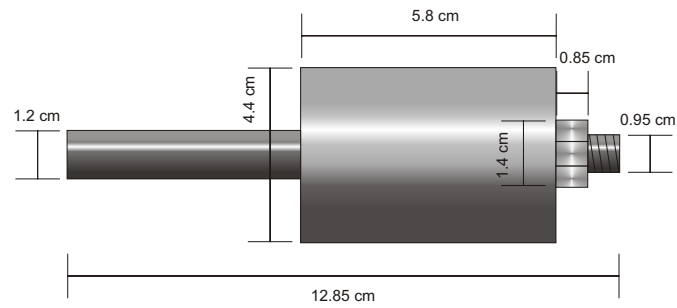


Figura 2.16: Eje del *sistema de acoplamiento*.

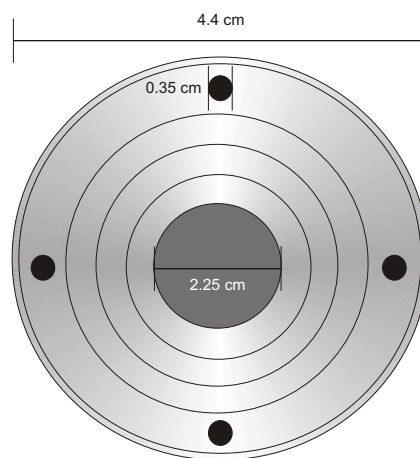
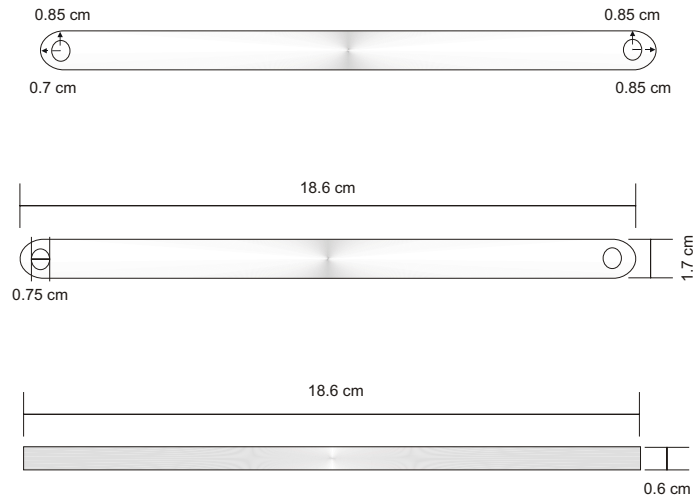


Figura 2.17: Eje y balero del *sistema de acoplamiento*, vista transversal.

Figura 2.18: *Eslabón*.

2.1.1.4. Pivote

El *pivote* en el sistema *Ball and Beam* es la pieza que se encuentra al final de uno de los extremos de la *barra*. Su función principal es la de proporcionar un punto de apoyo sobre el cual la *barra* sube y baja, además el *pivote* también brinda estabilidad al movimiento natural del sistema cuando éste se encuentra funcionando ya que genera un contrapeso que mantiene al sistema con un mínimo de movimiento que perturbe el desplazamiento natural de la *bola* sobre la *barra*.

Como se observa en las figuras 2.19 y 2.20, el *pivote* es quizá la parte más simple del *Ball and Beam* consta únicamente de:

- *Soporte del pivote.*
- *Eslabón del pivote.*
- *Perilla de ajuste.*

A continuación se describen individualmente cada pieza mencionada anteriormente.

Soporte del pivote

El *soporte del pivote* es una base de forma rectangular que tiene como principal función la de soportar uno de los extremos de los *ángulos* y mantenerlas al mismo tiempo sin perturbaciones derivadas de la inercia del mismo movimiento, por eso es que este soporte es completamente rígido.

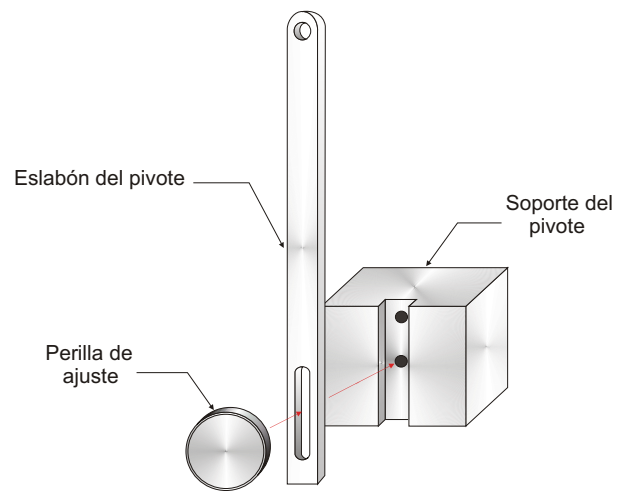


Figura 2.19: *Pivote*.

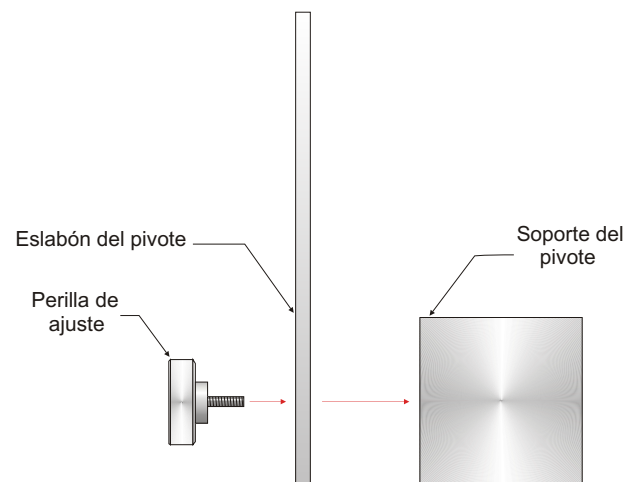


Figura 2.20: *Pivote*, vista lateral.

En la Figura 2.21 se aprecia en perspectiva dicho soporte, mientras que en las figuras 2.22 y 2.23, se aprecian las medidas del *soporte del pivote* incluyendo diámetro de los orificios para la *perilla de ajuste*.

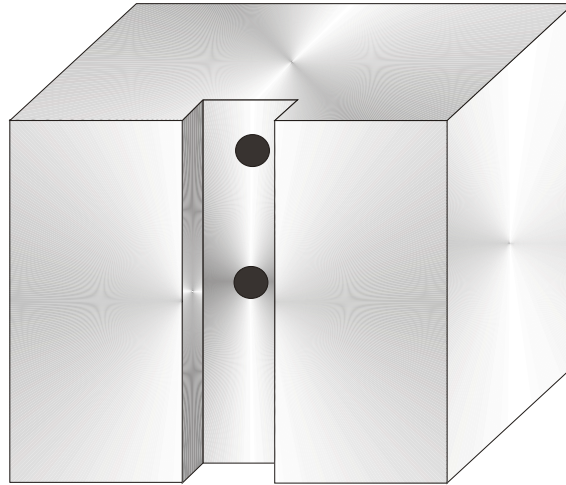


Figura 2.21: *Soporte del pivote.*

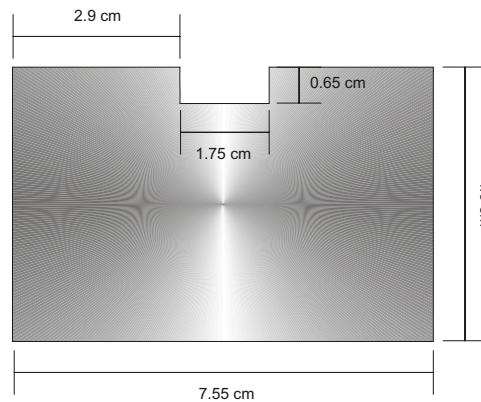


Figura 2.22: *Soporte del pivote vista superior.*

Eslabón del pivote

El *eslabón del pivote* es la parte del *pivote* que une al extremo fijo de los *ángulos* con el soporte, está hecho de aluminio, en la Figura 2.24 se pueden apreciar sus dimensiones con diferentes vistas del mismo.

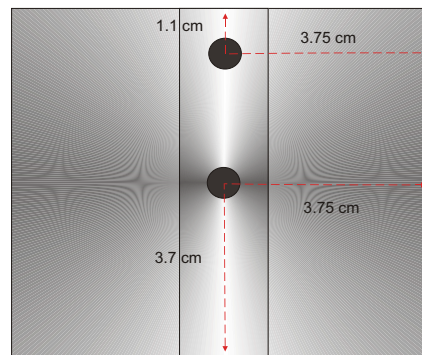


Figura 2.23: *Soporte del pivote vista frontal.*

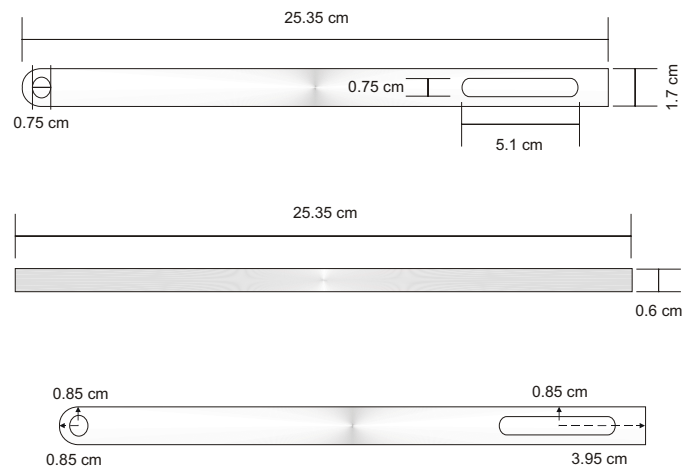


Figura 2.24: *Eslabón del pivote.*

Perilla de ajuste

La *perilla de ajuste* forma parte también del *pivote*, y está ideada de esa forma, como una perilla, para que sea de fácil ajuste manual. Su función principal es la de poder ajustar el alto del *eslabón del pivote* y por consiguiente la horizontalidad de la *barra* que es fundamental para un correcto funcionamiento del sistema en su conjunto. Se puede observar la manera de utilizar la perilla en el *pivote* del sistema en las figuras 2.19 y 2.20.

2.1.2. Sistema de balanceo

El *sistema de balanceo* consta de dos componentes como se observa en la Figura 2.25 que son:

- *Barra.*
- *Bola.*

2.1.2.1. Barra

La *barra* es una de las partes más importantes del sistema, ya que en ésta se desliza la *bola* que es el objeto a controlar y en el cual se encuentra el sensor de la *bola* que nos permite saber en que posición se encuentra sobre la *barra*.

Las piezas que conforman al conjunto que denominamos *barra* Figura 2.1 y que se describen a continuación son:

- *Ángulos*
- *Unión de los ángulos*

Ángulos

Se comienza por describir a los *ángulos* que conforman el *sistema de balanceo*, los *ángulos* son de aluminio cubiertos con pintura aislante, las medidas de los *ángulos* son de 73.9cm de largo, 1.2cm de ancho exterior y 1.07cm de ancho interior como se muestra en las figuras 2.26 y 2.27. La finalidad de que dichos *ángulos* sean de aluminio obedece al hecho de que el peso que el motor estará balanceando debe de ser el mínimo posible para que tanto el sistema mecánico como el sistema electrónico hagan el menor esfuerzo posible y así el sistema completo tenga un desempeño adecuado.

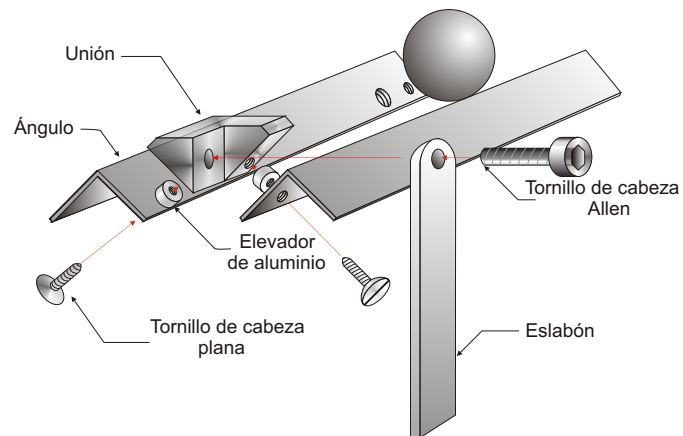


Figura 2.25: Barra.

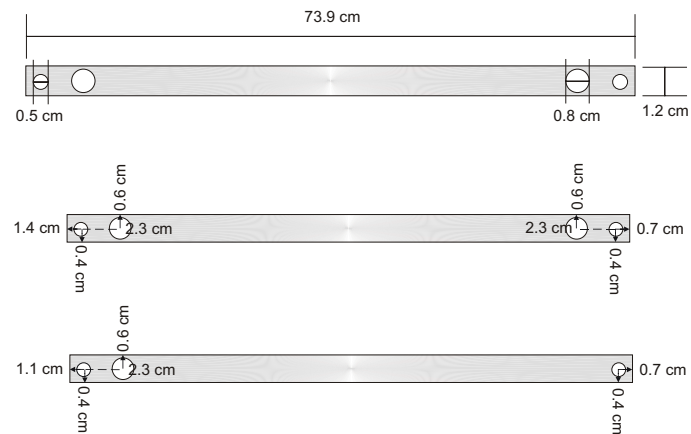


Figura 2.26: Ángulos, vista lateral.

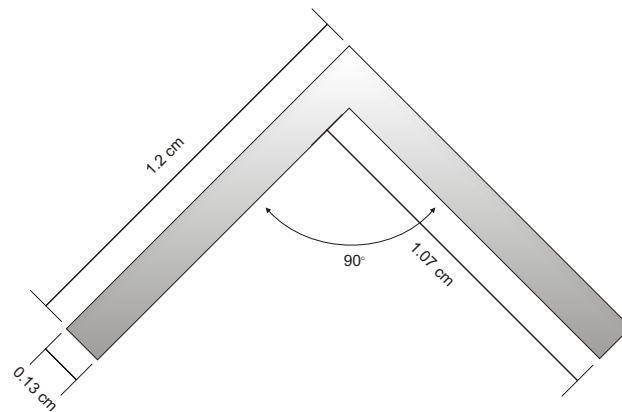


Figura 2.27: *Ángulos*, vista transversal.

Unión de los ángulos

Los dos *ángulos* están unidos en ambos extremos por una pieza de acero de forma más o menos trapezoidal. La Figura 2.28 muestra el diseño de esta pieza de unión. Como se puede observar dicha pieza tiene una forma irregular y muestra varios cortes por lo que a continuación se presentan las medidas de la *unión de los ángulos*, las cuales son: 1.6cm de base, 1.4cm de lado y 0.3cm de corte.

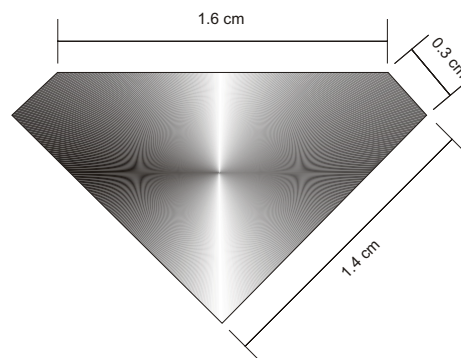


Figura 2.28: *Unión de los ángulos*, vista frontal.

En las vista inferior de las uniones, figuras 2.30 y 2.29, se observan los diámetros y ubicación de los orificios hechos para los tornillos que fijan los *ángulos*.

Ahora en las figuras 2.31, 2.32 y 2.33 se muestra el despiece de la *barra*, es decir como se ensamblan los *ángulos* con la *unión de los ángulos*, también como se conecta el *eslabón* con la *barra* y las conexiones y adaptadores para unir la parte mecánica

con la parte electrónica.

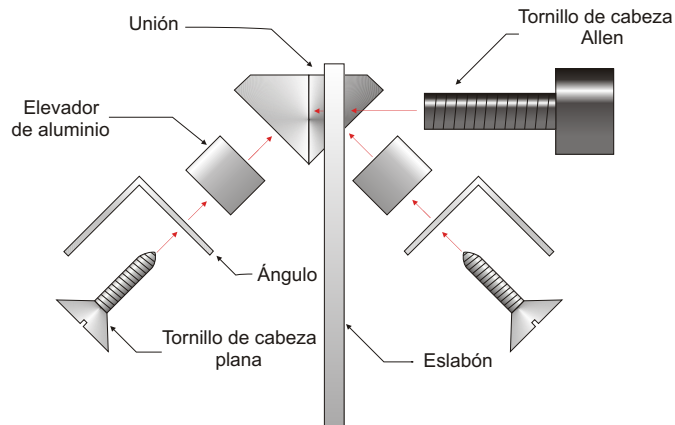


Figura 2.31: Despiece de la *barra*.

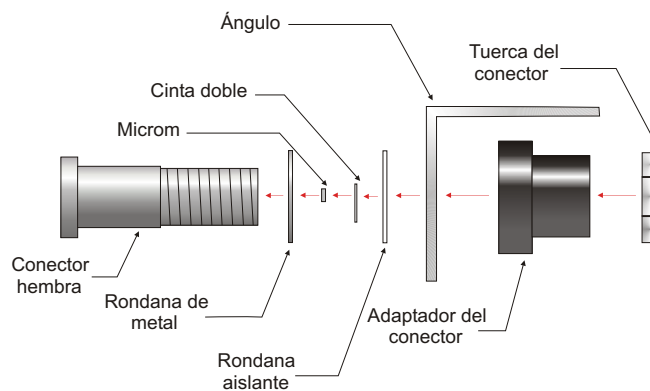


Figura 2.32: Despiece del conector de la *barra*.

2.1.2.2. Bola

La *bola* es un balón de acero de una pulgada de diámetro con un peso de 85gm. como se observa en la Figura 2.34, ésta se desliza a lo largo de la *barra*, para que su posición sea sensada por el alambre *microm*.

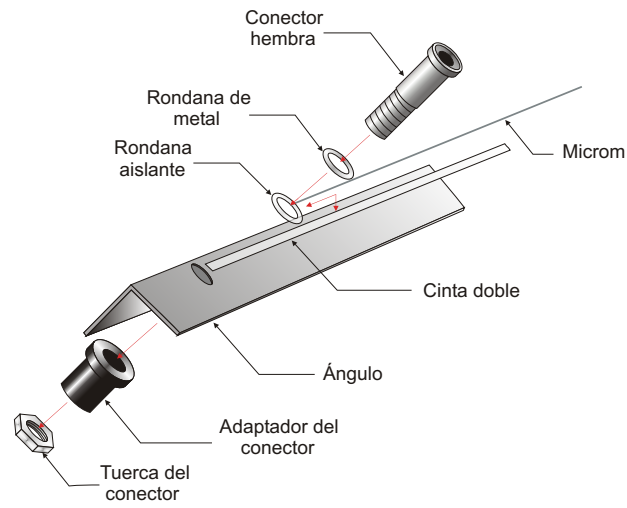


Figura 2.33: Conector de la *barra*, vista lateral.

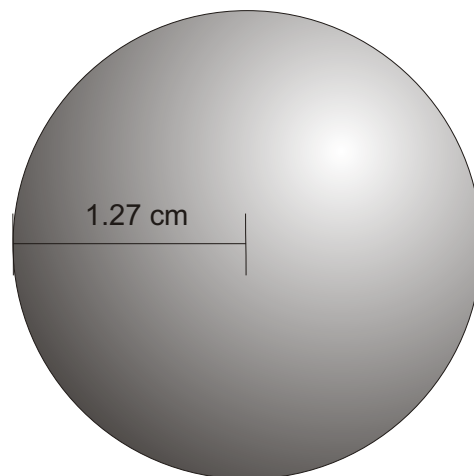


Figura 2.34: *Bola*.

2.2. Etapa Electrónica

Para fines prácticos y mejor entendimiento la parte de la electrónica tiene la siguiente distribución:

1. *Etapa de potencia.*
2. *Etapa de sensado.*
3. *Etapa de control.*

2.2.1. Etapa de potencia

Como se menciona la *etapa de potencia* está constituida por la fuente de tensión que es la encargada de alimentar con un voltaje entregando la corriente adecuada a la circuitería del sistema subactuado, así que se diseña y construye una fuente de alimentación que cumple con las exigencias de los circuitos que se utilizan.

Una fuente de alimentación es el circuito dentro de los equipos electrónicos, que convierte la tensión de entrada alterna (CA) en una tensión de salida continua (CD) para poder alimentar algún sistema, en este caso para alimentar al sistema *Ball and Beam*. A continuación se presenta el diagrama de bloques del diseño de la misma, tomando en cuenta su funcionamiento.

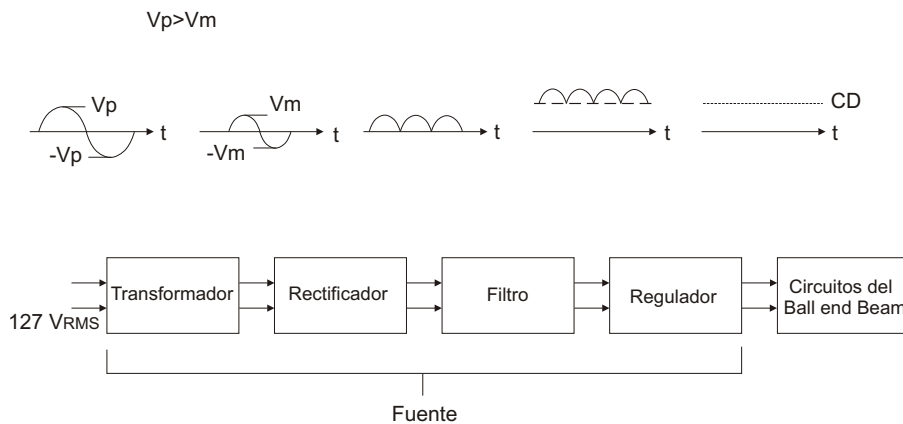


Figura 2.35: Diagrama a bloques de la fuente de voltaje.

A simple vista se observa que cada parte está dispuesta según un ordenamiento lógico del funcionamiento. Se describe qué tipo de señal se obtiene desde la entrada de corriente alterna, el transformador, la parte de rectificación de la señal, el filtrado, la

regulación, hasta que tipo de señales llegan a los circuitos del *Ball and Beam*. La tarea de la fuente de alimentación de cualquier equipo o aparato electrónico es obtener él o los niveles adecuados de corriente directa a partir del voltaje de línea, aproximadamente 127v. La fuente de voltaje diseñada queda plasmada en un diagrama, el que incluye todas la componentes de dicha fuente y la forma en que éstas están dispuestas en el circuito para un correcto funcionamiento.

Los dispositivos utilizados para el diseño y posterior construcción de la fuente se enlistan en el Cuadro 2.1.

Cuadro 2.1: Dispositivos de la fuente de alimentación.

Símbolo	Dispositivo	Valor	Unidades
	Transformador	127-24, 2	v, A
$D1$	Puente de diodos	200, 4	v, A
$C1, C2$	Capacitor	50, 4700	$v, \mu F$
$C3, C4$	Capacitor	25, 2200	$v, \mu F$
$U1$	LM7805CT	5	v
$U2$	LM7812CT	12	v

Para poder explicar mejor cada una de las partes que conforman la fuente, sus componentes se agrupan en tres partes:

- *Entrada y rectificación.*
- *Regulación.*
- *Salida.*

2.2.1.1. Entrada y rectificación

El voltaje de alimentación que se requiere para hacer funcionar la fuente de voltaje es de 127v CA (corriente alterna) promedio, este voltaje se hace pasar por un transformador cuya función es la de reducir el voltaje de 127v CA a 24v CA, este nuevo voltaje se suministra a un rectificador de voltaje el cual se limita a transformar los 24v CA a 36v CD, esta parte de la etapa de potencia se ilustra en la Figura 2.36. Una vez que se logra convertir el voltaje de CA a voltaje de CD, es necesario rectificar este voltaje, ya que sí no se hace así, éste tiene variaciones de voltaje muy altas que pueden alterar el funcionamiento de los circuitos o generar ruido.

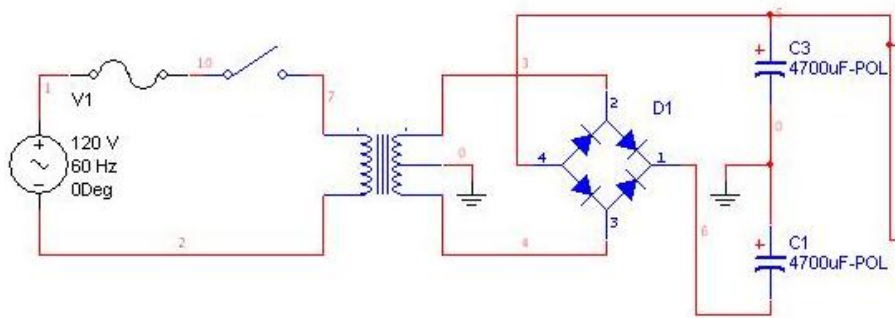


Figura 2.36: Rectificación de la señal.

2.2.1.2. Regulación

Una vez que se logra estabilizar el voltaje que se genera mediante el puente de diodos, se colocan los reguladores de voltaje que entregan el voltaje necesario para alimentar los circuitos.

Para poder obtener los voltajes que se requieren para alimentar el sistema se utilizan los siguientes circuitos integrados (reguladores de voltaje):

- LM7812.
- LM7805.

En la Figura 2.37 se muestran los reguladores de voltaje que se utilizan así como la forma en que se conectan.

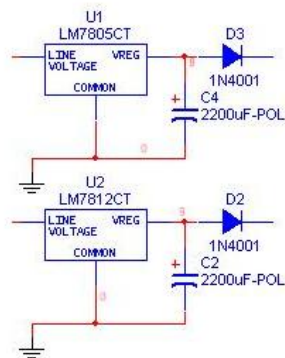


Figura 2.37: Regulación de la señal.

2.2.1.3. Salida

Al haber concluido con la implantación de los reguladores de voltaje se han logrado tener distintos voltajes de salida que se muestran en la Figura 2.38 que resume de manera gráfica todo lo explicado anteriormente respecto a la fuente de alimentación.

Los diodos que se colocan al final de cada salida de voltaje tienen la función de evitar los regresos de voltaje que se puedan presentar en la fuente debido a la FEM generada por el motor. Así se evita entonces que se afecte el funcionamiento normal de la etapa de potencia y demás etapas que son alimentadas por la fuente.

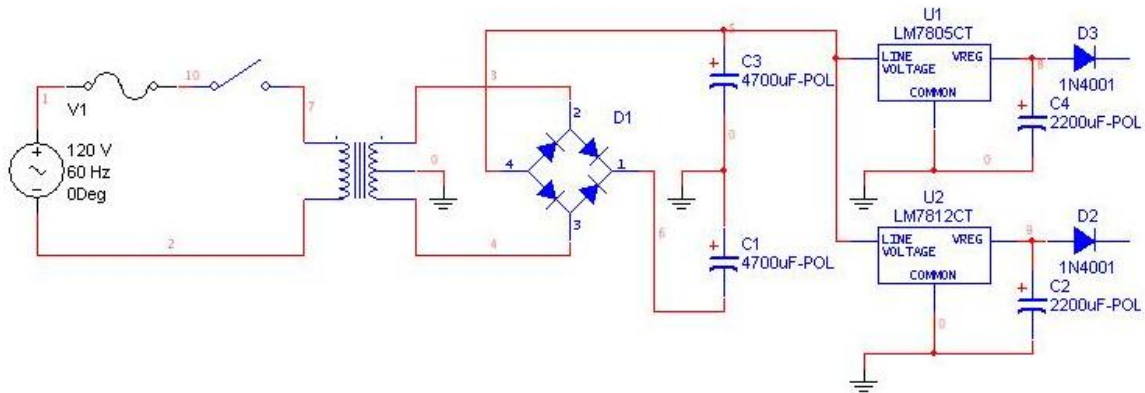


Figura 2.38: Diagrama eléctrico completo de la fuente de alimentación.

2.2.2. Etapa de sensado

La *etapa de sensado* se divide a su vez en dos partes, la primera es la correspondiente al *sensor de la barra* y la segunda es la parte de sensado de la posición del motor. A continuación se describe cada una de éstas partes:

2.2.2.1. Sensor de la barra

Para poder controlar el sistema es necesario sensar distintas variables, una de ellas es sensar la posición que tiene la *bola* con respecto a la *barra*.

Para hacer esta medición es necesario adaptar un sensor que en este caso se trata de un alambre plano con propiedades resistivas llamado *microm*.

La aplicación que se le da a este alambre resistivo es, el de utilizarlo como un potenciómetro cuyo eje regulador de resistividad será la *bola* al ser ésta conductora y desplazarse sobre el *microm*.

En este caso no es posible utilizar la variación de resistencia que nos va a dar la *bola* al estar en contacto con la *barra* para el sensado, por lo que se procede a aplicar un voltaje a la resistencia para que de esta manera lo que sea sensado sea una variación de voltaje, facilitando con esto, la medición, en lugar de la variación de resistencia que se tenía inicialmente.

La Figura 2.39 ilustra la conexión física del alambre *microm* a la fuente de alimentación de 5v. CD.

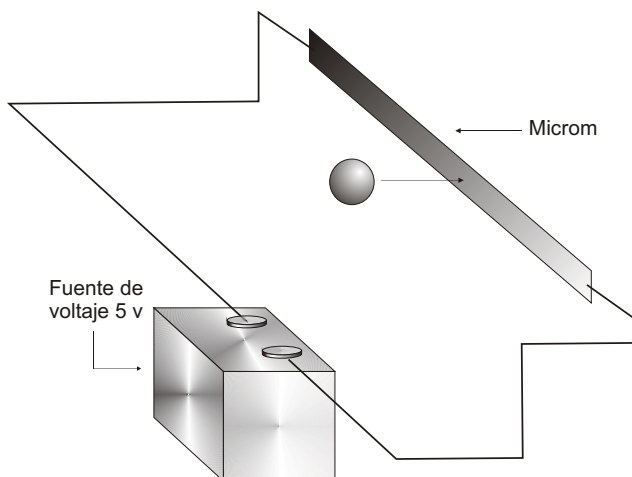


Figura 2.39: Sensor de la *Barra*.

En la Figura 2.40 se ilustra de manera exacta cual sería la comparación del alambre *microm* con un potenciómetro variable que es el dispositivo con el que se esta comparando, esto se debe a que la parte que controla la resistencia de un potenciómetro, en el alambre *microm* esta dictada por la *bola* que se desliza sobre el mismo alambre.

2.2.2.2. Sensor de la inclinación de la barra

En este sistema también es necesario el sensado de la posición del motor ya que dependiendo de la posición a la que se quiera que llegue, es necesario controlar la inclinación de la *barra*.

Un motor el cual tiene como adaptación un conjunto de elementos que permiten saber su posición exacta se le llama *servomotor*. En este caso se construye un servomotor, adaptando al motor un *sistema de acoplamiento* además de un potenciómetro lineal para la parte de sensado. El acoplamiento del motor al potenciómetro mediante el *sistema de acoplamiento* se muestra a detalle en la Sección 2.1.

Pero al igual que el sensor de la *barra* no se puede utilizar la variación de resistencia

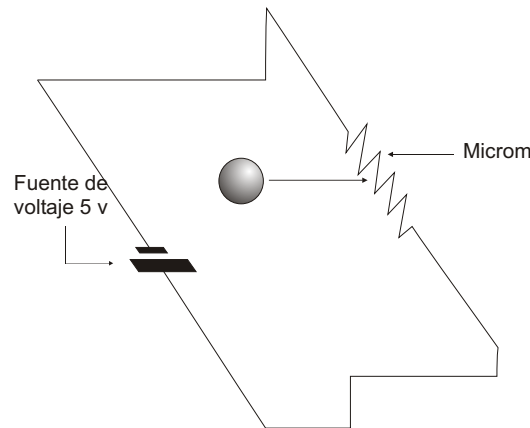


Figura 2.40: Comparación de un potenciómetro con el sensor que se coloca en la Barra.

del potenciómetro para el sistema, por lo cual es necesario también aplicarle voltaje a este sensor para que el resultado del sensado sea una variación de voltaje.

La Figura 2.41 muestra el circuito físico de la conexión del potenciómetro con la fuente de voltaje.

2.2.3. Etapa de control

Dentro de la etapa de control del sistema *Ball and Beam* se pueden reconocer dos partes que son las que se describen a continuación, el *punte H* y el microcontrolador.

2.2.3.1. Puente H

La manipulación del balanceo de la *barra* esta dictada por el control que ejerce el motor sobre ésta, por lo que es necesario controlar el sentido del giro del motor. Esto se logra mediante la aplicación de un circuito integrado denominado *punte H*. Este dispositivo integra un arreglo de transistores que manipula el giro del motor, así mismo tiene un arreglo de compuertas lógicas que permite tener cuatro estados en los que se puede encontrar el motor, que son giro hacia la derecha, giro hacia la izquierda, frenado y paro. La Figura 2.42 muestra el diagrama a bloques del *punte H*.

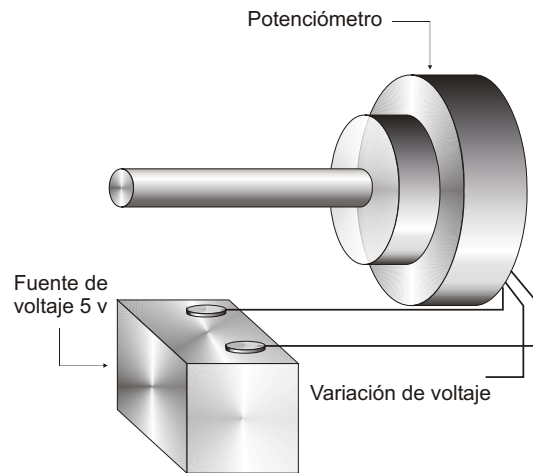
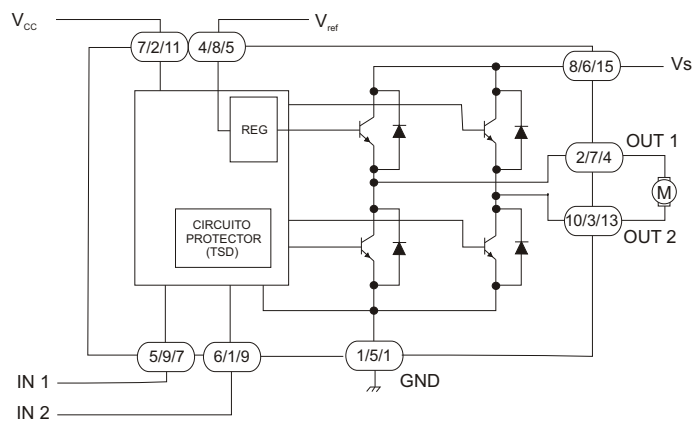


Figura 2.41: Sensor del motor.

Figura 2.42: Diagrama a bloques del *punte H*.

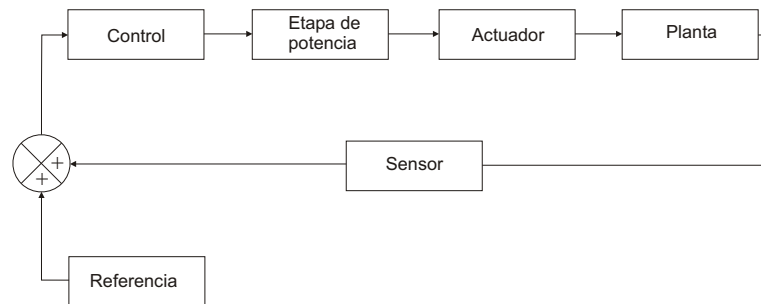


Figura 2.43: Diagrama a bloques de la conexión del microcontrolador.

2.2.3.2. Microcontrolador

El microcontrolador es el cerebro del sistema el cual realiza distintas funciones entre las que se encuentran las conversiones analógica-digital de las señales provenientes de los sensores, las operaciones lógicas de control del programa y el envío de las señales de control al actuador.

En la Figura 2.43 se puede observar el diagrama a bloques de la conexión del microcontrolador a las diferentes partes del sistema *Ball and Beam*.

2.3. Comentarios

La etapa del diseño representa un paso previo al maquinado de las diferentes piezas que conforman el sistema *Ball and Beam*. Es esta etapa la más difícil para un estudiante en electrónica y telecomunicaciones, ya que se requieren conocimientos distintos a los adquiridos en las aulas, es por eso que la búsqueda de los prototipos existentes proporcionan ideas para el diseño de un nuevo prototipo incorporando elementos del diseño de otros ya existentes, así entonces se puede decir que una contribución de esta tesis es el diseño mismo propuesto y descrito en este capítulo.

Capítulo 3

Modelado del sistema

El objetivo de este capítulo es obtener el modelo matemático del sistema *Ball and Beam* propuesto, para esto se emplea la formulación de Euler-Lagrange.

El capítulo se organiza de la siguiente manera: en la Sección 3.1 se da una introducción al sistema *Ball and Beam*, para posteriormente en la Sección 3.2 obtener las ecuaciones de energía potencial y la energía cinética que son requeridas para obtener el *Lagrangiano* y de esta manera aplicar la ecuación de Euler-Lagrange para obtener un modelo no lineal, el cual en la Sección 3.3 se linealiza y se hace un estudio de las ecuaciones estructurales del modelo lineal.

3.1. Introducción

El modelado de un sistema se define como la representación dinámica del mismo mediante un conjunto de ecuaciones que generalmente son ecuaciones diferenciales, éstas se obtienen a partir de leyes físicas que apliquen al sistema en cuestión, a fin de poder simular en una computadora el sistema y poder diseñar leyes de control.

Actualmente los problemas de control de sistemas subactuados ha motivado el desarrollo de nuevas metodologías para el diseño de control no lineal. Tales sistemas tienen menos entradas independientes de control respecto a grados de movimiento a controlar. El sistema *Ball and Beam* es el caso, puesto que tiene dos grados de libertad y un sólo actuador.

El sistema que se muestra en la Figura 3.1 consiste en una barra sujeta de un extremo, el otro extremo de la barra está sujeta a un sistema de acoplamiento el cual desplaza la barra verticalmente sólo de ese extremo. La siguiente parte consiste en una bola, la cual es el objeto a manipular, que se mueve a lo largo de la barra, es decir el objetivo del control diseñado es controlar el desplazamiento de la bola de tal manera que ésta llegue a colocarse y mantenerse en el punto de referencia deseado. Para esto se cuenta con dos sensores, uno de los cuales entrega la posición de la bola

y el otro entrega la inclinación de la barra.

A continuación se presenta el procedimiento seguido para obtener el modelado del sistema *Ball and Beam*.

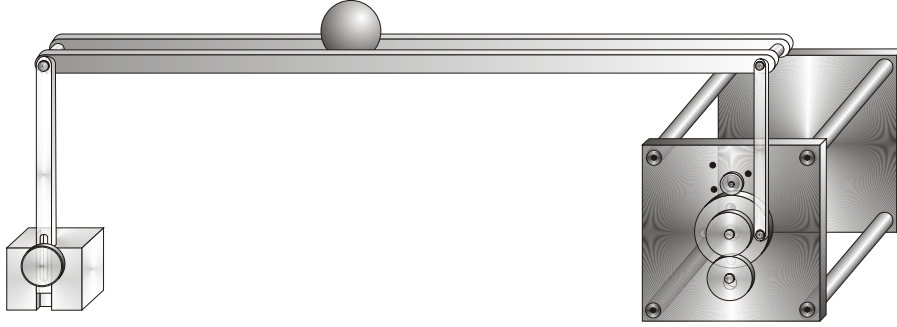


Figura 3.1: Descripción del sistema *Ball and Beam*.

3.2. Ecuaciones dinámicas del *Ball and Beam*

Los sistemas mecánicos se componen de dos clases de energía, la *energía cinética*, la cual se define como la energía de un cuerpo en movimiento, y la *energía potencial*, definida como la energía de un cuerpo en reposo. De acuerdo a lo anterior, el modelado de sistemas mecánicos que proporciona la ecuación de *Euler-Lagrange* es el utilizado para este trabajo, el cual se define por la siguiente expresión [9]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}, \quad (3.1)$$

donde:

- \mathbf{q} es el vector de coordenadas generalizadas.
- L es el *Lagrangiano*.
- $\boldsymbol{\tau}$ es el vector de un momento cualquiera aplicado al sistema.

El *Lagrangiano* se define como:

$$L = K - V, \quad (3.2)$$

donde:

- K es la energía cinética.
- V es la energía potencial.

Primero, se deben tener bien definidas las variables que representan los grados de libertad, de acuerdo al diagrama mostrado en la Figura 3.2, la primera coordenada generalizada del *Ball and Beam* es la posición de la barra respecto al eje de coordenadas x que se traduce en un ángulo y es representado por q_2 , mientras que la segunda coordenada generalizada esta dada por el desplazamiento de la bola a lo largo de toda la superficie de la barra respecto al cruce de los ejes x y y , ésta se representa por q_1 . El cuadro 3.1 contiene los parámetros y variables del sistema *Ball and Beam*.

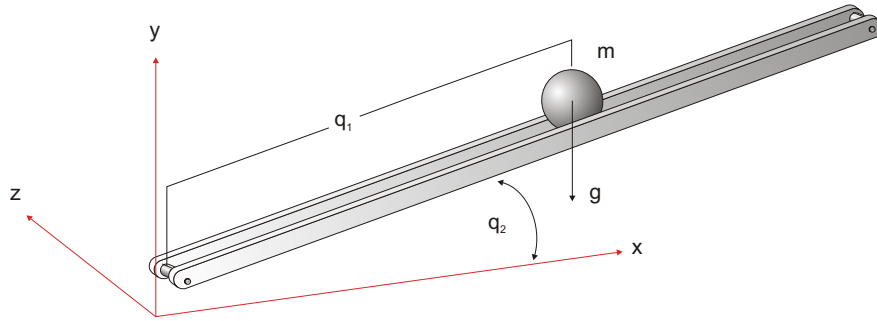


Figura 3.2: Variables del sistema *Ball and Beam*.

Una vez definidos los grados de libertad, lo cual se traduce en este caso en las coordenadas generalizadas, se procede al cálculo de las energías del sistema.

3.2.1. Energía cinética del sistema *Ball and Beam*

La energía cinética de un cuerpo se representa por la siguiente expresión:

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} I_i V_i^2, \quad (3.3)$$

donde n representa la cantidad de coordenadas generalizadas, I_i es el momento de inercia del i -ésimo cuerpo en movimiento y V_i es la i -ésima velocidad lineal.

Como se puede observar en la Figura 3.2 el sistema *Ball and Beam* tiene dos masas independientes que están dadas por la bola y la barra, respectivamente, por lo tanto cada una de ellas contribuye a la energía cinética de la siguiente manera:

Cuadro 3.1: Parámetros y variables del sistema *Ball and Beam*.

Parámetro	Nombre	Valor	Unidades
q_1	Posición de la bola	-	m
q_2	Posición de la barra	-	rad
ℓ	Longitud de la barra	0.777	m
m	Masa de la bola	0.25	kg
g	Constante de gravedad	9.81	m/seg^2
I_T	Inercia total	0.042414	$kg \cdot m^2$
R	Radio de la bola	0.0127	m
m_b	Masa de la barra	0.21	kg
m_e	Masa del eslabón	0.051	kg

$$K_{bola} = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} I_b V_b^2, \quad (3.4)$$

$$K_{barra} = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} I_m V_m^2, \quad (3.5)$$

donde $I_b, I_m, V_b, y V_m$ son los momentos de inercia y velocidad tanto de la bola como de la barra, respectivamente.

A continuación se hace una descomposición de la energía cinética de la bola en su parte lineal y en su parte angular, puesto que la bola además de subir y bajar por la acción de la barra (movimiento angular) también se mueve a lo largo de ésta (movimiento lineal).

La descomposición queda de la siguiente manera:

$$K_{bola} = \frac{1}{2} I_b \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m \vec{V}_b^2, \quad (3.6)$$

donde \vec{V}_m es el vector velocidad de la masa.

La ecuación total de la energía cinética es la suma de dos ecuaciones parciales que definen la energía cinética de la masas.

$$\begin{aligned}
K_{Total} &= \frac{1}{2}I_b\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}I_m\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}m\vec{V}_m^2, \\
&= \frac{1}{2}I_b\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}I_m\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}m\vec{V}_m^2, \\
&= \frac{1}{2}(I_b + I_m)\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}m\vec{V}_m^2.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Para encontrar a \vec{V}_m , se necesita del vector de posición del centro de masa de la bola (ver Figura 3.3), el cual se representa por:

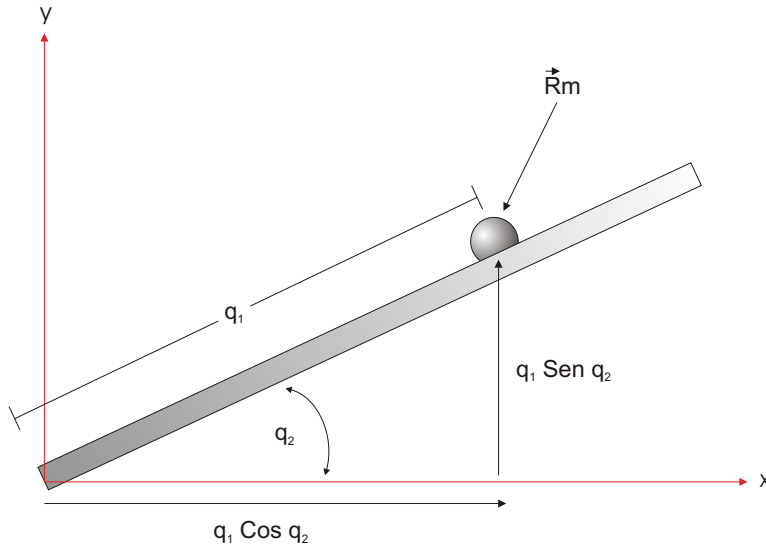


Figura 3.3: Vector de posición del centro de masa de la bola.

$$\vec{R}_m = q_1(\cos q_2, \sin q_2), \tag{3.8}$$

$$= (q_1 \cos q_2, q_1 \sin q_2), \tag{3.9}$$

así, la velocidad del centro de masa se define como la variación de \vec{R}_m con respecto al tiempo.

$$\begin{aligned}
\vec{V}_m &= \frac{d}{dt} [\vec{R}_m], \\
&= -q_1\dot{q}_2 \sin q_2 + \dot{q}_1 \cos q_2, \quad q_1\dot{q}_2 \cos q_2 + \dot{q}_1 \sin q_2, \\
&= (V_{11}, V_{12}),
\end{aligned} \tag{3.10}$$

considere que:

- $V_{11} = -q_1 \dot{q}_2 \sin q_2 + \dot{q}_1 \cos q_2.$
- $V_{12} = q_1 \dot{q}_2 \cos q_2 + \dot{q}_1 \sin q_2.$

Para calcular el cuadrado de la velocidad \vec{V}_m , se tiene que:

$$\vec{V}_m^2 = \vec{V}_m \vec{V}_m^T = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{12} \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

$$= V_{11}^2 + V_{12}^2, \quad (3.12)$$

sustituyendo lo valores de V_{11} y V_{12} , resulta:

$$\vec{V}_m^2 = q_1^2 \dot{q}_2^2 \sin^2 q_2 - 2q_1 q_2 \sin q_2 \dot{q}_1 \cos q_2 + \dot{q}_1^2 \cos^2 q_2 \quad (3.13)$$

$$+ q_1^2 \dot{q}_2^2 \cos^2 q_2 + 2q_1 q_2 \cos q_2 \dot{q}_1 \sin q_2 + \dot{q}_1^2 \sin^2 q_2, \quad (3.14)$$

aplicando la identidad $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ en (3.13) se concluye que:

$$\vec{V}_m^2 = \dot{q}_1^2 + q_1^2 \dot{q}_2^2, \quad (3.15)$$

finalmente, sustituyendo (3.15) en (3.7) se obtiene:

$$K_{Total} = \frac{1}{2}(I_B + I_m)\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + q_1^2 \dot{q}_2^2). \quad (3.16)$$

3.2.2. Energía potencial del sistema *Ball and Beam*

A la posición de un cuerpo con masa m el cual se coloca a una altura h se le conoce como energía potencial y se determina mediante la siguiente ecuación:

$$V = mgh, \quad (3.17)$$

si se observa de la Figura 3.2 y de acuerdo a (3.17) se deduce que:

$$h = q_1 \sin(q_2), \quad (3.18)$$

por lo tanto, la ecuación de la energía potencial total del *Ball and Beam* queda definida por:

$$V_{Total} = mgq_1 \sin q_2. \quad (3.19)$$

3.2.3. Lagrangiano y coordenadas generalizadas del *Ball and Beam*

Una vez obtenidas las energías potencial y cinética del sistema *Ball and Beam*, el siguiente paso es obtener el *Lagrangiano* sustituyendo las energías cinética (3.16) y potencial (3.19) del sistema y de acuerdo a (3.2) se tiene:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(I_b + I_m)\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + q_1^2\dot{q}_2^2) - mgq_1 \sin(q_2), \\ &= \frac{1}{2}I_{Total}\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + q_1^2\dot{q}_2^2 - mgq_1 \sin(q_2)). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Como se puede observar en la ecuación (3.21) la inercia total I_{Total} se compone de la suma de las inercias I_b y I_m , para calcular I_{Total} primero se calcula la inercia de la bola y la inercia de la barra donde I_m se descompone en la inercia de la barra I_{m1} , más la inercia del eslabón I_{m2} . definida la inercia total como.

$$I_{Total} = I_b + I_{m1} + I_{m2}. \quad (3.21)$$

Momento de inercia de la bola

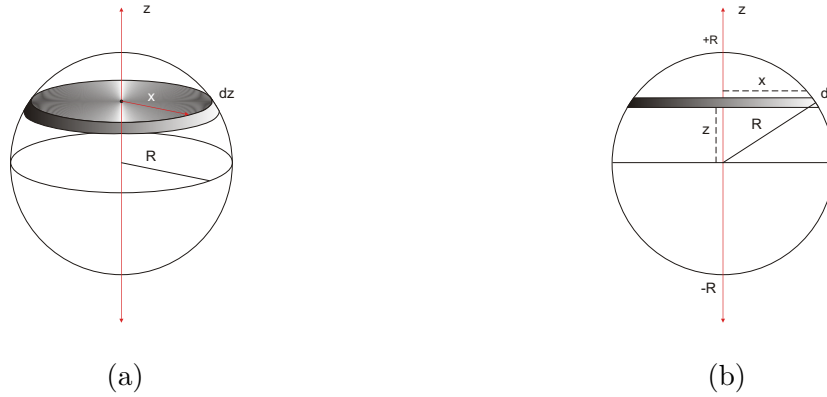


Figura 3.4: Seccionamiento de la bola, (a);Vista plana, (b).

Para el cálculo de la inercia de la bola se divide la esfera en discos de radio x y de espesor dz como se observa en la Figura 3.4a. El momento de inercia de cada uno de los discos es [4]:

$$\frac{1}{2}x^2 dm. \quad (3.22)$$

La masa de cada uno de los discos es:

$$dm = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \pi x^2 dz = \frac{3m}{4R^3} x^2 dz. \quad (3.23)$$

El momento de inercia de la esfera I_b , es la suma de los momentos de inercia de todos los discos elementales.

$$I_b = \int \frac{1}{2} x^2 dm = \int_{-R}^R \frac{1}{2} x^2 \frac{3m}{4R^3} x^2 dz = \frac{3m}{8R^3} \int_{-R}^R x^4 dz. \quad (3.24)$$

Para resolver la integral 3.24 se tiene que relacionar la variable x con la z de la siguiente forma $x^2 + z^2 = R^2$ como se observa en la Figura 3.4b resultando:

$$I_b = \frac{3m}{8R^3} \int_{-R}^R (R^2 - z^2)^2 dz = \frac{3m}{8R^3} \int_{-R}^R (R^4 + z^4 - 2R^2 z^2) dz = \frac{2}{5} m \cdot R^2. \quad (3.25)$$

implementando los valores del Cuadro 3.1 en (3.25) se obtiene:

$$I_b = \frac{2}{5} (0.085 kg) (0.0127 m)^2 = 0.0000054838 \text{ kg} \cdot m^2. \quad (3.26)$$

Momento de inercia de la barra

Se calcula el momento de inercia de la barra con una masa m_b y una longitud ℓ respecto de un eje perpendicular a la barra, que pasa por el centro de masas (ver Figura 3.5). La masa dm del elemento de longitud de la barra comprendido entre x y $x + dx$ es [4]:

$$dm = \frac{m_b}{\ell} dx. \quad (3.27)$$

El momento de inercia de la barra I_{m1} es:

$$I_{m1} = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{m_b}{\ell} x^2 dx = \frac{1}{12} m_b \cdot \ell^2, \quad (3.28)$$

considerando la longitud (ℓ) de la barra de $0.777m$ y su masa (m_b) de $0.21kg$ el cálculo de su inercia queda:

$$I_{m1} = \frac{1}{12} (0.21 kg) (0.777 m)^2 = 0.04226103 \text{ kg} \cdot m^2. \quad (3.29)$$

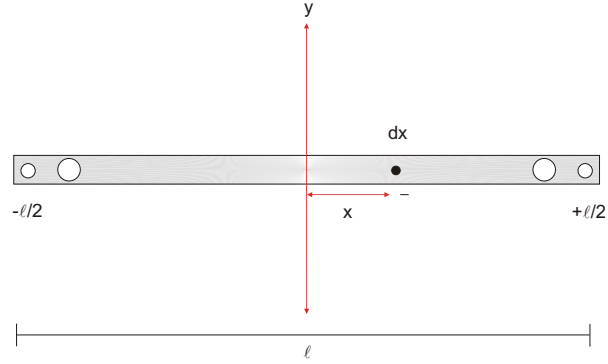


Figura 3.5: Eje perpendicular a la barra.

Momento de inercia del eslabón

Para calcular el momento de inercia del eslabón de masa m_e y de lados a , b y c respecto de un eje perpendicular a una de sus caras, se divide el eslabón en placas rectangulares de lados a y b y de espesor dx (ver Figura 3.6).

El momento de inercia de cada una de las placas respecto de su eje de simetría es [4]:

$$\frac{1}{12}b^2 dm. \quad (3.30)$$

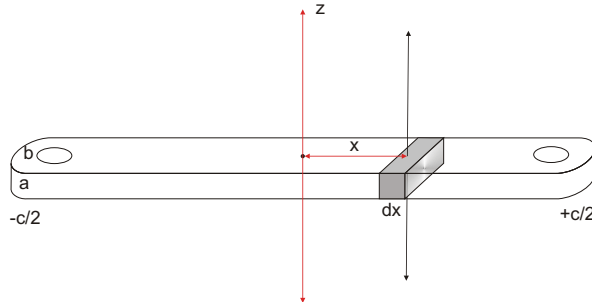


Figura 3.6: Seccionamiento del eslabón en placas rectangulares.

Calculando el momento de inercia de esta placa respecto de un eje paralelo situado

a una distancia x queda:

$$I_{m2} = \frac{1}{12}b^2 dm + x^2 dm = \left(\frac{1}{12}b^2 + x^2 \right) dm = \left(\frac{1}{12}b^2 + x^2 \right). \quad (3.31)$$

El momento de inercia del eslabón es:

$$I_{m2} = \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \left(\frac{1}{12}b^2 + x^2 \right) \frac{m_e}{c} dx = \frac{m_e}{12}(b^2 + c^2), \quad (3.32)$$

considerando que $b = 0.017m$, $c = 0.186m$ y $m_e = 0.051kg$ la inercia del eslabón es:

$$I_{m2} = \frac{0.051kg}{12}(0.017m)^2(0.186m)^2 = 0.000148261 \text{ kg} \cdot m^2. \quad (3.33)$$

La inercia total queda definida por la suma de las tres inercias anteriores como sigue:

$$I_T = I_b + I_{m1} + I_{m2} = 0.0424147219 \text{ kg} \cdot m^2. \quad (3.34)$$

Una vez calculada la inercia total del sistema y teniendo el *Lagrangiano* del mismo, se puede calcular las ecuaciones diferenciales no lineales que describen el comportamiento del *Ball and Beam* para esto, considerando las coordenadas generalizadas q_1 y q_2 , resulta:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} L \right] - \frac{\partial}{\partial q_1} L = 0, \quad (3.35)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_2} L \right] - \frac{\partial}{\partial q_2} L = f, \quad (3.36)$$

donde f es la fuerza aplicada a la barra por el motor que se traduce en un torque τ .

Para q_1 se tiene:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = m q_1 \dot{q}_2^2 - mg \sin q_2, \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = m \dot{q}_1, \quad (3.38)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right] = m \ddot{q}_1. \quad (3.39)$$

Sustituyendo (3.37) y (3.39) en (3.35), se obtiene:

$$m\ddot{q}_1 - mq_1\dot{q}_2^2 + mg \sin q_2 = 0. \quad (3.40)$$

Para q_2 se tiene:

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -mgq_1 \cos q_2, \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = I_T \dot{q}_2 + mq_1^2 \dot{q}_2, \quad (3.42)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right] = I_T \ddot{q}_2 + mq_1^2 \ddot{q}_2 + 2mq_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2. \quad (3.43)$$

Sustituyendo (3.41) y (3.43) en (3.36), resulta:

$$I_T \ddot{q}_2 + mq_1^2 \ddot{q}_2 + 2mq_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + mgq_1 \cos q_2 = f. \quad (3.44)$$

En forma general, estas ecuaciones pueden escribirse como [9]:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau, \quad (3.45)$$

donde $M(q)$ es la matriz de inercia representada por:

$$M(q) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & mq_1^2 + I_T \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

$C(q, \dot{q})$ es la matriz de *Coriolis*

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -mq_1 \dot{q}_2 \\ mq_1 \dot{q}_2 & mq_1 \dot{q}_1 \end{bmatrix}, \quad (3.47)$$

y $G(q)$:

$$G(q) = \begin{bmatrix} mg \sin q_2 \\ mgq_1 \cos q_2 \end{bmatrix}, \quad (3.48)$$

que es resultado de la gravedad g .

La fuerza generalizada esta dada por:

$$\tau = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Se puede apreciar que las ecuaciones (3.45) y (3.49) definen a un sistema subactuado al tener sólo una entrada f y dos grados de libertad q_1 y q_2 .

3.2.4. Cambio de variables

Un cambio de variable en las ecuaciones de algún sistema se refiere al cambio en el orden de las ecuaciones del mismo, esto es, de forma más particular, pasar de tener un par de ecuaciones de segundo orden a tener cuatro ecuaciones de primer orden y así simplificar el proceso de solución.

Para el modelo no lineal del sistema *Ball and Beam* dado por las ecuaciones (3.40) y (3.44) se proponen las variables:

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1, \\ x_2 &= \dot{q}_1, \\ x_3 &= q_2, \\ x_4 &= \dot{q}_2, \end{aligned}$$

derivando las nuevas variables queda:

$$\dot{x}_1 = \dot{q}_1 = x_2, \quad (3.50)$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{q}_1, \quad (3.51)$$

$$\dot{x}_3 = \dot{q}_2 = x_4, \quad (3.52)$$

$$\dot{x}_4 = \ddot{q}_2. \quad (3.53)$$

Como se puede observar el valor de \dot{x}_1 y \dot{x}_3 se encuentran en función del cambio de variable por lo que resta encontrar el valor de \dot{x}_2 y \dot{x}_4 , para encontrar estos valores se despeja de las ecuaciones (3.40) y (3.44) respectivamente, para esto se sustituyen los cambios de variable en la ecuación (3.40):

$$m\dot{x}_2 - mx_1x_4^2 + mg\sin(x_3) = 0, \quad (3.54)$$

de donde se despeja a \dot{x}_2 , obteniendo:

$$\dot{x}_2 = x_1 x_4^2 - g \sin(x_3), \quad (3.55)$$

para x_4 , se sustituye el cambio de variable y su derivada en (3.44), resultando:

$$\dot{x}_4(I_T + mx_1^2) + 2mx_1x_2x_4 + mgx_1 \cos x_3 = f, \quad (3.56)$$

de donde se despeja a \dot{x}_4 obteniendo:

$$\dot{x}_4 = \frac{f}{I_T + mx_1^2} - \frac{2mx_1x_2x_4}{I_T + mx_1^2} - \frac{mgx_1 \cos(x_3)}{I_T + mx_1^2}, \quad (3.57)$$

poniendo (3.51),(3.53),(3.55) y (3.57) en una representación matemática del sistema *Ball and Beam* en variables de estado matricial queda de la forma:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (3.58)$$

$$y = u(x), \quad (3.59)$$

donde $u = f$; $f(x)$ y $g(x)$ se componen por:

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 x_4^2 - g \sin(x_3) \\ x_4 \\ -\frac{2mx_1x_2x_4}{I_T + mx_1^2} - \frac{mgx_1 \cos x_3}{I_T + mx_1^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}, \quad (3.60)$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_T + mx_1^2} \end{bmatrix}. \quad (3.61)$$

Para propósitos de control, se selecciona una salida del sistema, para el *Ball and Beam* se tiene que la salida es la posición de la bola, es decir:

$$y = h(x) = q_1 = x_1. \quad (3.62)$$

3.3. Linealización del modelo no lineal

Al proceso de obtener un sistema lineal a partir de otro no lineal se le conoce como *linealización*, ésta se produce alrededor de un punto o trayectoria definida por x^* en donde el sistema opera, pero el nuevo sistema sólo será válido en los puntos o trayectorias cercanas al punto de linealización.

3.3.1. Punto de equilibrio

Para el sistema *Ball and Beam* la *linealización* se producirá alrededor del punto de equilibrio x^* .

Donde $x = x^*$, así, x^* es un punto de equilibrio ya que si se toma como condición inicial $x = x^*$ el sistema se queda ahí para siempre. Para asegurar el equilibrio se propone la entrada $u = 0$:

$$\dot{x} = f(x^*) = 0. \quad (3.63)$$

Resolviendo (3.63) se obtiene el vector de puntos de equilibrio resultando cuatro ecuaciones, para esto se emplea el vector dado por (3.60)

$$x_2 = x_2^* = 0, \quad (3.64)$$

$$x_1 x_4^2 - g \sen x_3 = 0, \quad (3.65)$$

$$x_4 = x_4^* = 0, \quad (3.66)$$

$$-\frac{2mx_1 x_2 x_4}{I_T + mx_1^2} - \frac{mgx_1 \cos x_3}{I_T + mx_1^2} = 0. \quad (3.67)$$

Sustituyendo (3.64) y (3.66) en las ecuaciones (3.65) y (3.67), queda:

$$x_1(0)^2 - g \sen x_3 = 0, \quad (3.68)$$

$$-g \sen x_3 = 0, \quad (3.69)$$

$$\sen x_3 = 0, \quad (3.70)$$

al resolver (3.70) se tiene que:

$$x_3^* = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm\ldots \pm n\pi; \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.71)$$

Por otro lado de (3.67) se obtiene:

$$\frac{-mgx_1 \cos x_3}{I_T + mx_1^2} = 0, \quad (3.72)$$

$$I_T + mx_1^2 \neq 0, \quad (3.73)$$

$$mgx_1 \cos x_3 = 0, \quad (3.74)$$

la ecuación (3.74) se cumple si $x_1 \neq 0$ y $x_1 = n\pi; n \in \mathbb{Z}$, del cual se obtiene que:

$$x_1 \cos x_3 = 0, \quad (3.75)$$

de (3.75) se observa que se presentan dos casos:

$$x_1 = 0 \quad y \quad \cos(x_3) \neq 0, \quad (3.76)$$

$$x_1 \neq 0 \quad y \quad \cos(x_3) = 0, \quad (3.77)$$

de (3.77) se observa que $x_3^* = \frac{n}{2} \pi$, $n = 1, 3, 5, \dots$, el cual es inconsistente con lo obtenido anteriormente de la ecuación (3.68), por tanto se concluye que sólo se cumple el caso que se presenta en el inciso 1, es decir que $x_1^* = 0$ y $\cos(x_3) \neq 0$.

De acuerdo a (3.63) resultan los puntos de equilibrio, para $n \in \mathbb{Z}$:

$$x^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.78)$$

para $n = 0$ se obtiene el punto de equilibrio:

$$x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.79)$$

3.3.2. Expansión por series de Taylor

Se realiza la expansión por series de Taylor, de $f(x)$ alrededor de x^* dado por (3.79), a partir de:

$$f(x) = f(x)|_{x=x^*} + \frac{\partial f(x)}{\partial x}|_{x=x^*}(x - x^*) + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}|_{x=x^*}(x - x^*)^2 + \dots, + \quad (3.80)$$

despreciando los términos de orden superior en (3.80), resulta:

$$f(x) \approx f(x)|_{x=x^*} + \frac{\partial f}{\partial x}|_{x=x^*}(x - x^*). \quad (3.81)$$

Si se define:

$$\Delta x = x - x^*, \quad (3.82)$$

$$\Delta u = u - u^* \quad (3.83)$$

$$\dot{x} = f(x), \quad (3.84)$$

$$\dot{x}^* = f(x^*), \quad (3.85)$$

entonces:

$$\underbrace{f(x) - f(x)|_{x=x^*}} \approx \frac{\partial f}{\partial x}|_{x=x^*} \Delta x \quad (3.86)$$

$$\Delta \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}|_{x=x^*} \Delta x. \quad (3.87)$$

Resultando el sistema lineal incremental:

$$\Delta \dot{x} = \mathbf{A} \Delta x; \mathbf{A} = \frac{\partial f}{\partial x}|_{x=x^*}. \quad (3.88)$$

3.3.3. Ecuaciones en el espacio de estados

Un sistema moderno complejo posee múltiples entradas y múltiples salidas que se relacionan entre sí en una forma complicada. Para analizar un sistema de este tipo, es esencial reducir la complejidad de las expresiones matemáticas. El enfoque en el espacio de estados para los análisis de sistemas es el más conveniente.

En tanto que la teoría de control convencional se basa en la descripción de las ecuaciones de transferencia, la teoría de control moderna se basa en la descripción de las ecuaciones de un sistema en términos de n ecuaciones diferenciales de primer orden, sin embargo en ocasiones es conveniente auxiliarse de ambas descripciones. El uso de la notación matricial simplifica enormemente la representación matemática de los sistemas de ecuaciones. El incremento en la cantidad de variables de estado, de entrada y de salida no aumenta la complejidad de las ecuaciones.

A continuación se presenta el procedimiento para la obtención de las matrices de estado del sistema *Ball and Beam*

La matriz de estados \mathbf{A} queda definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{array} \right] \Big|_{x=x^*}, \\ &= \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_4^2 & 0 & -g \cos x_3 & 2x_1 x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{(I_T - mx_1^2)(2mx_2 x_4 + mg \cos x_3)}{(mx_1^2 + I_T)^2} & -\frac{2mx_1 x_4}{mx_1^2 + I_T} & \frac{mgx_1 \sin x_3}{mx_1^2 + I_T} & -\frac{2mx_1 x_2}{mx_1^2 + I_T} \end{array} \right] \Big|_{x=x^*}, \\ &= \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-mg}{I_T} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Las matrices \mathbf{B} y \mathbf{C} quedan de la siguiente manera:

$$\mathbf{B} = g(x^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_T} \end{bmatrix}, \quad (3.89)$$

$$\mathbf{C} = \frac{\partial h}{\partial x}|_{x=x^*} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]. \quad (3.90)$$

Finalmente, la representación del sistema lineal incremental del *Ball and Beam*, queda dada por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden en forma matricial [5]:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \\ \Delta \dot{x}_3 \\ \Delta \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-mg}{I_T} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_T} \end{bmatrix} \Delta u,$$

$$\mathbf{y} = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{bmatrix}.$$

Observamos que para el caso del *Ball and Beam* $\Delta u = u - u^* = u$, $\Delta x = x - x^* = x$, por tanto se omite el Δ en el modelo lineal.

3.3.4. Linealización del sistema mediante *MATLAB*

Como se menciona anteriormente la *linealización* de un modelo matemático permite hacer más sencillo el proceso de éste, *MATLAB* nos permite linealizar un modelo no lineal obteniendo las matrices en el espacio de estados.

El programa MATLAB 3.2 permite obtener las matrices de estado a partir de las ecuaciones no lineales del sistema.

MATLAB 3.2: Matrices de estado
<pre>%----- Obtención de las matrices de estado -----</pre>

```

%----- Se definen primero todas las variables -----

syms x1 x2 x3 x4 m IT g;

%----- Se asignan los valores de las constantes -----

m=0.085; IT=0.04241473; g=9.8;

%----- Se definen los vectores no lineales f(x) y g(x) -----

f = [x2;
      x1*(x4)^2-g*sin(x3);
      x4;
      -(2*m*x1*x2*x4+m*g*x1*cos(x3))/(m*(x1)^2+IT)];

g = [0;
      0;
      0;
      1/(IT+m*(x1)^2)];

%----- Obteniendo A -----

% 
$$A = \frac{df(x)}{dx} \bigg|_{x=x^*} = \begin{bmatrix} \frac{df(x)}{dx1} & \frac{df(x)}{dx2} & \frac{df(x)}{dx3} & \frac{df(x)}{dx4} \end{bmatrix}$$


d1 = diff(f, x1); % ----- derivando con respecto a x1
d2 = diff(f, x2); % ----- derivando con respecto a x2
d3 = diff(f, x3); % ----- derivando con respecto a x3
d4 = diff(f, x4); % ----- derivando con respecto a x4

%----- Evaluando la matriz en el punto de equilibrio-----

A = subs([d1 d2 d3 d4], {x1,x2,x3,x4}, {0,0,0,0})

A =

      0      1.0000      0      0
      0      0     -9.8000      0
      0      0      0      1.0000
    -19.6394      0      0      0

% ----- Obteniendo B -----

```

```

%
%B = g(x) |
%         | x=x*

B = subs(g,{x1,x2,x3,x4}, {0,0,0,0})

B =

                                0
                                0
                                0
72057594037927936/3056303395568323

C=[1 0 0 0]

C =

1      0      0      0

```

Las matrices de estado obtenidas coinciden con las matrices obtenidas analíticamente, por lo tanto se puede concluir que el desarrollo de la obtención del modelo matemático de manera analítica fue el correcto.

Una vez que se ha comprobado que las matrices de estado son las correctas, se procede a obtener la *función de transferencia* que es muy importante en el modelo matemático de un sistema a controlar, ya que representa la respuesta impulsiva del sistema a una señal de entrada o excitación exterior, en pocas palabras, la *función de transferencia* es la relación que existe entre la señal de salida de un sistema y la señal de entrada del mismo.

3.3.5. Función de transferencia para el sistema en lazo abierto

Obtenidas las ecuaciones en el espacio de estados se procede a encontrar la *función de transferencia*, la cual se obtiene del cociente de la transformada de Laplace de la salida entre la transformada de Laplace de la entrada [6, 7], es decir:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s). \quad (3.91)$$

Así, la expresión de la *función de transferencia* en términos de \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} para el sistema en lazo abierto que se muestra en la Figura 3.7 queda como:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}. \quad (3.92)$$

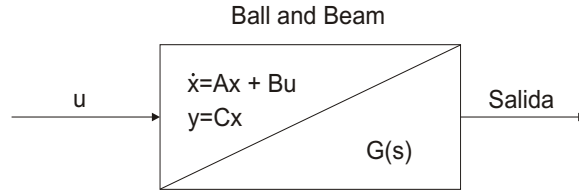


Figura 3.7: Sistema en lazo abierto.

Ahora bien, si se conocen ya las matrices de estado \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} y \mathbf{D} , éstas se sustituyen en (3.92) para obtener:

$$\begin{aligned} G(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-mg}{I_T} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_T} \end{bmatrix} + 0, \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & g & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ \frac{mg}{I_T} & 0 & 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_T} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

como,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & g & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ \frac{mg}{I_T} & 0 & 0 & s \end{bmatrix}, \quad (3.93)$$

para obtener \mathbf{A}^{-1}

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \text{Adj}(\mathbf{A})^T, \quad (3.94)$$

resulta:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{s^4 - \frac{mg^2}{I_T}} \begin{bmatrix} s^3 & -s^2 & -gs & g \\ -\frac{mg^2}{I_T} & s^3 & gs^2 & -gs \\ -\frac{mgs}{I_T} & \frac{mg}{I_T} & s^3 & -s^2 \\ \frac{mgs^2}{I_T} & -\frac{mgs}{I_T} & -\frac{mg^2}{I_T} & s^3 \end{bmatrix}. \quad (3.95)$$

Por lo tanto la *función de transferencia* del sistema *Ball and Beam* en lazo abierto queda:

$$\begin{aligned} G(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^4 - \frac{mg^2}{I_T}} \begin{bmatrix} s^3 & -s^2 & -gs & g \\ -\frac{mg^2}{I_T} & s^3 & gs^2 & -gs \\ -\frac{mgs}{I_T} & \frac{mg}{I_T} & s^3 & -s^2 \\ \frac{mgs^2}{I_T} & -\frac{mgs}{I_T} & -\frac{mg^2}{I_T} & s^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_T} \end{bmatrix} \quad (3.96) \\ &= -\frac{\frac{g}{I_T}}{s^4 - mg^2}. \quad (3.97) \end{aligned}$$

3.3.5.1. Obtención de la función de transferencia con *MATLAB*

El programa MATLAB 3.3 permite obtener la *función de transferencia* del *Ball and Beam* en lazo abierto a partir de las matrices de estado obtenidas anteriormente.

MATLAB 3.3: Función de transferencia

```
%----- Obtención de la función de transferencia -----

%----- Se definen primero todas las variables -----

syms m IT g;

%----- Se asignan los valores de las constantes -----

m=0.085; IT=0.04241473; g=9.8;
```

```

%----- Se definen las matrices A, B, y C -----

A =[0      1      0      0;
    0      0     -g      0;
    0      0      0      1;
   -m*g/IT  0      0      0];

B =[0;
    0;
    0;
    1/IT];

C= [1 0 0 0];

%----- Obteniendo la función de transferencia -----

[num,den] = ss2tf(A,B,C)

num =

      0   -0.0000    0.0000   -0.0000  -231.0518

den =

    1.0000    0.0000   -0.0000    0.0000  -192.4662

```

Como se puede observar la obtención de la *función de transferencia* mediante *MATLAB* es realmente sencilla, en sí la utilización de una herramienta tan poderosa como los es *MATLAB* es de mucha utilidad para la comprobación de los desarrollos analíticos de los modelos matemáticos de los sistemas de control, de ahí la importancia de tener como ayuda esta herramienta.

3.3.5.2. Obtención de polos y ceros mediante *MATLAB*

Después de haber obtenido la *función de transferencia* del sistema, se obtienen los polos y los ceros del sistema en lazo abierto.

El programa *MATLAB* 3.4 permite obtener los polos y ceros del sistema *Ball and Beam* en lazo abierto. Esto da una amplia perspectiva de la estabilidad del sistema, y muestra las frecuencias para las que el sistema es estable y las frecuencias para las que no lo es.

MATLAB 3.4: Simulación polos y ceros del sistema

```

%-----Obteniendo loa polos, ceros y ganancia del sistema -----

%----- Se definen primero todas las variables -----

syms m IT g;

%----- Se asignan los valores de las constantes -----

m=0.085; IT=0.04241473; g=9.8;

%----- Se definen las matrices A, B, C y D -----

A =[0      1      0      0;
    0      0     -g      0;
    0      0      0      1;
   -m*g/IT  0      0      0];

B =[0;
    0;
    0;
    1/IT];

C= [1 0 0 0];

D= [0];

%----- Se obtiene la función de transferencia -----

[num,den] = ss2tf(A,B,C,D)

num =

0   -0.0000    0.0000   -0.0000  -231.0518

```

```

den =

1.0000    0.0000   -0.0000    0.0000 -192.4662

%----- Se obtienen los polos, ceros y ganancia -----

[z,p,k] = tf2zp(num,den)

z =

1.0e+005 * 2.5334 + 4.3879i 2.5334 - 4.3879i -5.0667

p =

-3.7247
-0.0000 + 3.7247i
-0.0000 - 3.7247i
3.7247

k =

-1.7764e-015

```

Una vez que se obtienen los polos y ceros en lazo abierto del sistema es posible comprobar su posición en el espacio de la frecuencia mediante la obtención de una gráfica. Además, se puede observar que se tiene un polo en 3.7247 el cual es inestable, por tanto el sistema *Ball and Beam* es inestable en lazo abierto.

El programa MATLAB 3.5 construye una grafica de los polos y los ceros del sistema *Ball and Beam* en lazo abierto a partir de la *función de transferencia*.

MATLAB 3.5: Lugar de las raíces

<pre> %----- Lugar de las raíces en lazo abierto ----- num = [0 -0.0000 0.0000 -0.0000 -231.0518]; </pre>
--


```
den =[1.00000.0000-0.0000 0.0000 -192.4662];  
  
r=rlocus(num,den);  
  
plot(r,'o')  
  
v= [-6 6 -6 6]; axis(v)  
  
grid  
  
xlabel('Eje Real')  
  
ylabel('Eje Imaginario')  
  
title('Lugar de las raíces')
```

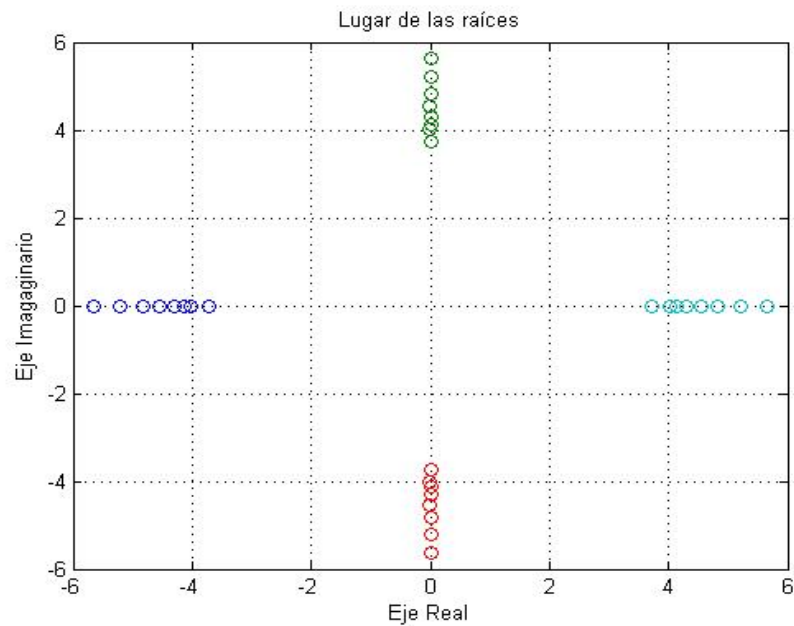


Figura 3.8: Lugar de las raíces.

En la Figura 3.8 se presentan los resultados de la simulación que permite observar los polos y los ceros del sistema, de la cual se observa que el sistema en lazo abierto

es inestable.

3.3.6. Función de transferencia para el sistema en lazo cerrado

Ahora bien para obtener la *función de transferencia* en lazo cerrado del sistema *Ball and Beam* es necesario tomar en cuenta que $u = Kx$ es la entrada que se le aplica al sistema en lazo abierto, y si además se desea aplicar una entrada ajena al sistema la entrada u quedaría de la siguiente manera:

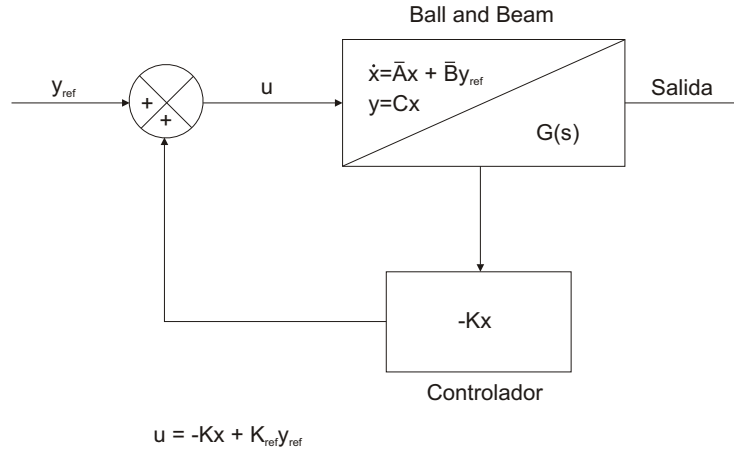


Figura 3.9: Sistema en lazo cerrado.

$$u = Kx + K_{ref} y_{ref}, \quad (3.98)$$

sustituyendo a u en la ecuación,

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u, \quad (3.99)$$

queda:

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}(Kx + K_{ref} y_{ref}), \quad (3.100)$$

multiplicando \mathbf{B} por el polinomio y factorizando x , la ecuación queda:

$$\dot{x} = x(\mathbf{A} + \mathbf{B}K) + \mathbf{B}K_{ref} y_{ref}, \quad (3.101)$$

se define $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{B}K$ y $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}K_{ref}$, sustituyendo en (3.101) queda:

$$\dot{x} = \bar{\mathbf{A}}x + \bar{\mathbf{B}}y_{ref} \quad (3.102)$$

por lo tanto la *función de transferencia* en lazo cerrado para el sistema de la Figura 3.9 es:

$$\begin{cases} \dot{x} = \bar{\mathbf{A}}x + \bar{\mathbf{B}}y_{ref} \\ y = \mathbf{C}x \end{cases} \Leftrightarrow G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1}\bar{\mathbf{B}}. \quad (3.103)$$

3.4. Comentarios

En este capítulo se presenta el desarrollo del modelado del sistema *Ball and Beam* y para esto se toma como principales variables a la posición de la bola representada por q_1 , y la posición o ángulo de la barra representada por q_2 . Se obtiene el modelo matemático utilizando el método de *Euler-Lagrange* obteniendo el *Lagrangiano* que es igual a la diferencia de la energía cinética y potencial del sistema que se calcula tanto para la barra como para la bola.

Además el sistema no lineal se linealiza, obteniendo de éste su *función de transferencia*. Este modelo lineal es utilizado más adelante en este trabajo para diseñar las leyes de control lineal.

Capítulo 4

Simulación del *Ball and Beam*

El objetivo de este capítulo es el de mostrar mediante simulaciones el funcionamiento “numérico” del sistema mediante gráficas y programas.

Simulink es una herramienta perteneciente a *MATLAB* en la cual se puede construir de manera gráfica diagramas de simulación. Aquí se hace uso de estas herramientas para simular el modelo no lineal del *Ball and Beam* en lazo cerrado. Para esto se diseña un controlador por retroalimentación del estado, donde se asume que se tiene el estado completo disponible.

4.1. Introducción

Simulación, se puede definir como una manera de reproducir el ambiente, las variables, rasgos, apariencia, características, de un sistema real, es como imitar una situación del mundo real en forma matemática. La simulación constituye una técnica económica que permite ofrecer varios escenarios posibles de una situación y también permite al usuario equivocarse sin provocar efectos sobre el sistema simulado.

Para poder conocer las características de cualquier sistema se cuenta con varios métodos que ayudan a determinar dichas características. Uno de los métodos mas conocidos y que proyecta los mejores resultados es la utilización de algún software para desarrollar simulaciones que representen el comportamiento de un sistema de control.

4.2. Representación del Ball and Beam en *Simulink*

Una parte muy importante del desarrollo de las simulaciones es la representación del sistema mediante la herramienta *Simulink-MATLAB*. Ésta es una herramienta que permite armar el sistema a controlar mediante bloques de ganancias, de funciones, de

módulos de suma, etc., los cuales ayudan a la representación del sistema a nivel de software. Ésta herramienta es muy poderosa, ya que permite hacer pruebas que para el sistema físico serían probablemente destructivas y que dañarían dicho sistema. Éstas pruebas dan una aproximación del comportamiento que puede tener el sistema a determinadas estimulaciones. La representación del sistema mediante *Simulink* también permite obtener las gráficas del comportamiento del sistema a cierta excitación.

A continuación se muestran las simulaciones realizadas en *Simulink* y se explica el resultado obtenido.

4.2.1. La planta (*Ball and Beam*)

Para conocer el comportamiento del *Ball and Beam* se construye un diagrama a bloques de éste a partir del modelo matemático obtenido en el capítulo anterior, en particular el modelo no lineal dado por (3.58) y (3.59). Este diagrama a bloques debe de contener todos los elementos que el sistema exija para su apropiado funcionamiento.

La Figura 4.1 muestra el diagrama a bloques del modelo no lineal del sistema *Ball and Beam*.

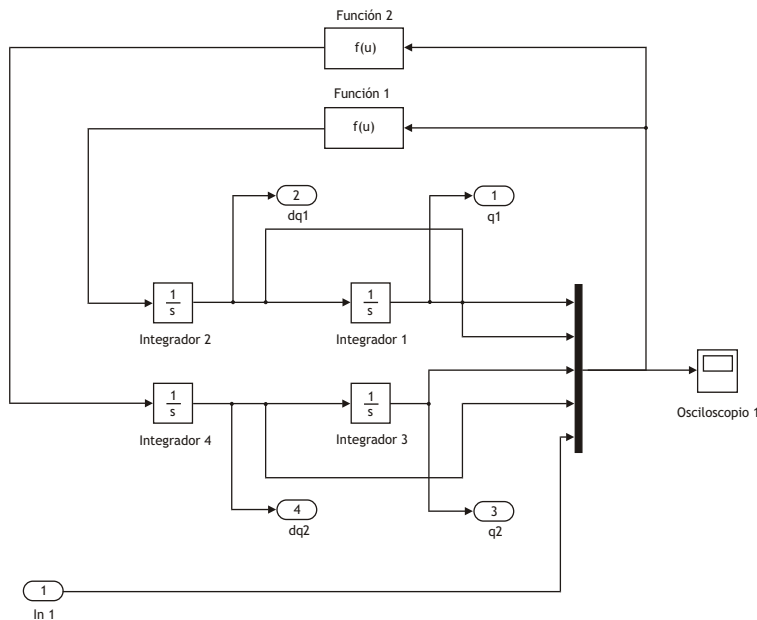


Figura 4.1: Diagrama a bloques del *Ball and Beam* en *Simulink*.

Se puede conocer el comportamiento del sistema a partir de las ecuaciones de estado que en este caso son cuatro, pero dos de ellas no es necesario colocarlas en un

bloque de ecuación de *Simulink* ya que se encuentran en función de un solo estado, sin embargo a las otras dos, si es necesario, por tanto lo primero que se coloca en la simulación son los bloques que contienen las ecuaciones de estado para las variables \dot{x}_2 y \dot{x}_4 del sistema, y que están representadas en la Figura 4.1 con el nombre de Función 1 y Función 2. Se sabe que la Función 1 que está representada en el Capítulo 3 por la ecuación (3.55) es igual a \dot{x}_2 , por lo tanto para obtener a x_2 que en los esquemas de *Simulink* esta representada por $dq1$, es necesario integrar la Función 1, y para lograr esto se coloca en la simulación un integrador, el cual se nombra Integrador 2. La Función 2 que también se encuentra descrita en el Capítulo 3 por la ecuación (3.57), es igual a \dot{x}_4 , por lo que para obtener a x_4 que en *Simulink* esta representada por $dq2$, también es necesario colocar un integrador más, el cual se llama Integrador 4. Ahora bien, a la salida del Integrador 2 se obtiene la variable x_2 , pero de acuerdo al cambio de variables realizado en el Capítulo 3, se sabe que $x_2 = \dot{x}_1$, por lo tanto es necesario aplicar una integral más a esta variable para así obtener a x_1 , que en el sistema representa el desplazamiento de la bola a lo largo de la barra y que en los diagramas de *Simulink* esta representada por $q1$; entonces a x_2 se le conecta un bloque más de un integrador, el cual se llama Integrador 1. Así mismo a la salida del Integrador 4 se obtiene x_4 , pero de acuerdo al cambio de variables ya mencionado, se sabe que $x_4 = \dot{x}_3$, por lo tanto para obtener x_3 es necesario conectar la salida del Integrador 4 a un integrador más, el cual se llama Integrador 3. La salida x_3 representa físicamente el grado de inclinación de la barra y que en los diagramas de *Simulink* esta representada por $q2$.

Ahora bien, todas las variables obtenidas después de cada integrador representan el estado del sistema y es obvio que esas variables estarán cambiando con respecto al tiempo mientras que el sistema alcanza la estabilidad, para esto es necesario que estas variables de estado se retroalimenten. Para poder lograr esto se coloca un multiplexor en la simulación, el cual tiene la función de solo dejar pasar un estado a la vez. Además en el multiplexor hay un canal más el cual va a contener la entrada del sistema, esta entrada se llama *In 1*.

Los óvalos que están conectados a cada una de las salidas de los integradores representan los estados del sistema. La salida 1 contiene el estado x_1 que como se menciona anteriormente representa físicamente el movimiento de la bola; la salida 2 contiene la derivada de x_1 que podemos definir físicamente como la velocidad de la bola; la salida 3 contiene el estado x_3 que representa físicamente la inclinación de la barra; y la salida 4 contiene la derivada de x_3 y que la podemos representar físicamente como la velocidad de la barra. Por último a la simulación se le añade un osciloscopio que grafica todos los estados del sistema así como la entrada de alimentación de éste.

4.3. Diseño de un controlador por retroalimentación de estados

Una vez simulada la *planta* del sistema *Ball and Beam*, se procede a diseñar un control que básicamente es un conjunto de elementos que manipulan el sistema. Para el sistema *Ball and Beam* se diseña un control por retroalimentación de estados, que es elegido debido a que es relativamente fácil de entender y de simular. Para esto, se asume que se tiene disponible todas las variables de estado, que son: $q1$, $dq1$, $q2$ y $dq2$.

El término retroalimentación indica un proceso por el que una cierta proporción de la señal de salida de un sistema se redirige de nuevo a la entrada. Esto es de uso frecuente para controlar el comportamiento dinámico del sistema, entonces se puede decir que el termino control por retroalimentación de estados es aplicable siempre que se acciona o se perturba el estado de reposo o actividad de un objeto. Para esto se utilizan sensores que monitorean el comportamiento de éste, devolviendo la información que luego se transfiere a un sistema que decide y controla el estado del objeto. Por ejemplo en el caso del *Ball and Beam*, para el control de la bola, el sensor que monitorea su posición es el *microm* el cual permite conocer por medio de variaciones de voltaje cual es el movimiento de ésta. Una vez obtenida la información, el controlador manipula el movimiento de la bola tomando en cuenta su posición actual así como la posición a la que debe de llegar. La información de la retroalimentación de estados está contenida en el controlador que es el encargado de manipular la posición de la bola.

El objetivo del controlador es estabilizar el sistema alrededor del punto de equilibrio $x^* = 0$.

Es importante mencionar que los estados por si solos no pueden llevar al sistema a un punto de estabilidad, ya que para que esto sea posible es necesario obtener las constantes que multiplican a cada uno de los estados para que el sistema pueda funcionar de la manera más adecuada.

A continuación se diseña el controlador empleando el programa MATLAB 4.1, cuyo procedimiento analítico se muestra en el Apéndice C. Es importante mencionar que existen distintos métodos para el cálculo de la matriz de ganancias de retroalimentación de estados K , uno de estos métodos es el que se obtiene mediante la formula de *Ackermann* que es el método elegido para el sistema *Ball and Beam*.

El programa muestra como se obtienen los valores constantes de las ganancias que multiplican a cada uno de los estados, a partir de la función de *Ackermann* y agregando los polos deseados para el sistema.

MATLAB 4.1: Ganancias

```

%----- Obtención de las ganancias del sistema -----

%----- Se definen primero todas las variables -----

syms m IT g;

%----- Se asignan los valores de las constantes -----

m=0.085; IT=0.04241473; g=9.8;

%----- Se definen las matrices A, B, C, D, Q y R -----

A =[0      1      0      0;
    0      0     -g      0;
    0      0      0      1;
   -m*g/IT  0      0      0];

B =[0;
    0;
    0;
    1/IT];

C= [1 0 0 0];

D= [0];

Pol=

   -3.7247
   -0.0000 + 3.7247i
   -0.0000 - 3.7247i
    3.7247

%----- Obteniendo los valores de las ganancias -----

```



```

K= acker(A,B,pol)

K =

    -4.1032    -3.3394     9.2173     1.3349

```

Ahora bien, las ganancias obtenidas deben de aplicarse al sistema para que éste pueda funcionar correctamente. El diagrama de la Figura 4.1 explicado anteriormente esta contenido en un solo bloque, al que se le denomina *planta*. De acuerdo al diagrama de control básico, para que dicha *planta* pueda funcionar de acuerdo a las especificaciones dadas por el ingeniero es necesario diseñar un controlador el cual sea capaz de manipular las variables del sistema para poder cumplir dichas especificaciones.

El diagrama a bloques que se muestra en la Figura 4.2 muestra las adecuaciones que se le hacen a la *planta* para que pueda ser estabilizada.

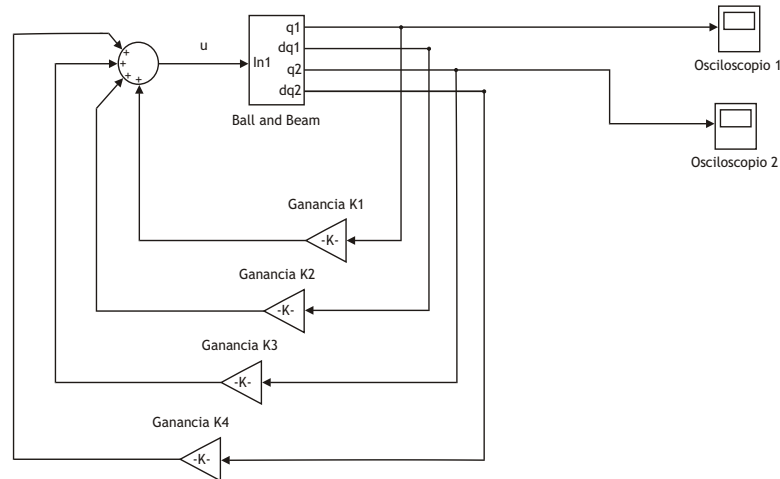


Figura 4.2: Diagrama a bloques del sistema.

El bloque en la Figura 4.2 que representa la *planta* del sistema se llama *Ball and Beam*. A cada una de las salidas de la *planta* se le coloca una de las ganancias obtenidas con *MATLAB*, pero para cada variable de estado corresponde una ganancia específica, así que se debe de tener cuidado en no equivocar las ganancias, de lo contrario el sistema no funcionaria correctamente. Para la variable q_1 corresponde la ganancia K_1 que tiene un valor de -4.1032 pero debido a que los bloques de ganancia

tienen un valor negativo, es necesario cambiar el signo de la constante; para la variable $dq1$ corresponde la ganancia K_2 que tiene un valor de -3.3394 ; para la variable $q2$ corresponde la ganancia K_3 que tiene un valor constante de 9.2173 ; y por ultimo para la variable $dq2$ corresponde la ganancia K_4 que tiene un valor de 1.3349 . El resultado de la multiplicación de las variables de estado por sus respectivas ganancias se llevan a un módulo de sumatoria para que el resultado de esa sumatoria se conecte finalmente al bloque de la *planta* en la entrada $In1 = u$, es decir:

$$u = K_1 \cdot q_1 + K_2 \cdot dq_1 + K_3 \cdot q_2 + K_4 \cdot dq_2. \quad (4.1)$$

4.3.1. Resultados de simulación para el sistema en lazo cerrado

A continuación se muestran las graficas que resultan de la simulación del sistema sin tener todavía una señal de referencia, es decir sin tomar en cuenta ninguna entrada; aún así, si al sistema se le define con condiciones iniciales $q1 = 0.2$, $q2 = 0.2$, $dq1 = 0$ y $dq2 = 0$ el sistema debe de estabilizarse e irse al punto de equilibrio que es el 0.

La Figura 4.3 se obtiene al simular la planta y en ella se pueden observar el comportamiento de cada una de las variables de estado así como la sumatoria de las ganancias que multiplican a cada una de estas variables.

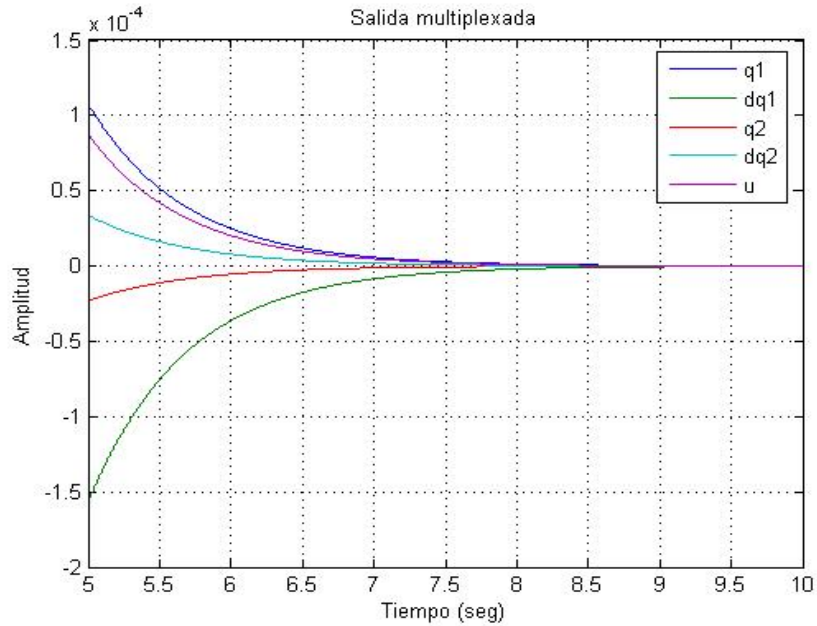


Figura 4.3: Comportamiento de las variables de estado y la entrada $In 1$ en lazo cerrado.

La Figura 4.4 representa el comportamiento sólo de q_1 que como ya se sabe representa físicamente el movimiento de la bola a lo largo de la barra. Como se puede observar, debido a las condiciones iniciales, el sistema comienza a funcionar hasta llevar a la bola al punto de equilibrio que es 0.

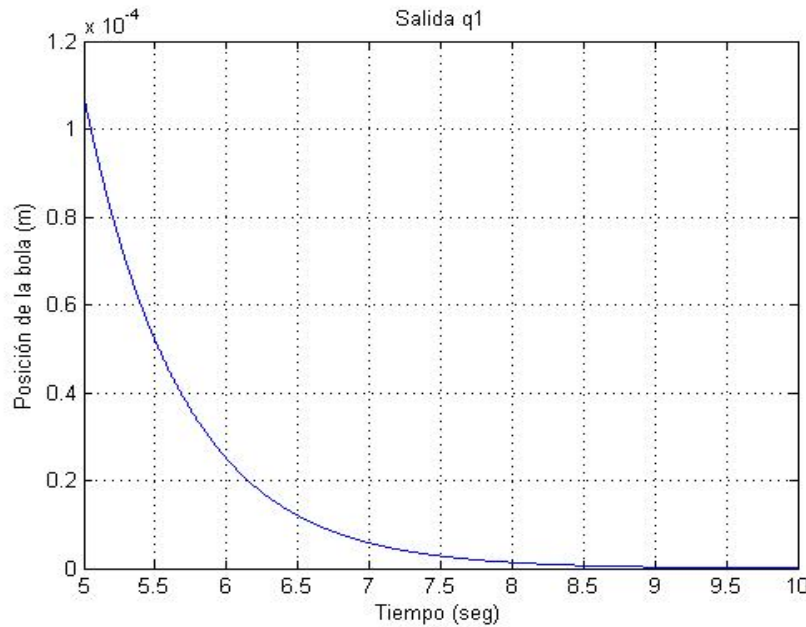


Figura 4.4: Comportamiento de la bola en lazo abierto.

La Figura 4.5 representa el comportamiento sólo de q_2 que como ya se sabe representa físicamente el grado de inclinación de las barras, y debido a las condiciones iniciales, el sistema comienza a funcionar hasta que la bola llega al punto de equilibrio, y en ese instante la barra se encuentra totalmente horizontal.

4.3.2. Comportamiento del sistema en lazo cerrado para una entrada de referencia escalón

Ya se ha podido comprobar que el funcionamiento del sistema *Ball and Beam* en lazo cerrado es el correcto, sin embargo, es necesario saber también si el sistema es flexible a una entrada de excitación totalmente ajena al mismo como puede ser una entrada de referencia escalón o una señal sinusoidal.

La Figura 4.6 muestra la simulación del sistema a la cual se le añade un bloque con una señal escalón con una amplitud de 4. Para que el sistema pueda funcionar adecuadamente es necesario agregar una ganancia a la entrada escalón que tiene un valor de -3.2701 , y esta señal es sumada a las ganancias que multiplican a las

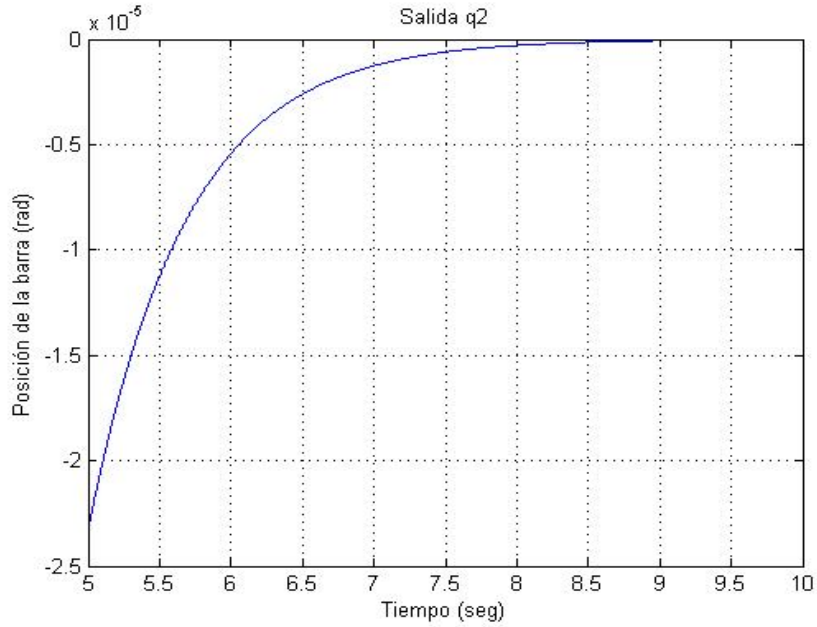


Figura 4.5: Comportamiento de la barra en lazo abierto.

variables de estado. Es importante mencionar que para esta simulación se consideran condiciones iniciales de 0 debido a que se cuenta con una entrada de referencia.

El cálculo de la ganancia de la entrada escalón es de suma importancia, ya que si se aplica un valor aleatorio de ganancia el sistema no podrá funcionar de manera adecuada, por lo tanto se debe de calcular su valor.

Se sabe que la función de transferencia para un sistema en lazo cerrado esta dado por la ecuación (3.103) mostrada en el Capítulo 3. Pero considerando que:

$$\frac{y(s)}{y_{ref}(s)} = G(s), \quad (4.2)$$

la ecuación general queda:

$$\frac{y(s)}{y_{ref}(s)} = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}]^{-1}\bar{\mathbf{B}}, \quad (4.3)$$

de esta ecuación se despeja $y(s)$ resultando:

$$y(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}]^{-1}\bar{\mathbf{B}}y_{ref}(s), \quad (4.4)$$

si se sabe que $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}K_{ref}$ la ecuación queda:

$$y(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}]^{-1}\mathbf{B}K_{ref} y_{ref}(s), \quad (4.5)$$

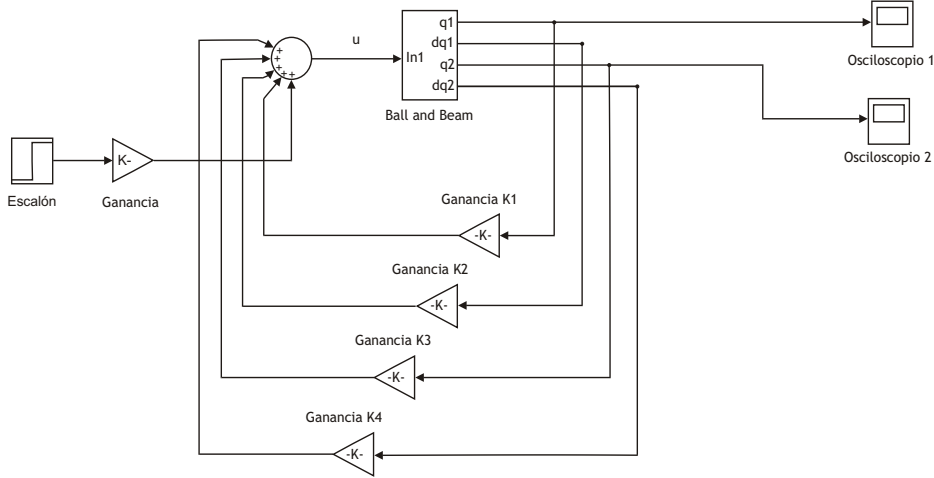


Figura 4.6: Diagrama a bloques del sistema con una entrada de referencia escalón.

si se desarrollan las operaciones entre matrices en la ecuación (4.5), resulta:

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1}\mathbf{B} = -\frac{1}{0.0196s^4 + 0.2483s^3 + 1.3079s^2 + 3.9324s + 4.0003} \quad (4.6)$$

entonces, sustituyendo este resultado en la ecuación (4.5) se obtiene:

$$y(s) = -\frac{1}{0.0043s^4 + 0.1362s^3 + 0.9405s^2 + 3.3394s + 3.2702} K_{ref} y_{ref}(s) \quad (4.7)$$

Ahora bien, si se sabe que la entrada del sistema será una función escalón cuya amplitud a la cual llamaremos A y tendrá un valor elegido aleatoriamente de 4, es necesario obtener la transformada de Laplace de esta función. entonces,

$$y_{ref}(s) = \mathcal{L}\{y_{ref}(t)\} = \mathcal{L}\{A\}, \quad (4.8)$$

por lo tanto la transformada de Laplace de $y_{ref}(s)$ es:

$$y_{ref}(s) = \frac{A}{s}, \quad (4.9)$$

donde $A = 4$, sustituyendo este resultado en la ecuación (4.7) se tiene

$$y(s) = -\frac{1}{0.0043s^4 + 0.1362s^3 + 0.9405s^2 + 3.3394s + 3.2702} K_{ref} \frac{4}{s}, \quad (4.10)$$

aplicando el teorema del valor final que dice que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sy(s), \quad (4.11)$$

entonces sustituyendo $y(s)$ en la ecuación (4.11), y teniendo en cuenta que s tiende a 0 resulta:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sy(s) = -\frac{4}{3.2702}K_{ref}, \quad (4.12)$$

ahora bien si se sabe que $y(t) \rightarrow y_{ref}(t)$, entonces se puede decir que $y_{ref}(t) = 4$,

$$4 = -\frac{4}{3.2702}K_{ref}, \quad (4.13)$$

por lo tanto de esta ecuación se despeja a K_{ref} quedando:

$$K_{ref} = -3.2701. \quad (4.14)$$

Entonces ahora se sabe el valor de la ganancia que multiplica a la función escalón para que el sistema funcione correctamente.

Observando ahora los resultados de la simulación del sistema se tienen las siguientes graficas.

La Figura 4.7 muestra el comportamiento de cada una de las variables de estado del sistema así como el comportamiento de la señal de entrada del mismo.

En las figuras 4.8 y 4.9 se puede observar el comportamiento aislado del movimiento de la bola y la inclinación de la barra respectivamente.

En la Figura 4.8 se puede observar que el movimiento de la bola a lo largo de la barra es constante hasta que llega a el punto de equilibrio que en este caso es la entrada de referencia escalón.

En la Figura 4.9 se puede apreciar el comportamiento de la barra que se debe de dar hasta que la barra llegue al punto de equilibrio, es decir hasta que alcance un comportamiento similar al de la señal de referencia; en el momento que esto suceda, el comportamiento de la barra será estar en un grado de inclinación igual a 0 y esto se aprecia en la grafica, ya que la barra se va al punto de equilibrio de 0.

4.3.3. Comportamiento del sistema en lazo cerrado para una entrada de referencia sinusoidal

El diagrama de la Figura 4.10 muestra la adecuación que se le hace al sistema para obedecer el comportamiento de una entrada sinusoidal. Al sistema se le añade un bloque de una onda sinusoidal, y obviamente debe de incluirse un bloque con la ganancia respectiva de esta señal. Esta señal se suma a las ganancias que multiplican

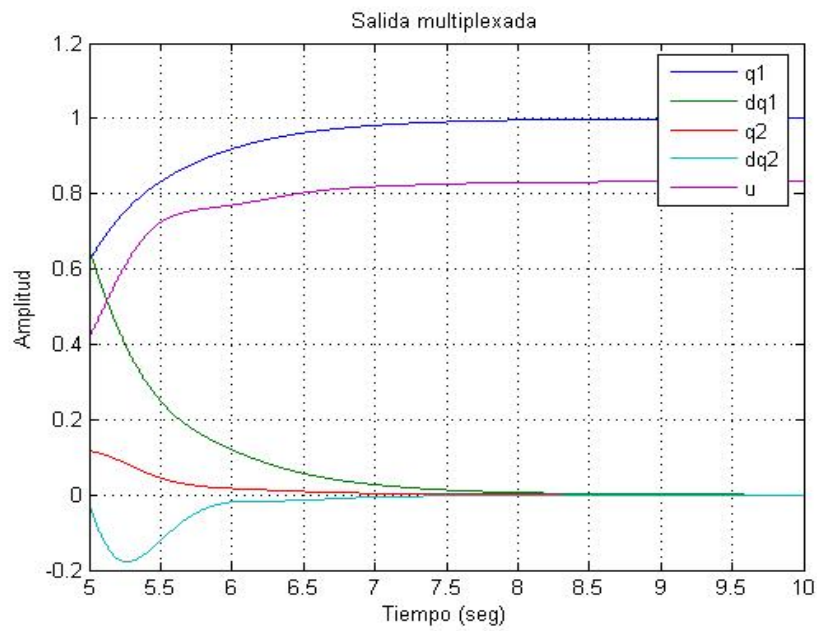


Figura 4.7: Comportamiento de las variables de estado a una entrada de referencia escalón.

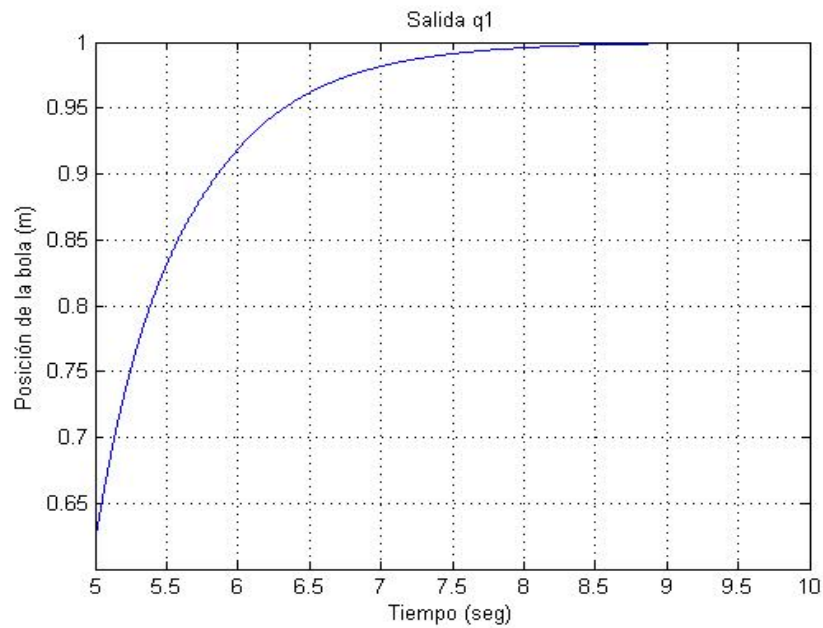


Figura 4.8: Comportamiento de la bola a una entrada de referencia escalón.

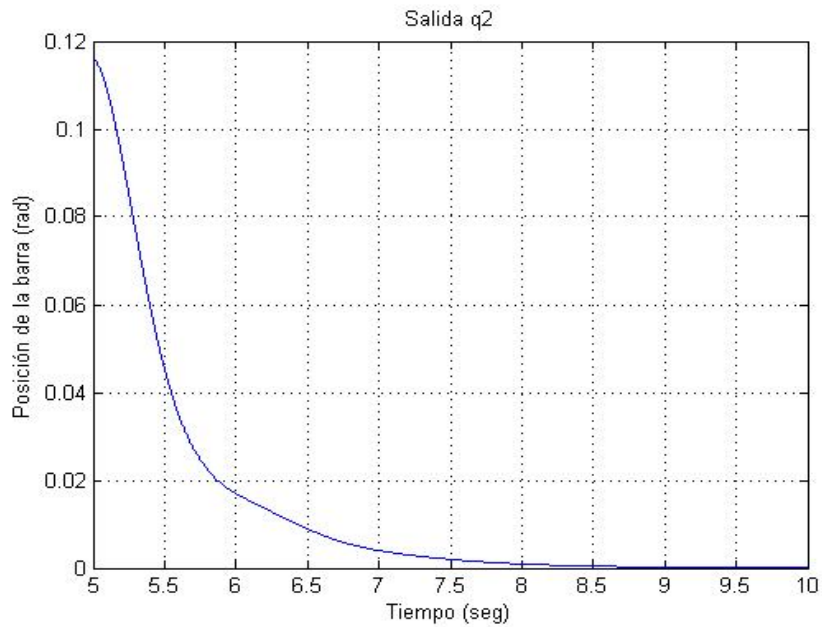


Figura 4.9: Comportamiento de la barra a una entrada de referencia escalón.

a cada una de las variables de estado y esta sumatoria se conecta a la entrada In 1 de la planta. El procedimiento para obtener el valor de la ganancia de la función seno es exactamente el mismo que se lleva a cabo para el cálculo de la ganancia de la función escalón.

La Figura 4.11 muestra el comportamiento de cada una de las variables de estado del sistema, así como la entrada de referencia que lo alimenta.

En la Figura 4.12 se puede observar cual es el comportamiento de la bola ante la entrada sinusoidal del sistema. Debido a la naturaleza de la señal de entrada, la función de la bola es seguir el comportamiento de esta señal, y debido a que la señal de entrada siempre estará oscilando, la bola jamás se detendrá en un punto específico de la barra, por lo tanto su comportamiento será similar al de la señal de entrada, con un pequeño desfase, generado por las ganancias del sistema.

En la Figura 4.13 se puede observar el grado de inclinación que toman la barra debido al movimiento de la bola. Como el comportamiento de la bola es similar al de la señal de entrada del sistema, podemos saber que la bola siempre estará en constante movimiento, por lo que nunca llegará a un punto de equilibrio y debido a esto, entonces se puede concluir que tampoco la inclinación de la barra se estabilizará, es decir tampoco se detendrá en un punto de equilibrio.

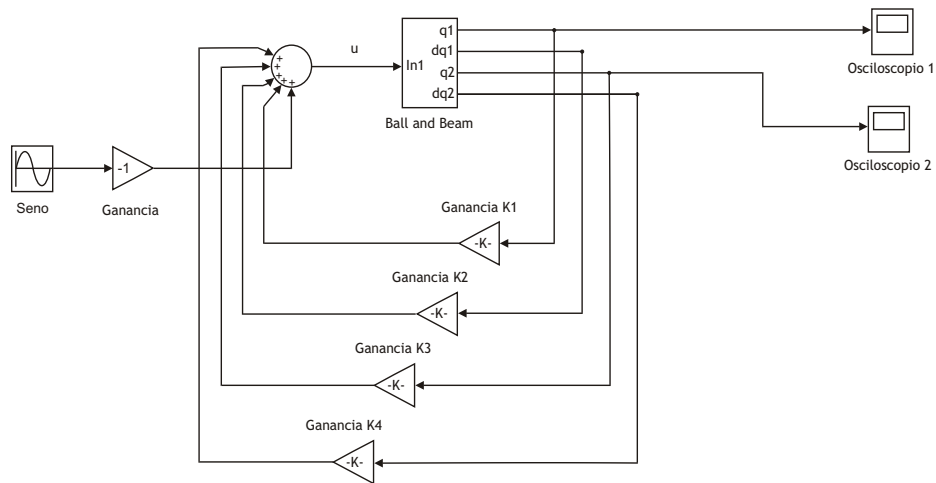


Figura 4.10: Diagrama a bloques del sistema con una entrada de referencia sinusoidal.

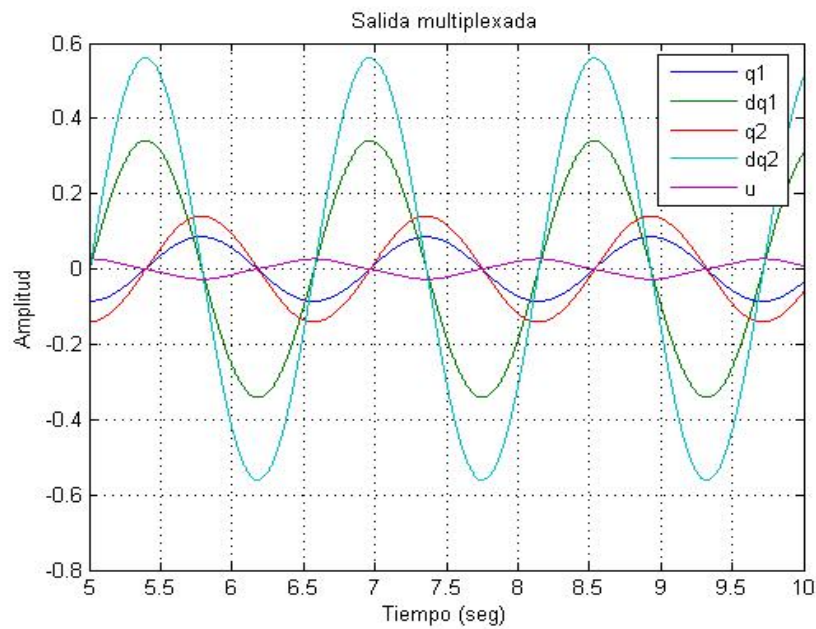


Figura 4.11: Comportamiento de las variables de estado a una entrada de referencia sinusoidal.

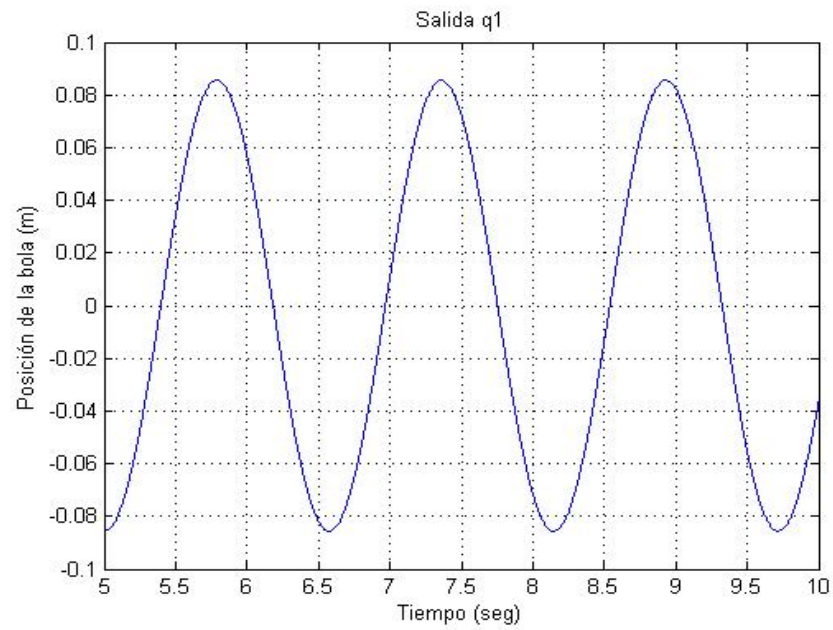


Figura 4.12: Comportamiento de la bola a una entrada de referencia sinusoidal.

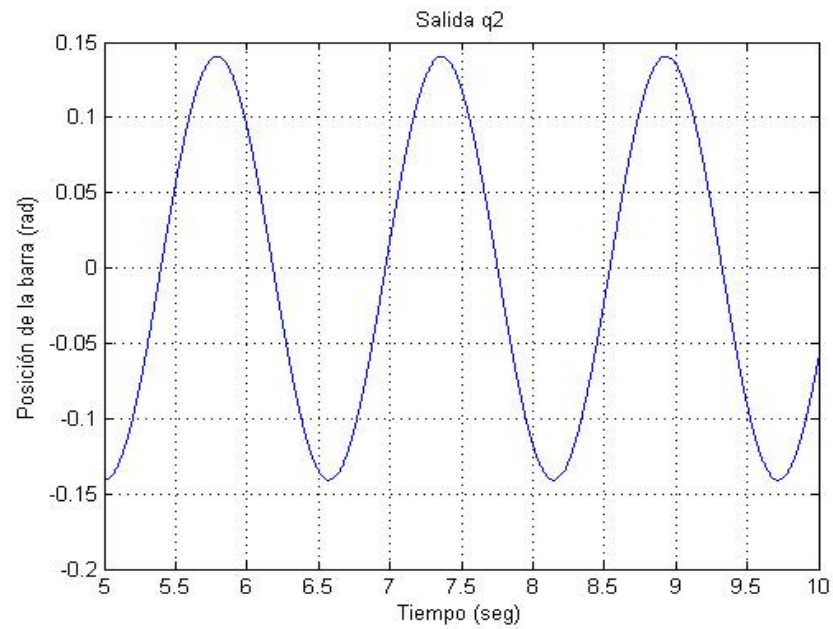


Figura 4.13: Comportamiento de la barra a una entrada de referencia sinusoidal.

4.4. Comentarios

La representación de cualquier sistema ya sea mecánico, eléctrico, hidráulico, etc., mediante una simulación a nivel de software, es de suma importancia para poder llevar a cabo físicamente el sistema, ya que mediante una simulación se puede conocer el funcionamiento numérico del sistema y que es aproximado al comportamiento que tiene en la realidad. El desarrollo de una simulación a nivel de software permite realizar pruebas que para el sistema real pueden ser peligrosas, ya que se puede tratar de pruebas que el sistema podría no soportar físicamente. Una simulación también puede representar el comportamiento de cualquier sistema a situaciones que quizás en la realidad jamás se van a presentar.

Es importante mencionar que la ley de control por retroalimentación del estado presentada en este capítulo no es implantada en el prototipo de laboratorio.

Capítulo 5

Construcción del *Ball and Beam*

El objetivo de este capítulo es ilustrar el prototipo *Ball and Beam* en cada una de las etapas de su construcción, para eso se muestran fotografías que se tomaron a cada una de las piezas mecánicas así como a las electrónicas en el proceso de armado.

En este capítulo se observan tres partes importantes a considerar, en la primera se muestra el prototipo ya terminado, mientras que en la siguiente se muestran las piezas mecánicas de manera conjunta y por separado, y por último fotografías de los componentes electrónicos.

5.1. Prototipo

Después de tantas horas de trabajo y dedicación, es aquí donde el futuro ingeniero en electrónica y telecomunicaciones ve concluidas sus metas que se propuso originalmente en el proyecto de tesis y por ende el objetivo general de la misma. Es importante resaltar que lo más difícil del desarrollo del proyecto es la etapa mecánica así como el sensado de la posición de la bola.

El prototipo *Ball and Beam* desarrollado en ésta tesis es el que se muestra en la Figura 5.1 como se puede observar tiene un cable, el cual sirve para conectarse a la corriente eléctrica, esto es lo único que requiere el prototipo para poder funcionar.

5.2. Etapa mecánica

Para realizar el sistema mecánico final que se muestra en las figuras 5.2 y 5.3 se realizaron diferentes pruebas con otro tipo de materiales, con otro tipo de engranes así como con otros motores y gracias a la experiencia adquirida fue posible lograr un sistema con excelentes acabados y excelente acoplamiento mecánico entre sus diferentes piezas, logrando así un buen desempeño mecánico del sistema.

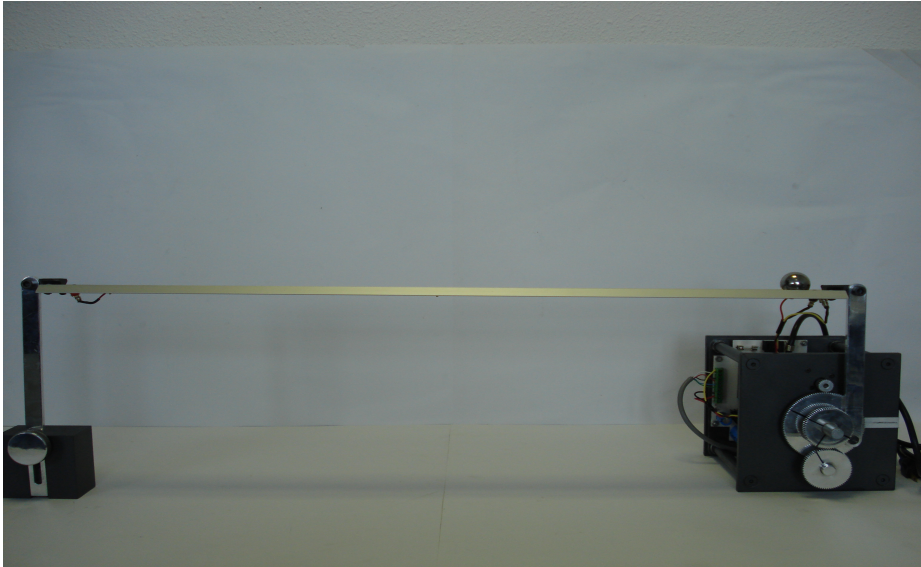


Figura 5.1: Prototipo *Ball and Beam*.

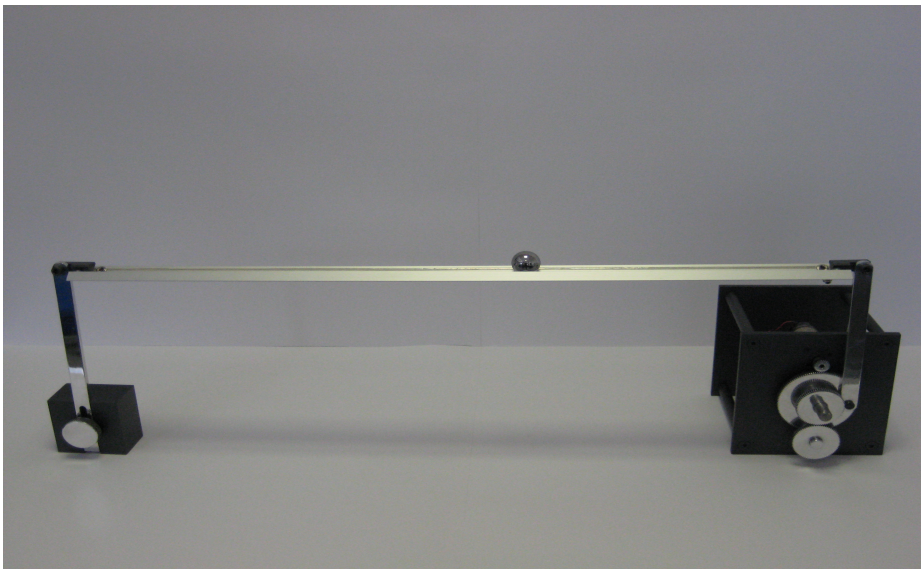


Figura 5.2: Sistema mecánico del *Ball and Beam*, vista frontal.

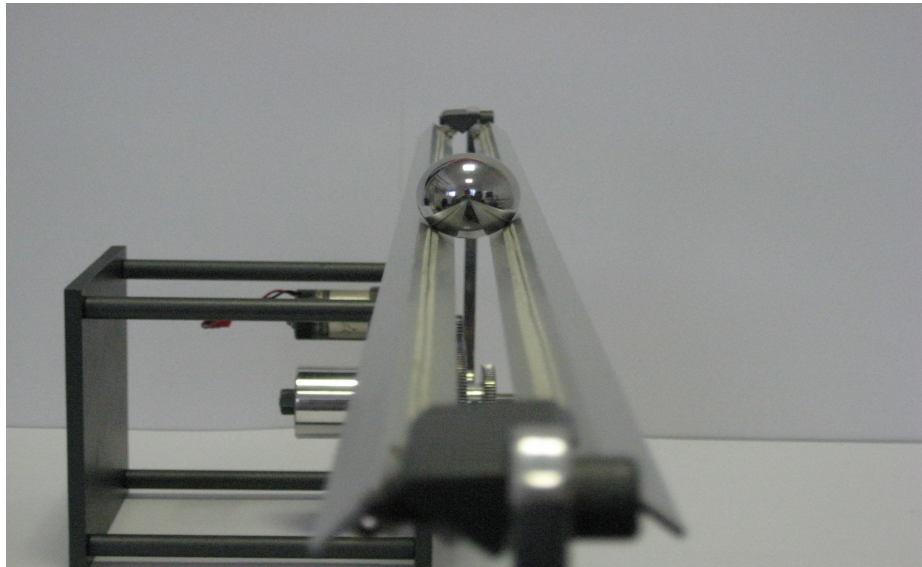


Figura 5.3: Sistema mecánico del *Ball and Beam*, vista lateral.

En la Figura 5.4 se muestra la fotografía de la barra, el cual esta conformada por dos ángulos de aluminio acoplados en sus extremos y separados entre sí, la posición de los ángulos es tal que permite que la bola tenga un movimiento libre a través de ellos.

En la parte interior de los ángulos que conforman la barra se encuentra el sensor, el cual como se menciona anteriormente es uno de los problemas que costo más tiempo y esfuerzo resolver.

Primero se intentó registrar el movimiento de la bola con un par de sensores de proximidad infrarrojos: fotodiodo y fototransistor, estos tienen la ventaja de que no necesitan contacto para detectar un objeto, además al trabajar en el espectro de luz infrarrojo no se ven tan afectados por la luz ambiental como el mismo sol, lamparas o bombillas, sin embargo la luz del sol y de las bombillas contienen cierta cantidad de luz infrarroja que puede afectar el correcto funcionamiento de los sensores aunado a la superficie curva de la bola que hace que la luz infrarroja no se refleje en su totalidad en la misma dirección haciendo difícil el calibrado del receptor (fototransistor), por todo esto no es posible un sensado útil para los requerimientos del *Ball and Beam*. Por ésta razón se opta por utilizar un alambre plano *microm* como sensor (ver Figura 5.5) este alambre plano se puede encontrar con diferentes tipos de resistencia, para el prototipo se utiliza uno con una resistencia de 4.5Ω a lo largo de uno de los ángulos de la barra y de 1Ω en el otro ángulo de la barra, logrando con estos dos alambres planos y el movimiento de la bola una función similar a la de un potenciómetro.

El alambre plano *microm* se encuentra unido a los ángulos de la barra por medio

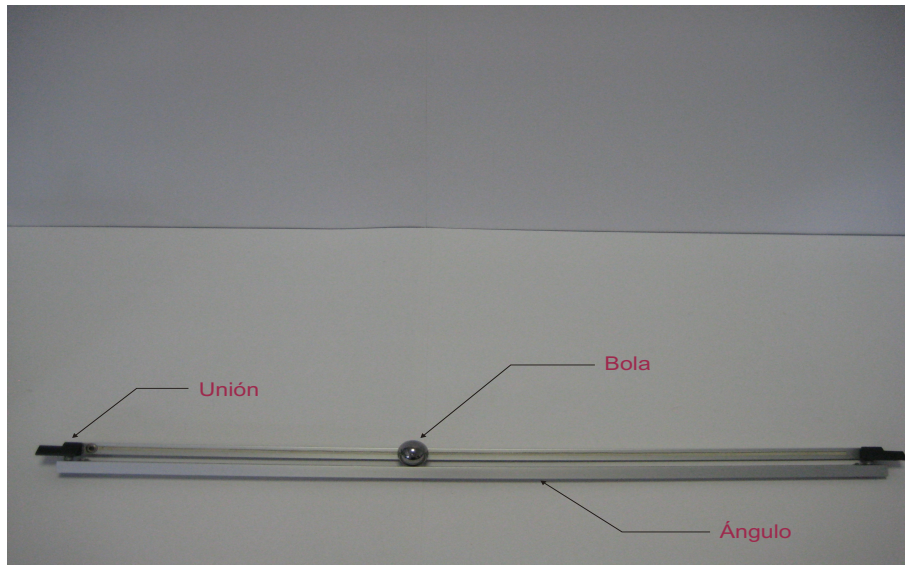


Figura 5.4: Barra.

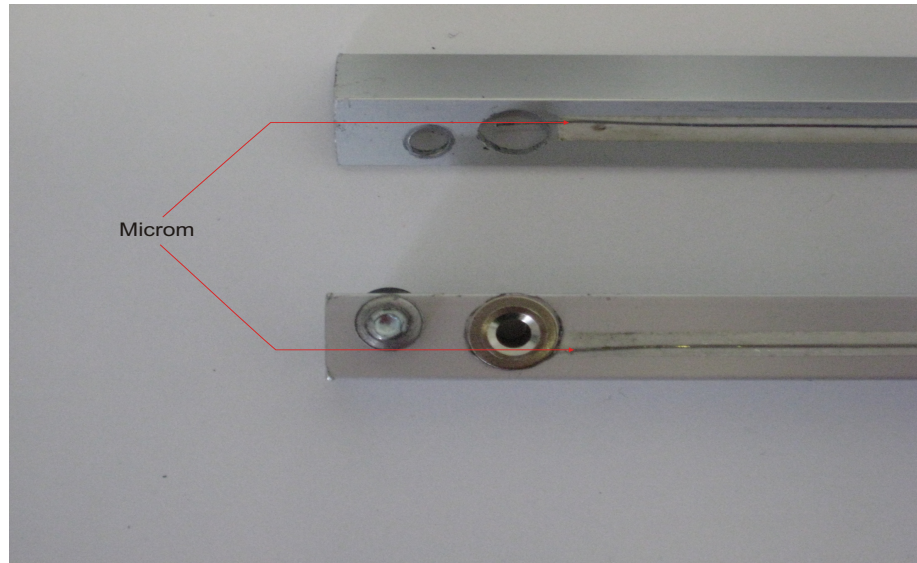
de una cinta adhesiva doble cara y en los extremos de éste fueron colocados conectores hembra con tuercas para fijarlo totalmente.

La barra esta acoplada en uno de sus extremos a un pivote mediante un sistema de unión que se muestra en las figuras 5.6a y 5.6b, igualmente en el otro extremo hay un sistema de unión, pero éste es para acoplar la barra con el eslabón, cabe mencionar que ambas uniones son idénticas, hechas de acero y totalmente aisladas de los ángulos de aluminio que conforman la barra para evitar algún posible corto circuito.

Ahora bien, el soporte del pivote es otro de los componentes del prototipo cuya función es dar soporte y estabilidad mecánica al prototipo, por éstas razones se construyó totalmente de acero para tener un contrapeso mayor y evitar perturbaciones, éste posee una ranura en la cual se coloca el eslabón del pivote que permite deslizar a lo largo de ésta para adoptar diversas posiciones con la ayuda de la perilla de ajuste instalada, con el fin de que el eslabón del pivote alcance diferentes alturas, ya que si la superficie donde se coloca el *Ball and Beam* no esta nivelada el funcionamiento se verá afectado, entonces, con la perilla de ajuste el eslabón del pivote puede tener una posición más alta o en su defecto más baja según sea requerido dando flexibilidad al prototipo.

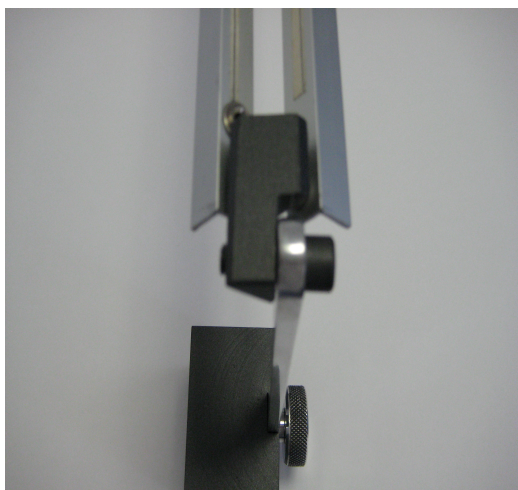
Las piezas de la base se muestran en la Figura 5.7b de forma separada: soporte del pivote, eslabón del pivote, perilla de ajuste, y en la Figura 5.7a se muestran las piezas armadas.

Hasta ahora se han mostrado algunas partes del *Ball and Beam*, pero aún falta mostrar una de las más importantes, la cual es el *sistema de soporte y acoplamiento*,

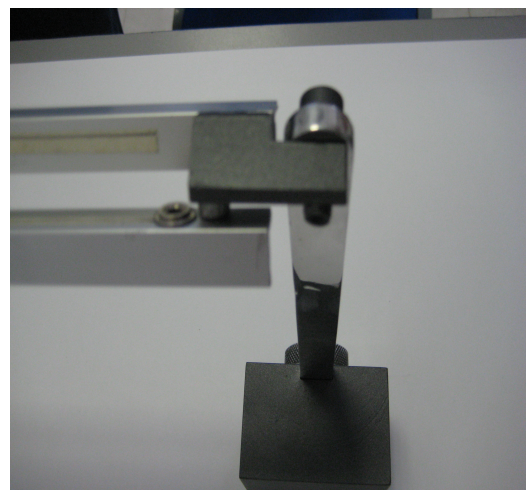


Microm

Figura 5.5: Alambre *microm*.



(a)



(b)

Figura 5.6: Unión de ángulos, vista frontal (a); Vista vertical (b).

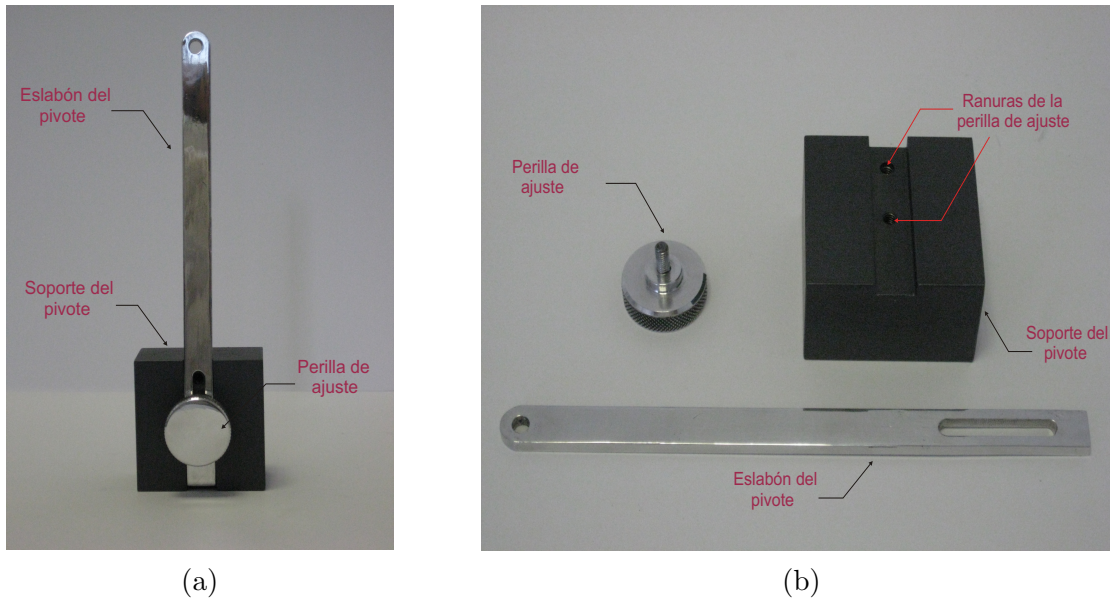


Figura 5.7: Pivote (a);Piezas del pivote (b).

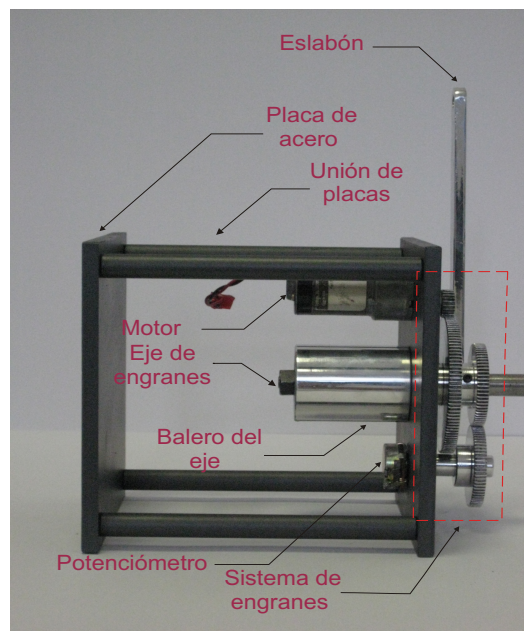


Figura 5.8: Sistema de acoplamiento, esqueleto y eslabón ensamblados.

cuya función es medular para el prototipo, y constituido por: el esqueleto, el sistema de acoplamiento, el pivote, un eje, un potenciómetro, un motor y por último el eslabón, en la Figura 5.8 se muestran todas las partes del sistema de soporte y acoplamiento con excepción del pivote.

El esqueleto está conformado por dos placas de acero, y cuatro uniones colocadas en cada una de las esquinas de dichas placas, estas piezas están pintadas de color gris oxford semi-mate para tener una mejor presentación y por su puesto mayor durabilidad ya que se evita la oxidación, este diseño satisface completamente los requerimientos necesarios para que el prototipo funcione como se desea, ya que tiene las medidas necesarias para poder colocar sobre él, los demás componentes del sistema de acoplamiento, dando a cada uno de estos espacios suficiente para su eficaz accionar sin tampoco tener mayúsculas dimensiones.

El sistema de acoplamiento es el que se encarga de unir al motor, el eje, el potenciómetro y el eslabón, estos engranes están hechos de aluminio, los cuales se observan en la Figura 5.9. El sistema de acoplamiento fue sometido a diversas pruebas para ver su comportamiento, primero se probó sólo con el motor y no presentaba problemas hasta que se conectó con el eslabón presentó pequeñas divergencias, y debido a esto fue ajustado hasta obtener un funcionamiento adecuado, posteriormente se adaptó el potenciómetro y el accionar no sufrió alteraciones.

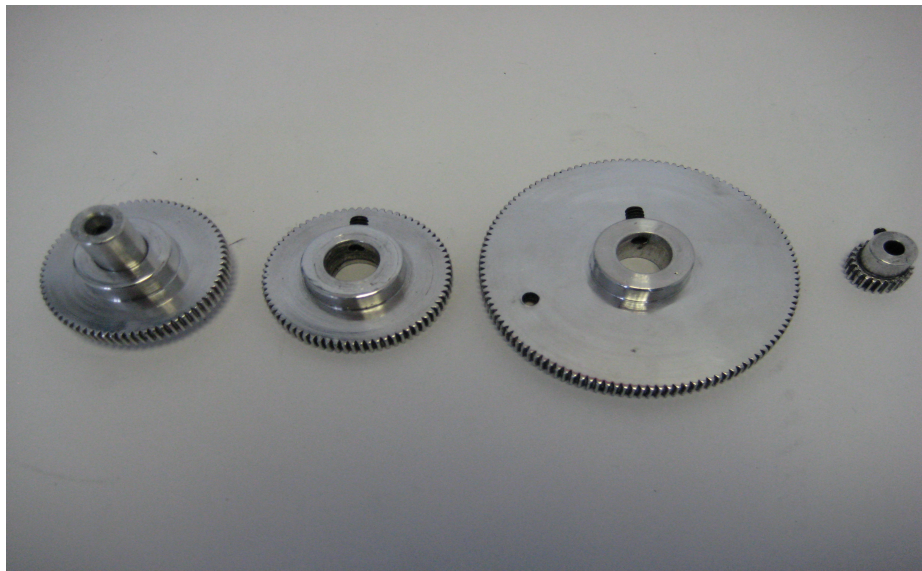


Figura 5.9: Engranes.

Para justificar la instalación de un potenciómetro en el sistema de acoplamiento, hay que mencionar que este ha sido colocado ya que es necesario sensar la posición de la barra. Pero esta etapa tampoco fue exenta de pruebas preliminares, ya que se

intentó con diversos tipos de potenciómetros hasta encontrar el que más se ajustara a las necesidades del sistema, las características del potenciómetro seleccionado son: 10 k Ω , de una vuelta, lineal y de alambre.

Por otra parte y continuando con el sistema de acoplamiento, ahora se hace mención del eslabón el cual esta hecho de aluminio al igual que los engranes, y esta conectado a uno de ellos, al de mayor diámetro, y decir que dicho engrane fue diseñado para sólo tener un movimiento de ± 45 grados, así que por consiguiente el eslabón también tiene un movimiento limitado, quedando en forma vertical y conectado en su parte superior a la barra.

5.3. Etapa electrónica

Quedando concluida la etapa mecánica, se continúa con la etapa electrónica, la cual, cuenta con distintos módulos, entre los que se encuentra la fuente de alimentación, el modulo del puente H y el modulo mas importante que es el del microprocesador.

La primera parte en la etapa de electrónica es la fuente de alimentación, la cual proporciona el voltaje y corriente suficientes para los requerimientos del *Ball and Beam*, la fuente de alimentación se conecta a la corriente alterna de 127v y entrega cuatro salidas, tres de 5v y una de 12v a cada salida se le colocaron cuatro diodos rectificadores respectivamente para evitar regresos de voltaje, también se colocaron culcas para darle mayor versatilidad al diseño y opcion de conectar y desconectar la fuente de alimentación.

El microcontrolador como ya se ha mencionado, es el cerebro del sistema, por lo tanto es de trascendencia su función, este se encuentra en la placa del circuito impreso, su programación se lleva a cabo en el dispositivo *PICSTART* Plus de la marca *Microchip* (ver Figura 5.10).

Por último, en ésta sección se muestra el circuito integrado de la fuente de alimentación del voltaje y del *puente H* que se utilizó para controlar el giro del motor, éste componente es integrado a una placa de mica que es el soporte físico de toda la etapa de potencia como se observa en la Figura 5.11, es de importancia decir que el puente H que se instaló no es el que inicialmente se propuso para ésta tarea, primero se instaló uno formado por cuatro mosfets, pero resultó mas fácil el control del motor con el circuito integrado. Así que todo esto es necesario debido a que no contamos con un servomecanismo, ahora ya instalado el *puente H* se equipó con un disipador de calor.

El motor que se observa en la Figura 5.12 es de la marca TRW, funciona desde 0v a 24v con una corriente de 165mA y alcanza las 5500rpm sin carga, tiene un torque de 15oz/in y una resistencia de armadura de 8.3 Ω , y al igual que en casos anteriores



Figura 5.10: Programador y microcontrolador.

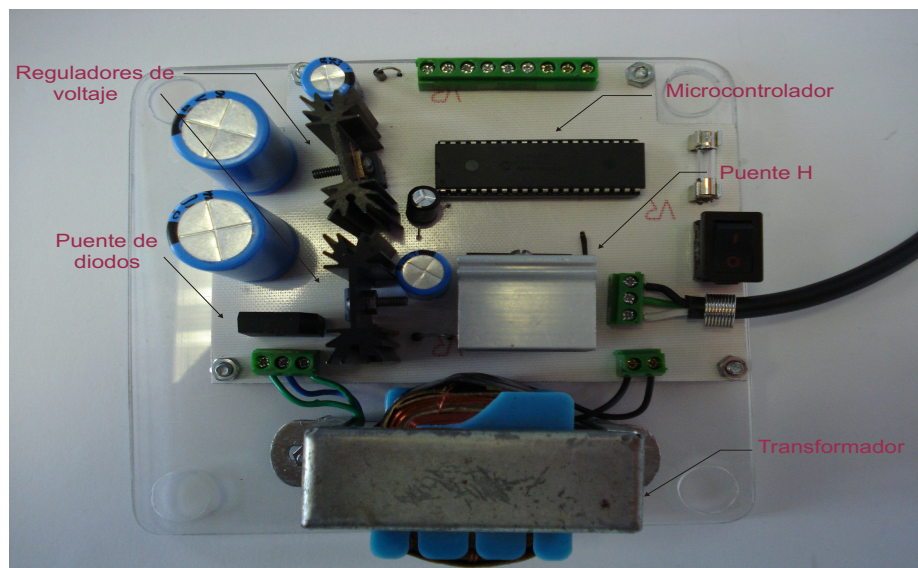
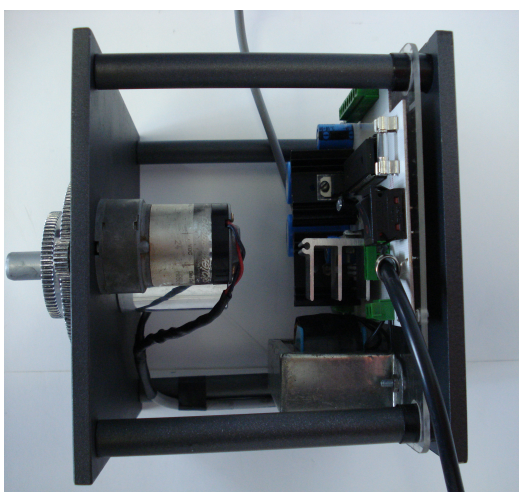


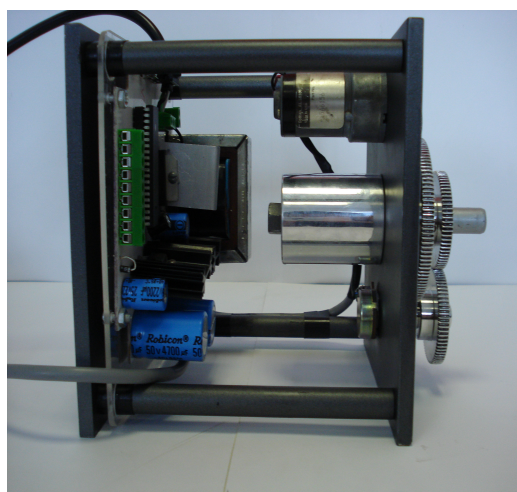
Figura 5.11: Etapa de potencia del *Ball and Beam*.



Figura 5.12: Motor.



(a)



(b)

Figura 5.13: Etapa de potencia acoplada al *esqueleto* (a); Vista superior (b).

de este capítulo no es el que se pensaba instalar. Un servomotor es lo ideal para este tipo de proyectos, pero desafortunadamente no se cuenta con uno de estos, así que se implementó un motor de CC, esto es de suma importancia ya que un servomotor tiene integrado o adosado al menos un detector que permita conocer su posicionamiento y/o velocidad. A los detectores de posición se les llama encoders, y al carecer de esto el motor se controla mediante un puente H mencionado anteriormente.

En las figuras 5.13a y 5.13b se observa como se acopla la etapa de potencia, es decir, la fuente de alimentación junto con el puente H y el microcontrolador al esqueleto.

5.4. Comentarios

Mientras transcurre el proceso de construcción se presentan dificultades y limitantes y se tiene que ir adaptando en línea varios componentes, el cual no estaban previstos originalmente debido a las carencias de recursos y material, sobre la marcha se solucionan los problemas e inconvenientes que se presentan de manera eficaz, dando como resultado un prototipo flexible, de bajo costo y de excelente funcionamiento: electrónico y mecánico.

Capítulo 6

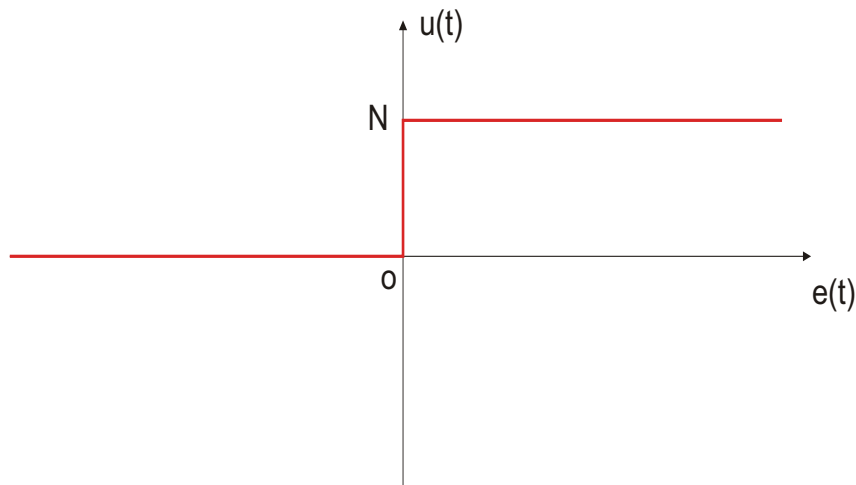
Implantación de un control *on-off*

En este capítulo se presenta la implantación de un control *on-off* al sistema *Ball and Beam*, describiendo el microcontrolador y el programa usado para lograr el control. La selección de dicho control se debe a la facilidad de probarlo en el prototipo. La organización de este capítulo es la siguiente: en la Sección 6.1 se da una introducción del control implantado, en la Sección 6.2 se observan las funciones del programa empleado en el microcontrolador, la Sección 6.3 esta dedicada a mostrar los resultados obtenidos en lazo cerrado, finalmente los comentarios del capítulo se presentan en la Sección 6.4.

6.1. Introducción

El control *on-off* es la forma mas simple de controlar a un sistema, esta ley implica que siempre se usa una acción correctiva máxima, de esta manera la variable manipulada tiene su valor más grande cuando el error es positivo y su valor más pequeño cuando el error es negativo. A la retroalimentación de este tipo se le llama control *on-off* cuyo comportamiento se observa en la Figura 6.1, donde N es el nivel de voltaje. Es simple y no tiene parámetros que configurar, aparte de las acciones mínima y máxima que se ejecutan para la señal de control. El control *on-off* muchas veces es usado para mantener la variable controlada del proceso cerca del valor de la referencia que fue especificada, pero casi siempre resulta en un sistema donde las variables oscilan.

Para poder implantar el control se necesita de un dispositivo que sea el cerebro del sistema. El microcontrolador (PIC) recibe las señales de los sensores las procesa y produce una señal de salida que controla el actuador. En este caso se utiliza un PIC modelo 18LF4550 de la marca *MICROCHIP*, cuyas características principales se muestran en el Apéndice A.

Figura 6.1: Control *on-off*.

6.2. Programación del PIC

Para el funcionamiento del PIC es necesario cargar un programa que configure correctamente sus puertos, convertidores A/D, oscilador, etc. El programa es el código creado y contenido en el microcontrolador que funciona como cerebro, cuya característica es recibir las señales de los sensores las procesa y produce una señal de salida.

La programación del microcontrolador se hace mediante el dispositivo electrónico *PICSTART Plus* de la marca *MICROCHIP* (Ver Capítulo 5, Figura 5.10), el programa se realiza en *MPLAB*, el cual es una aplicación en ambiente *Windows* en la que se genera el programa y se puede simular también. Se utiliza lenguaje *C* con la posibilidad de incorporar lenguaje ensamblador.

El programa se compone de varias partes o funciones las cuales son fragmentos de programa que ejecutan un algoritmo específico, lo que nos permiten hacer más sencilla su comprensión, estructura y ajustes posteriores necesarios.

El programa MPLAB 6.1 muestra el código del programa principal para el control del sistema *Ball and Beam*, destacando la definición de las variables involucradas en el control de dicho sistema.

MPLAB 6.1: Programa principal del <i>Ball and Beam</i>
--


```

#include <pic18.h>                                //BALL AND BEAM

                                                    /**PARAMETROS DEL PIC 18Fxxx
__CONFIG(1, HS);                                // tipo de oscilador

                                                    /**FUNCIONES
void cfgpto ();                                // configuración de puertos I/O
void conversion ();                            // conversion A/D
PWM ();                                        // modulo PWM
%float control ();                            // calculo de u void

int ref,tope,x1,x1a,x3,x3a;                    /**VARIABLES float u; float
u,nu,x3,x1,x1a,x3a;

void main ()                                    /**PROGRAMA PRINCIPAL
{
    OSCCON=0x63;                                // configuración del oscilador 4MHz

    cfgpto('A',1);
//    cfgpto('B',0);
    cfgpto('C',0);
    cfgpto('D',0);

//    if(x1==ref){
//        giro ('S');
//        goto L1;}

    if(x==0x00 || x==0x01){
        conversion('d');
        tope=ADRESH;
        if(tope>0xA8){
            goto D1;}
        PORTD=0x02;
        PWM ('U');
        goto L1;
D1:        PORTD=0x00;
        PWM ('S');
        conversion ('a');
        x=ADRESH;
        if(x==0x02 || x==0x03)
            goto L2;}

```

```
        if(x==0x02 || x==0x03){
            conversion('d');
            tope=ADRESH;
            if(tope<0x5C){
                goto I1;}
            PORTD=0x01 ;
            PWM ('D');
            goto L1;
I1:      PORTD=0x00;
            PWM ('S');
            conversion ('a');
            x=ADRESH;
            if(x==0x00 || x==0x01)
                goto L3;}
    }
```

6.2.1. Funciones

Las funciones se ejecutan cuando son llamados dentro del programa principal, al ser llamadas provocan una pausa en la ejecución del programa principal y su característica es la de hacer más sencilla la elaboración del código o programa al poder tener plenamente identificadas y delimitadas.

Cada función pueden aceptar o no aceptar argumentos del programa principal sin que éstas se confundan con el cuerpo del programa principal, así como también pueden devolver o no devolver algún tipo de dato.

Las siguientes secciones muestran y describen cada una de las funciones utilizadas dentro del programa principal.

6.2.2. Configuración de puertos

La configuración de los puertos del PIC se realiza al guardar en el registro **TRISx**, donde x es la letra que identifica a cada puerto. Se asigna un valor 1 binario en cada pin que se deseé sea una entrada o un 0 binario para especificar que será una salida.

En el programa MPLAB 6.2 se muestra el código empleado para la configuración de puertos del microcontrolador.

MPLAB 6.2: Función de la configuración de puertos

```
//-----  
//          CONFIGURACION DE PUERTOS  
//-----  
  
void cfgpto (p,config) {  
  
    switch (p){  
  
        case 'A':  
            if (config==0)  
                TRISA=0x00;          //PuertoA como salida  
            else  
                TRISA=0xFF;          //PuertoA como entrada  
            break;  
  
        case 'B':  
            if (config==0)  
                TRISB=0x00;          //PuertoB como salida  
            else  
                TRISB=0xFF;          //PuertoB como entrada  
            break;  
  
        case 'C':  
            if (config==0)  
                TRISC=0x00;          //PuertoA como salida  
            else  
                TRISC=0xFF;          //PuertoA como entrada  
            break;  
  
        case 'D':  
            if (config==0)  
                TRISD=0x00;          //PuertoB como salida  
            else  
                TRISD=0xFF;          //PuertoB como entrada  
            break;  
    }  
}
```

```

        default:
        break;
    }
}

```

6.2.3. Conversión Analógica/Digital (A/D)

La conversión A/D es una función importante dentro del programa ya que es la parte que nos entregará los valores que necesitamos para hacer el cálculo de la señal de control. En esta función simplemente se configuran los registros **ADCONx** (donde x puede tomar valor de 0, 1 y 2) en donde se configuran diferentes características como lo son para **ADCON0** la selección del canal por donde se leeran los datos de conversión, el bit de estado de la conversión y la habilitación/deshabilitación del convertidor, para **ADCON1** tenemos la selección del votaje de referneia (en nuestro caso es el mismo que alimenta al PIC), y la configuración de los pines del puerto de conversión, finalmente para **ADCON2** tenemos la justificación de los datos leídos, el tiempo de adquisición y la frecuencia de oscilación, todo lo anterior configurado de acuerdo a las necesidades de conversión y recuperando los datos leídos en cada ciclo mediante los registros **ADRESH** y **ADRESL**.

El código del programa que se emplea en la conversión A/D se muestra en MPLAB 6.3.

MPLAB 6.3: Conversión A/D

```

//-----
//              CONVERSION A/D
//-----

void conversion (c) {
    ADCON1=0x0B;          //Vref-/+=Vdd/Vss;D-AN0->AN3; A-AN4->AN12

    switch (c){

```

```
case 'a':
    ADCON0=0x00;           // Ch-0 = AN0
    ADCON2=0xB8;           // Right J
    ADCON0=0x01;
    asm("nop");
    ADCON0=0x03;
    asm("nop");
    do{
        asm("nop");
    }while(ADCON0==0x03);
break;

case 'b':
    ADCON0=0x04;           // Ch-1 = AN1
    ADCON2=0xB8;           // Right J
    ADCON0=0x05;
    asm("nop");
    ADCON0=0x07;
    asm("nop");
    do{
        asm("nop");
    }while(ADCON0==0x07);
break;

case 'c':
    ADCON0=0x00;           // Ch-0 = AN1
    ADCON2=0x38;           // Left J
    ADCON0=0x05;
    asm("nop");
    ADCON0=0x07;
    asm("nop");
    do{
        asm("nop");
    }while(ADCON0==0x07);
break;
```

```

    case 'd':
        ADCON0=0x04;           // Ch-1 = AN1
        ADCON2=0x38;           // Left J
        ADCON0=0x05;
        asm("nop");
        ADCON0=0x07;
        asm("nop");
        do{
            asm("nop");
        }while(ADCON0==0x07);
        break;
    }
}

```

6.2.4. Modulador de ancho de pulso (PWM)

Esta función configura y activa el modulo PWM del PIC cuya señal es obtenida del PIC por medio de sus correspondientes pines.

El código del programa MPLAB 6.4 se emplea para configurar el módulo PWM del microcontrolador.

MPLAB 6.4: PWM

```

//-----
//          PWM
//-----

void PWM (r,u) {

    T2CON=0x07;           // prescaler=16 CCP1CON=0x3C;
                          // xx00-11xx

                          // 54-PWM mode
    switch (r){

        case 'S':
            CCP1CON=0x30;
            CCP2CON=0X30;
            break;
    }
}

```

```

    case 'D':
    CCP1CON=0x30;
    CCP2CON=0x3C;
    PR2=0xFF;
    CCPR1L=u;
    break;

    case 'D':
    CCP2CON=0x30;
    CCP1CON=0x3C;
    PR2=0xFF;
    CCPR1L=u;
    break;
}

```

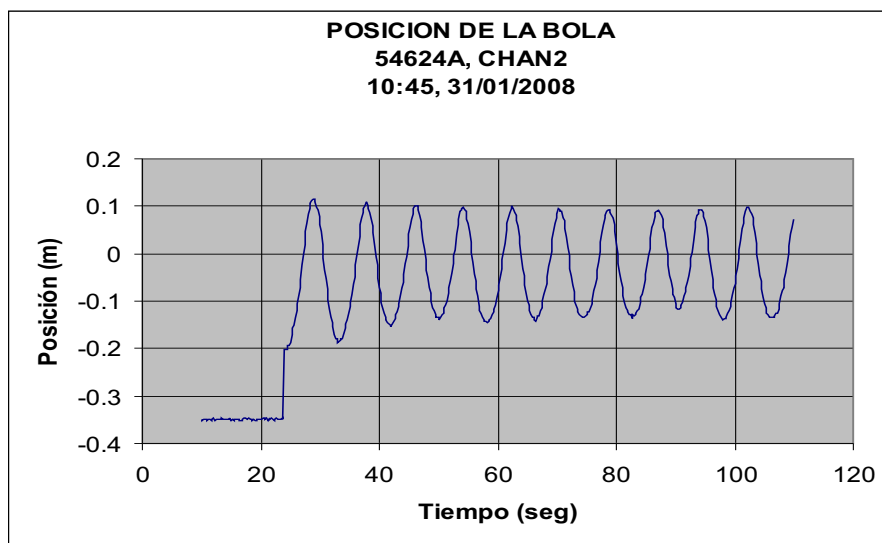


Figura 6.2: Evolución de la posición de la bola, ante el control *on-off*.

6.3. Resultados de laboratorio

Al implementar todo lo descrito anteriormente, se obtuvieron los resultados de laboratorio esperados.

La lectura de los datos se realiza con un osciloscopio marca AGILENT serie 54624A mediante una conexión de puerto *RS232* a la computadora, con el cual se obtienen los datos de dos tipos de gráficos diferentes, el de la posición de la bola y el del ángulo de la barra.

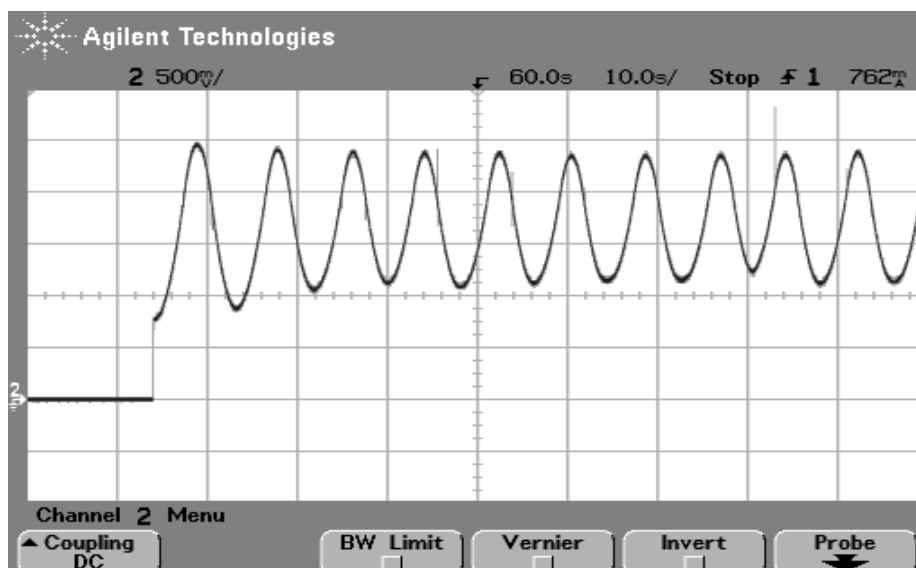


Figura 6.3: Fotografía de la señal de la bola en el osciloscopio.

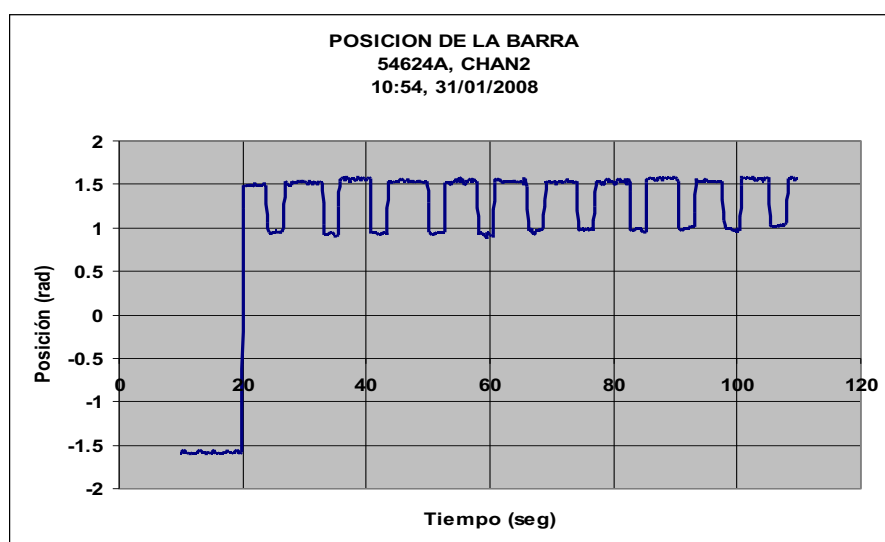


Figura 6.4: Evolución de la posición de la barra, ante una entrada de control *on-off*.

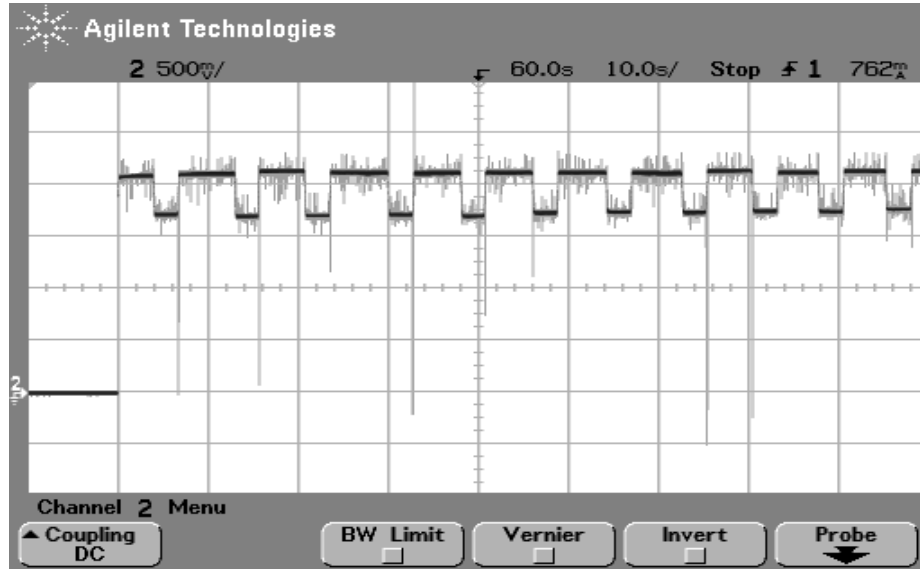


Figura 6.5: Fotografía de la señal de la barra en el osciloscopio.

En la Figura 6.2 se observa el gráfico construido del movimiento de la bola previamente convertidos los datos obtenidos del sensor en volts a metros, mientras que en la Figura 6.3 se observa la toma de la pantalla del osciloscopio al leer los datos.

La conversión de los datos de entrada del sensor se procesan de acuerdo a (6.3) para la bola, donde se toma como referencia el centro de la barra 0.35m cuya longitud total es de 0.7m por lo cual de la referencia a la derecha se toman unidades positivas (m) y de la referencia a la izquierda se toman unidades negativas ($-m$), ahora bien si el sensor nos proporciona al hacer la conversión A/D de 8 bits (ver Sección 6.2.3) un valor entre 0 y 255 bits (valor contenido en el registro ADRESH del PIC), el valor que coincida con el centro de la barra es el valor central del rango anterior, es decir 127 bits, una vez establecidas las referencias se deduce una regla de tres simple igualando dichas referencias, del lado izquierdo los bits obtenidos del sensado y del lado derecho el valor físico real sobre la barra.

Si:

$$\begin{aligned} 127 &= 0.35 \\ ADRESH &= x_1, \end{aligned} \tag{6.1}$$

al despejar x_1 de (6.1) obtenemos:

$$x_1 = \frac{ADRESH * 0.35}{127}, \tag{6.2}$$

se puede observar que al hacer una sustitución en (6.2) del valor 127 obtenemos el valor 0.35 lo cual significa que la bola se encuentra en la parte central de la barra a

0.35m del extremo izquierdo el cual se toma como 0m. y a 0.35m. del extremo derecho el cual se toma como 0.7m., para poder obtener un valor negativo creciente en metros conforme la bola se desplaza a la izquierda de la referencia o un valor positivo creciente conforme la bola se desplaza a la derecha solo se resta la referencia real quedando la fórmula final de la siguiente forma:

$$x_1 = \left(\frac{ADRESH * 0.35}{127} \right) - 0.35, \quad (6.3)$$

en la Figura 6.4 se observa el movimiento de la barra en radianes, que son convertidos según (6.6) y la Figura 6.3 la toma de la pantalla del osciloscopio en el momento de la lectura.

La fórmula para la conversión de volts a radianes sigue la misma lógica que la utilizada para convertir de volts a metros, la referencia central en bits es la misma 127 y la referencia física es 0.78 radianes la cual indica una posición de 0 radianes de inclinación de la barra obteniendo la igualación (6.4), el despeje obtenido se observa en (6.5) y finalmente quedando como (6.6):

$$\begin{aligned} 127 &= 0.78, \\ ADRESH &= x_3, \end{aligned} \quad (6.4)$$

al despejar x_3 de (6.4) obtenemos:

$$x_3 = \frac{ADRESH * 0.78}{127}, \quad (6.5)$$

$$x_3 = \left(\frac{ADRESH * 0.78}{127} \right) - 0.78, \quad (6.6)$$

para la construcción de las graficas se tomaron sólo 500 de un total de 2000 puntos de muestra proporcionados por el osciloscopio.

6.4. Comentarios

Uno de los principales problemas de la etapa del control fue el ajuste de las conversiones analógico-digitales en cuanto al escalamiento e interpretación de los valores obtenidos. El trabajo que se hizo con el PIC tuvo como principal inconveniente la falta de monitoreo lo que dificultó su correcta configuración durante las primeras pruebas de programación tomando mas tiempo para que comenzara a trabajar correctamente.

Capítulo 7

Conclusiones y trabajos futuros

7.1. Conclusiones

Después de un año de intenso trabajo en el proyecto del *Ball and Beam*, se puede concluir que se ha cumplido satisfactoriamente el objetivo originalmente planteado.

Como fruto del trabajo desarrollado se puede mencionar que el *Ball and Beam* se encuentra listo para ser empleado por otros estudiantes, profesores e investigadores que estén interesados en trabajar con sistemas subactuados.

Este prototipo suma un aporte sustancial del autoequipamiento del Laboratorio de Robots Subactuados (LAROSA). Con el alcance logrado en el desarrollo de este prototipo se concluye que el equipamiento de un laboratorio como el que se planea desarrollar es muy factible, ya que el *Ball and Beam* se agrega a una lista de prototipos ya existentes que tienen la misma finalidad, la de contribuir al aprendizaje y entendimiento de conceptos vistos en clase mediante la práctica.

7.2. Trabajos futuros

La posibilidad de realizar nuevas estrategias de control para el prototipo *Ball and Beam* queda abierta. Es necesario seguir trabajando en este sentido, ya que su funcionamiento actual es muy básico, con un control *on-off*.

Como trabajos futuros se propone:

- Realizar el *maestro* en forma física.
- Desarrollar un modelo matemático más completo que considere las dinámicas debido a las fricciones y la debida al motor.

Glosario

Actuador. Dispositivo capaz de convertir energía eléctrica, hidráulica u otro tipo de energía en movimiento.

Automatización. Ciencia que trata de sustituir en un proceso el operador humano por un determinado dispositivo, generalmente electromecánico.

Autoorganización. Fenómeno en el cual cada red neuronal puede crear su propia organización o representación de la información que recibe durante el aprendizaje.

Codificador (Encoder). Dispositivo de retroalimentación que convierte un movimiento mecánico en señales eléctricas, las cuales indican la posición de un actuador.

Control. Proceso mediante el cual un sistema es llevado a parámetros preestablecidos.

Energía. Capacidad de realizar un trabajo.

Estabilidad. Condición en la cual las variables críticas de un sistema dinámico se mantienen invariables o permanecen dentro de unos límites determinados.

Estado. Conjunto mínimo de variables de un sistema dado (variables de estado), tal que, conociendo su valor en un instante dado, permiten conocer la respuesta del sistema ante cualquier señal de entrada o perturbación.

Grados de libertad. Número de coordenadas que describen de manera única la posición de todos los eslabones de un sistema.

Hardware. Se dice de cualquier componente físico relacionado con cierta tecnología.

Manipulador. Mecanismo formado generalmente por elementos en serie, articulados entre sí, destinado al agarre y desplazamiento de objetos. Es multifuncional y puede ser gobernado directamente por un operador humano o mediante dispositivo lógico.

Modelo matemático. Es la representación por medio de ecuaciones de la dinámica de un sistema. Es el tipo de modelo más importantes para la ciencia y la tecnología.

Perturbación. Variable no deseada aplicada a un sistema y la cual tiende a afectar adversamente el valor de una variable controlada. Si la perturbación se genera dentro del sistema se denomina interna, en tanto que una perturbación externa se produce fuera del sistema y es una entrada.

Punto de equilibrio. El estado \mathbf{x}^* se dice que es un punto de equilibrio del sistema $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ si $\mathbf{x}(t)$ es igual a \mathbf{x}^* , para todo $t \geq t_0$.

Retroalimentación. En el proceso de control consiste en la reinyección de la salida (o algunas salidas) a la entrada del sistema, con el fin de mantener cierto desempeño.

Robot. Dispositivo generalmente mecánico, que desempeña tareas automáticamente, ya sea de acuerdo a supervisión humana directa, a través de un programa predefinido o siguiendo un conjunto de reglas generales. Generalmente estas tareas reemplazan, asemejan o extienden el trabajo humano, como ensamblaje en manufactura, manipulación de objetos pesados o peligrosos, trabajo en el espacio, etc.

Robusto. Poco sensible a errores o incertidumbres de modelado. La tolerancia a fallos se considera sinónimo de robustez.

Ruido. Típicamente es una perturbación aleatoria. Señal indeseada presente en un sistema físico.

Sensor. Dispositivo que convierte un parámetro físico (como temperatura, presión, flujo, velocidad, posición) en una señal eléctrica. En algunos casos se le considera un sinónimo de transductor, pero un verdadero sensor contiene un sistema de acondicionamiento de la señal, de manera que es mucho más sencillo realizar una medición.

Sistema dinámico. Sistema cuya respuesta depende de entradas presentes y pasadas (e incluso futuras), dicho sistema puede ser representado mediante ecuaciones diferenciales dinámicas.

Sistema estático. Sistema cuya respuesta depende únicamente de las entradas presentes.

Sistema lineal. Se dice que un sistema es lineal si cumple con los principios de homogeneidad y superposición.

Sistema no lineal. Se dice que un sistema es lineal sí no cumple con los principios de homogeneidad o superposición.

Sistema subactuado. Sistema con menos actuadores que grados de libertad.

Software. Se dice de todos los componentes intangibles de una computadora, es decir, al conjunto de programas y procedimientos necesarios para hacer posible la realización de una tarea específica.

Variables de estado. Conjunto más pequeño de variables que determinan el estado de un sistema dinámico.

Bibliografía

- [1] Quanser Innovete Educate. *Inverted Pendulum System*.
- [2] R. V. Patel F. Shadpey. *Control of Redundant Robot Manipulators*. Springer, 2005.
- [3] I. Fantoni and R. Lozano. *Non-linear Control for Underactuated Mechanical System*. Springer Verlag, London, 2002.
- [4] A. Franco. *Cálculo de momentos de inercia*.
- [5] B. Kolman. *Algebra Lineal*. Prentice Hall, 1999.
- [6] B. Kuo. *Sistemas de Control*. Continental, Oxford, 2003.
- [7] K. Ogata. *Ingeniería de Control Moderna*. Prentice-Hall, Naucalpan, Edo. de México., 1998.
- [8] R. J. Schilling. *Fundamentals of Robots Analysis and Control*. Prentice Hall, 1990.
- [9] M. W. Spong and M. Vidyasagar. *Robot Dynamics and Control*. John Wiley and Sons, New York, 1989.
- [10] M.W. Spong and D.J. Block. The pendubot: A mechatronic system for control research and education. In *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, 1995.

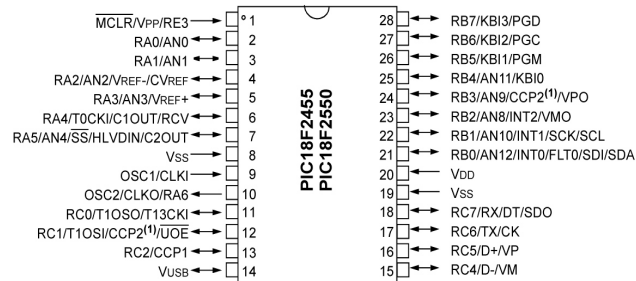
Apéndice A

Especificaciones técnicas del microcontrolador

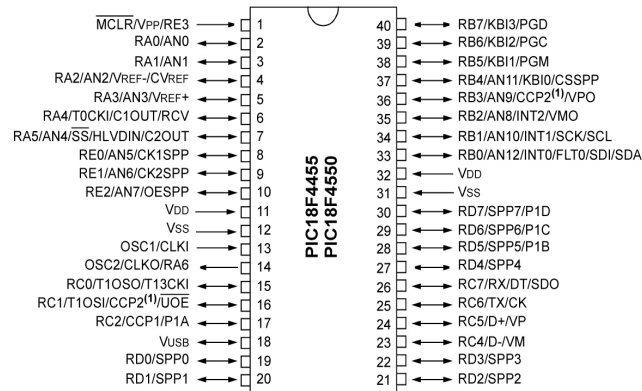
PIC18F2455/2550/4455/4550

Pin Diagrams

28-Pin PDIP, SOIC



40-Pin PDIP



Note 1: RB3 is the alternate pin for CCP2 multiplexing.

Figura A.1: Configuración de pines del microcontrolador.

PIC18F2455/2550/4455/4550

TABLE 1-1: DEVICE FEATURES

Features	PIC18F2455	PIC18F2550	PIC18F4455	PIC18F4550
Operating Frequency	DC – 48 MHz	DC – 48 MHz	DC – 48 MHz	DC – 48 MHz
Program Memory (Bytes)	24576	32768	24576	32768
Program Memory (Instructions)	12288	16384	12288	16384
Data Memory (Bytes)	2048	2048	2048	2048
Data EEPROM Memory (Bytes)	256	256	256	256
Interrupt Sources	19	19	20	20
I/O Ports	Ports A, B, C, (E)	Ports A, B, C, (E)	Ports A, B, C, D, E	Ports A, B, C, D, E
Timers	4	4	4	4
Capture/Compare/PWM Modules	2	2	1	1
Enhanced Capture/ Compare/PWM Modules	0	0	1	1
Serial Communications	MSSP, Enhanced USART	MSSP, Enhanced USART	MSSP, Enhanced USART	MSSP, Enhanced USART
Universal Serial Bus (USB) Module	1	1	1	1
Streaming Parallel Port (SPP)	No	No	Yes	Yes
10-bit Analog-to-Digital Module	10 Input Channels	10 Input Channels	13 Input Channels	13 Input Channels
Comparators	2	2	2	2
Resets (and Delays)	POR, BOR, RESET Instruction, Stack Full, Stack Underflow (PWRT, OST), MCLR (optional), WDT	POR, BOR, RESET Instruction, Stack Full, Stack Underflow (PWRT, OST), MCLR (optional), WDT	POR, BOR, RESET Instruction, Stack Full, Stack Underflow (PWRT, OST), MCLR (optional), WDT	POR, BOR, RESET Instruction, Stack Full, Stack Underflow (PWRT, OST), MCLR (optional), WDT
Programmable Low-Voltage Detect	Yes	Yes	Yes	Yes
Programmable Brown-out Reset	Yes	Yes	Yes	Yes
Instruction Set	75 Instructions; 83 with Extended Instruction Set enabled	75 Instructions; 83 with Extended Instruction Set enabled	75 Instructions; 83 with Extended Instruction Set enabled	75 Instructions; 83 with Extended Instruction Set enabled
Packages	28-pin PDIP 28-pin SOIC	28-pin PDIP 28-pin SOIC	40-pin PDIP 44-pin QFN 44-pin TQFP	40-pin PDIP 44-pin QFN 44-pin TQFP

Figura A.2: Hoja de características del microcontrolador.

PIC18F2455/2550/4455/4550

FIGURE 1-2: PIC18F4455/4550 (40/44-PIN) BLOCK DIAGRAM

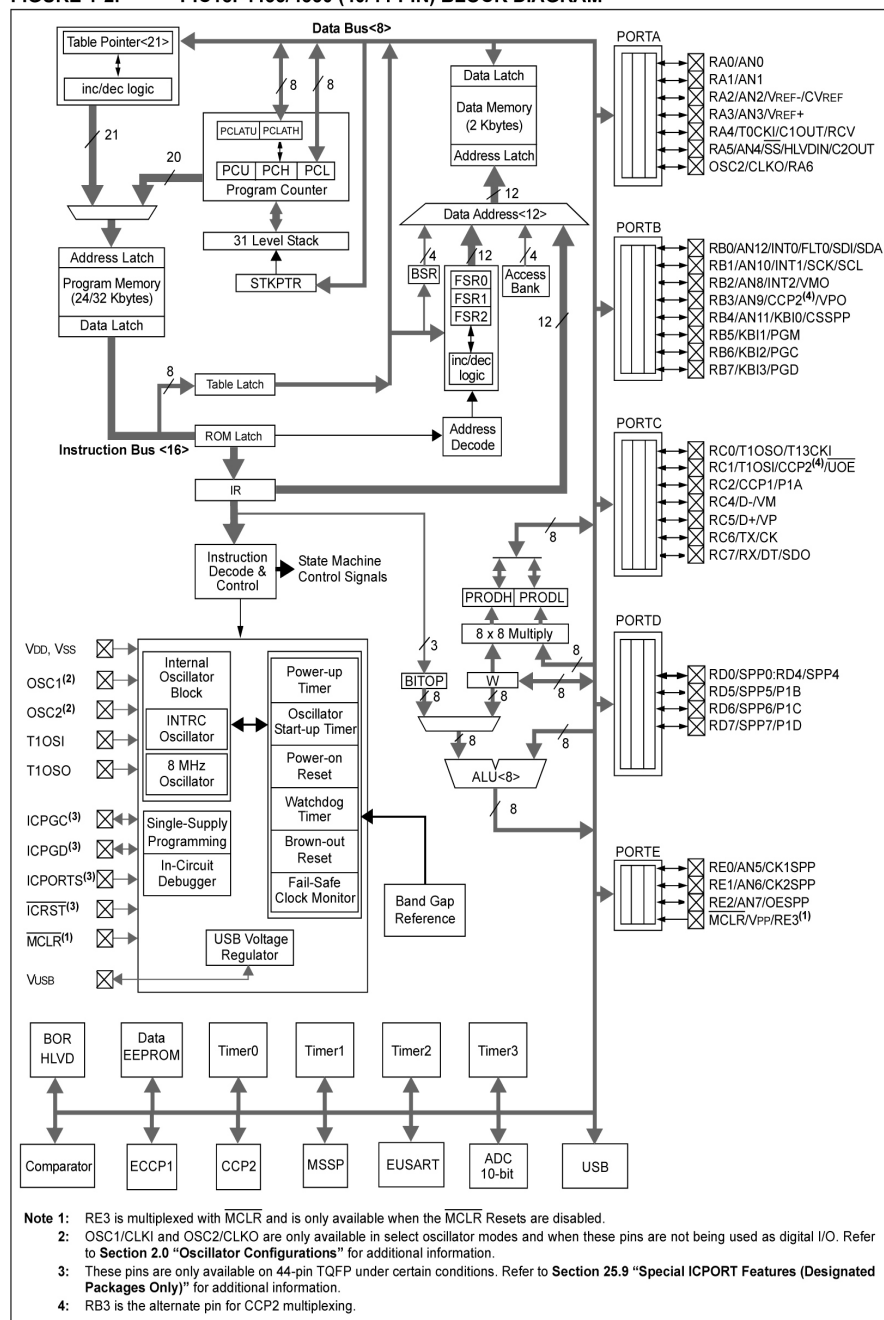


Figura A.3: Diagrama a bloques del microcontrolador.

Apéndice B

Especificaciones técnicas de los componentes electrónicos

TOSHIBA

TA7291P/S/SG/F/FG

TOSHIBA BIPOLAR LINEAR INTEGRATED CIRCUIT SILICON MONOLITHIC

TA7291P, TA7291S/SG, TA7291F/FG

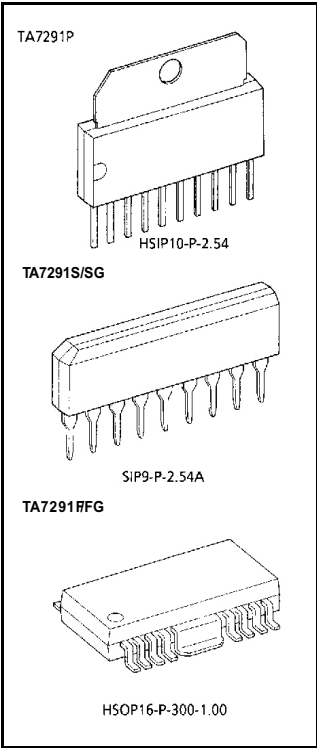
BRIDGE DRIVER

The TA7291P / S/SG / F/FG are bridge drivers with output voltage control.

FEATURES

- ? Four modes available (CW / CCW / STOP / BRAKE)
- ? Output current: P type 1.0 A (AVE.) 2.0 A (PEAK)
 S/SG, / F/FG type 0.4 A (AVE.) 1.2 A (PEAK)
- ? Wide range of operating voltages: $V_{CC} \text{ (opr.)} = 4.5\sim 20 \text{ V}$
 $V_S \text{ (opr.)} = 0\sim 20 \text{ V}$
 $V_{ref} \text{ (opr.)} = 0\sim 20 \text{ V}$
- ? Build in thermal shutdown, over-current protector and punch-through current restriction circuits
- ? Stand-by mode available (STOP MODE)
- ? Hysteresis for all inputs.

The TA7291SG/FG is a Pb-free product.
The TA7291P is Sn plated product including Pb.
The following conditions apply to solderability:
*Solderability
1. Use of Sn-63Pb solder bath
 *solder bath temperature = 230 °C
 *dipping time = 5 seconds
 *number of times = once
 *use of R-type flux
2. Use of Sn-3.0 Ag-0.5 Cu solder bath
 *solder bath temperature = 245 °C
 *dipping time = 5 seconds
 *the number of times = once
 *use of R-type flux



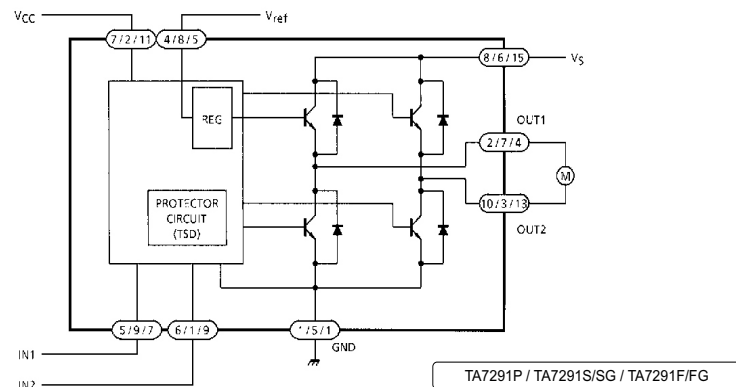
Weight
HSIP10?P?2.54 : 2.47 g (typ.)
SIP9?P?2.54A : 0.92 g (typ.)
HSOP16?P?300?1.00 : 0.50 g (typ.)

Figura B.1: Especificaciones del puente H.

TOSHIBA

TA7291P/S/SG/F/FG

BLOCK DIAGRAM



PIN FUNCTION

PIN No.			SYMBOL	FUNCTION DESCRIPTION
P	S/SG	F/FG		
7	2	11	V _{CC}	Supply voltage terminal for logic
8	6	15	V _S	Supply voltage terminal for motor driver
4	8	5	V _{ref}	Supply voltage terminal for control
1	5	1	GND	GND terminal
5	9	7	IN1	Input terminal
6	1	9	IN2	Input terminal
2	7	4	OUT1	Output terminal
10	3	13	OUT2	Output terminal

P Type: Pin (3), (9): NC

S/SG Type: PIN (4): NC

F/FG Type: PIN (2), (3), (6), (8), (10), (12), (14), and (16): NC

For the F/FG Type, we recommend that the FIN be connected to the GND.

Figura B.2: Diagrama del puente H.

TOSHIBA

T

TA7291P/S/SG/F/FG

ELECTRICAL CHARACTERISTICS(Unless otherwise specified, $T_a = 25^\circ\text{C}$, $V_{CC} = 12\text{ V}$, $V_S = 18\text{ V}$)

CHARACTERISTIC			SYMBOL	TEST CIRCUIT	TEST CONDITION	MIN	TYP.	MAX	UNIT
Supply Current			I _{CC1}	1	Output OFF, CW / CCW mode	?	8.0	13.0	mA
			I _{CC2}		Output OFF, Stop mode	?	0	50	μA
			I _{CC3}		Output OFF, Brake mode	?	6.5	10.0	mA
Input Operating Voltage		1 (High)	V _{IN1}	2	T _J = 25°C	3.5	?	5.5	V
		2 (Low)	V _{IN2}			GND	?	0.8	
Input Current			I _{IN} V		I _N = 3.5 V, Sink mode	?	3	10	μA
Input Hysteresis Voltage			?V			?	?	0.7	?
Saturation Voltage	P / S/SG / F/FG Type	Upper Side	V _{SAT} U?1	3	V _{ref} = V _S , V _{OUT} ? V _S measure I _O = 0.2 A, CW / CCW mode	?	0.9	1.2	V
		Lower Side	V _{SAT} L?1		V _{ref} = V _S , V _{OUT} ? GND measure I _O = 0.2 A, CW / CCW mode	?	0.8	1.2	
	S/SG / F/FG Type	Upper Side	V _{SAT} U?2		V _{ref} = V _S , V _{OUT} ? V _S measure I _O = 0.4 A, CW / CCW mode	?	1.0	1.35	
		Lower Side	V _{SAT} L?2		V _{ref} = V _S , V _{OUT} ? GND measure I _O = 0.4 A, CW / CCW mode	?	0.9	1.35	
	P Type	Upper Side	V _{SAT} U?3		V _{ref} = V _S , V _{OUT} ? V _S measure I _O = 1.0 A, CW / CCW mode	?	1.3	1.8	
		Lower Side	V _{SAT} L?3		V _{ref} = V _S , V _{OUT} ? GND measure I _O = 1.0 A, CW / CCW mode	?	1.2	1.85	
Output Voltage (Upper Side)	S/SG / F/FG Type		V _{SAT} U?1'	3	V _{ref} = 10 V V _{OUT} ? GND measure, I _O = 0.2 A, CW / CCW mode	?	11.2	?	V
			V _{SAT} U?2'		V _{ref} = 10 V V _{OUT} ? GND measure, I _O = 0.4 A, CW / CCW mode	10.4	10.9	12.2	
	P Type		V _{SAT} U?3'		V _{ref} = 10 V V _{OUT} ? GND measure, I _O = 0.5 A, CW / CCW mode	?	11.0	?	
			V _{SAT} U?4'		V _{ref} = 10 V V _{OUT} ? GND measure, I _O = 1.0 A, CW / CCW mode	10.2	10.7	12.0	
Leakage Current		Upper Side	I _L U V	4	L = 25 V	?	?	50	μA
		Lower Side	I _L L		V _L = 25 V	?	?	50	
Diode Forward Voltage	S/SG / F/FG Type	Upper Side	V _F U?1 I	5	I _F = 0.4 A	?	1.5	?	V
	P Type	Lower Side	V _F U?2		I _F = 1 A	?	2.5	?	
	S/SG / F/FG Type	Upper Side	V _F L?1		I _F = 0.4 A	?	0.9	?	
	P Type	Lower Side	V _F L?2		I _F = 1 A	?	1.2	?	
Reference Current			I _{ref}	2	V _{ref} = 10 V, Source mode	?	20	40	μA

Figura B.3: Características eléctricas del puente H.



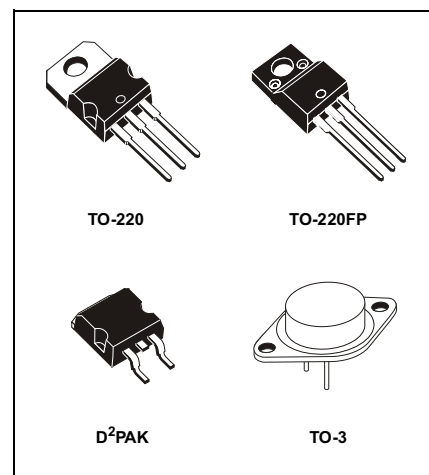
L7800 SERIES

POSITIVE VOLTAGE REGULATORS

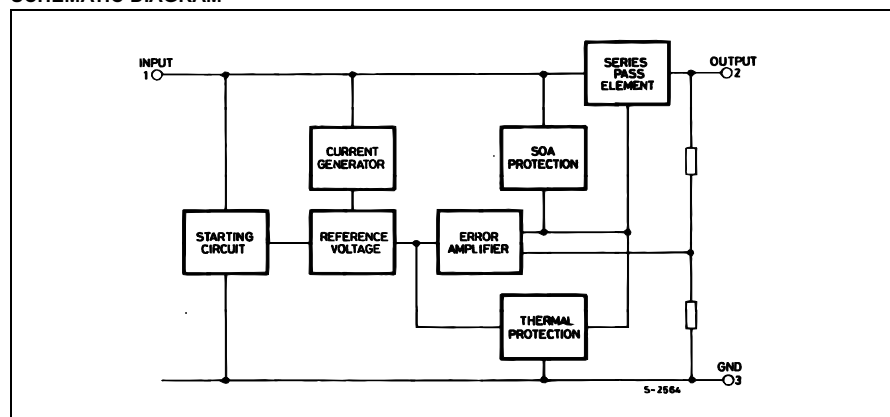
- n OUTPUT CURRENT TO 1.5A
- n OUTPUT VOLTAGES OF 5; 5.2; 6; 8; 8.5; 9; 12; 15; 18; 24V
- n THERMAL OVERLOAD PROTECTION
- n SHORT CIRCUIT PROTECTION
- n OUTPUT TRANSITION SOA PROTECTION

DESCRIPTION

The L7800 series of three-terminal positive regulators is available in TO-220, TO-220FP, TO-3 and D²PAK packages and several fixed output voltages, making it useful in a wide range of applications. These regulators can provide local on-card regulation, eliminating the distribution problems associated with single point regulation. Each type employs internal current limiting, thermal shut-down and safe area protection, making it essentially indestructible. If adequate heat sinking is provided, they can deliver over 1A output current. Although designed primarily as fixed voltage regulators, these devices can be used with external components to obtain adjustable voltage and currents.



SCHEMATIC DIAGRAM



February 2003

1/29

Figura B.4: Especificaciones de los reguladores de voltaje serie L7800.

L7800 SERIES

ABSOLUTE MAXIMUM RATINGS

Symbol	Parameter†		Value	Unit
V _I	DC Input Voltage	for V _O = 5 to 18V	35	V
		for V _O = 20, 24V	40	
I _O	Output Current		Internally Limited	
P _{tot}	Power Dissipation		Internally Limited	
T _{stg}	Storage Temperature Range		-65 to 150	°C
T _{op}	Operating Junction Temperature Range	for L7800	-55 to 150	°C
		for L7800C	0 to 150	

Absolute Maximum Ratings are those values beyond which damage to the device may occur. Functional operation under these condition is not implied.

THERMAL DATA

Symbol	Parameter	D ² PAK	TO-220	TO-220FP	TO-3	Unit
R _{thj-case}	Thermal Resistance Junction-case Max	3	5	5	4	°C/W
R _{thj-amb}	Thermal Resistance Junction-ambient Max	62.5	50	60	35	°C/W

SCHEMATIC DIAGRAM

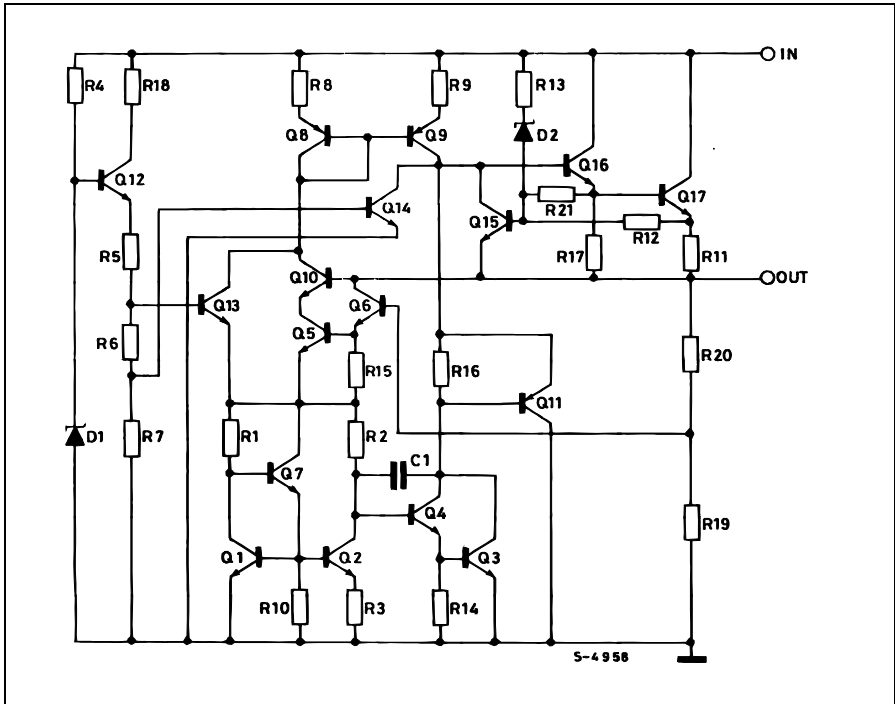
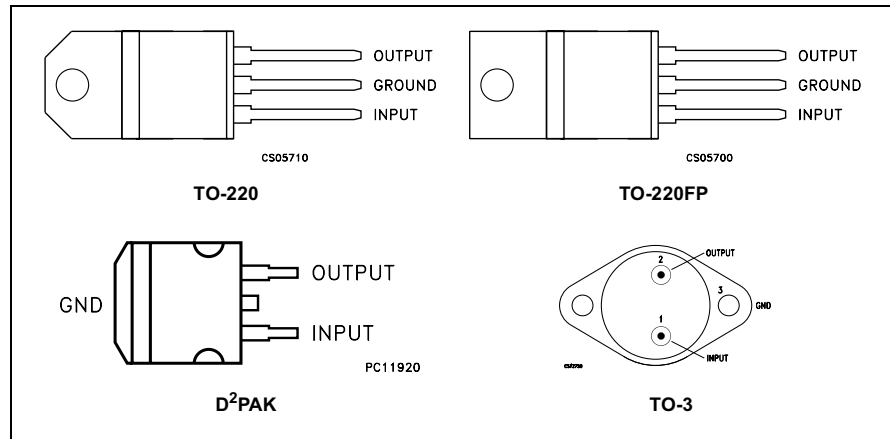


Figura B.5: Diagrama esquemático de los reguladores de volaje.

L7800 SERIES

CONNECTION DIAGRAM (top view)



ORDERING CODES

TYPE	TO-220	D²PAK (*)	TO-220FP	TO-3	OUTPUT VOLTAGE
L7805				L7805T	5 V
L7805C	L7805CV	L7805CD2T	L7805CP	L7805CT	5 V
L7852C	L7852CV	L7852CD2T	L7852CP	L7852CT	5.2 V
L7806				L7806T	6 V
L7806C	L7806CV	L7806CD2T	L7806CP	L7806CT	6 V
L7808				L7808T	8 V
L7808C	L7808CV	L7808CD2T	L7808CP	L7808CT	8 V
L7885C	L7885CV	L7885CD2T	L7885CP	L7885CT	8.5 V
L7809C	L7809CV	L7809CD2T	L7809CP	L7809CT	9 V
L7812				L7812T	12 V
L7812C	L7812CV	L7812CD2T	L7812CP	L7812CT	12 V
L7815				L7815T	15 V
L7815C	L7815CV	L7815CD2T	L7815CP	L7815CT	15 V
L7818				L7818T	18 V
L7818C	L7818CV	L7818CD2T	L7818CP	L7818CT	18 V
L7820				L7820T	20 V
L7820C	L7820CV	L7820CD2T	L7820CP	L7820CT	20 V
L7824				L7824T	24 V
L7824C	L7824CV	L7824CD2T	L7824CP	L7824CT	24 V

(*) Available in Tape & Reel with the suffix "-TR".

Figura B.6: Diagrama de conexiones de los reguladores de voltaje.

Apéndice C

Fórmula de Ackermann

Existen varios métodos para el cálculo de la matriz de ganancias de retroalimentación del estado K . A continuación se presenta una fórmula muy difundida, conocida como la fórmula de *Ackermann* para calcular la matriz de ganancias de retroalimentación del estado K .

Considerando el sistema $\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u$, puede escribirse también como:

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \quad (\text{C.1})$$

Se supone que este sistema es de estado completamente controlable. También se supone que los polos en lazo cerrado deseados están en $s = \mu_1, s = \mu_2, \dots, s = \mu_n$, el uso de un control mediante la retroalimentación del estado

$$u = -Kx, \quad (\text{C.2})$$

modifica la ecuación del sistema a:

$$\dot{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}K)x, \quad (\text{C.3})$$

se define:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{B}K. \quad (\text{C.4})$$

La ecuación característica deseada es

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}K = s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}} = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n), \quad (\text{C.5})$$

$$= s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0. \quad (\text{C.6})$$

Dado que el teorema de Cayley - Hamilton plantea que $\tilde{\mathbf{A}}$ satisface su propia ecuación característica, tenemos que:

$$\emptyset(\tilde{\mathbf{A}}) = \tilde{\mathbf{A}} + \alpha_1 \tilde{\mathbf{A}}^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \tilde{\mathbf{A}} + \alpha_n \mathbf{I} = 0, \quad (\text{C.7})$$

se emplea (C.7) para obtener la función de *Ackermann*, se considera el caso en el que $n = 3$. Para cualquier entero positivo n , es posible entender con facilidad la obtención considerando las cantidades siguientes:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}, \quad (\text{C.8})$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{B}K, \quad (\text{C.9})$$

$$\tilde{\mathbf{A}}^2 = (\mathbf{A} - \mathbf{B}K)^2 = \mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{B}K - \mathbf{B}K\tilde{\mathbf{A}}, \quad (\text{C.10})$$

$$\tilde{\mathbf{A}}^3 = (\mathbf{A} - \mathbf{B}K)^3 = \mathbf{A} - \mathbf{A}^2\mathbf{B}K - \mathbf{A}\mathbf{B}K\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{B}K - \mathbf{A}\mathbf{B}K\tilde{\mathbf{A}}^2, \quad (\text{C.11})$$

multiplicando (C.8), (C.9), (C.10) y (C.11) en orden, por α_3 , α_2 , α_1 y α_0 , (en donde $\alpha_0 = 1$), respectivamente, y agregando los resultados, se obtiene:

$$\alpha_3 \mathbf{I} + \alpha_2 \tilde{\mathbf{A}} + \alpha_1 \tilde{\mathbf{A}}^2 + \tilde{\mathbf{A}}^3, \quad (\text{C.12})$$

$$\begin{aligned} &= \alpha_3 \mathbf{I} + \alpha_2(\mathbf{A} - \mathbf{B}K) + \alpha_1(\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{B}K - \mathbf{B}K\tilde{\mathbf{A}}) + \mathbf{A} - \mathbf{A}^2\mathbf{B}K \\ &\quad - \mathbf{A}\mathbf{B}K\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{B}K - \mathbf{A}\mathbf{B}K\tilde{\mathbf{A}}^2, \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

$$\begin{aligned} &= \alpha_3 \mathbf{I} + \alpha_2\mathbf{A} + \alpha_1\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 - \alpha_2\mathbf{B}K - \alpha_1\mathbf{A}\mathbf{B}K - \alpha_1\mathbf{B}K\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}^2\mathbf{B}K \\ &\quad - \mathbf{B}K\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{B}K\tilde{\mathbf{A}}^2, \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

tomando en cuenta a (C.7) se tiene que:

$$\alpha_3 + \alpha_2 \tilde{\mathbf{A}} + \alpha_1 \tilde{\mathbf{A}}^2 + \tilde{\mathbf{A}}^3 = \emptyset(\tilde{\mathbf{A}}) = 0, \quad (\text{C.15})$$

asimismo, se tiene que:

$$\alpha_3 + \alpha_2 \mathbf{A} + \alpha_1 \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 = \emptyset(\mathbf{A}) = 0. \quad (\text{C.16})$$

Sustituyendo (C.15) y (C.16) en (C.14) se obtiene:

$$\emptyset(\tilde{\mathbf{A}}) = \emptyset(\mathbf{A}) - \alpha_2\mathbf{A}\mathbf{B}K - \alpha_1\mathbf{B}K\tilde{\mathbf{A}} - \alpha_1\mathbf{B}K\tilde{\mathbf{A}}^2 - \alpha_1\mathbf{A}\mathbf{B}K - \mathbf{A}\mathbf{B}K\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}^2\mathbf{B}K, \quad (\text{C.17})$$

dado que $\emptyset(\tilde{\mathbf{A}}) = 0$, se obtiene:

$$\emptyset(\mathbf{A}) = \mathbf{B}(\alpha_2 K + \alpha_1 K\tilde{\mathbf{A}} + K\tilde{\mathbf{A}}^2) + \mathbf{A}\mathbf{B}(\alpha_1 K + K\tilde{\mathbf{A}}) + \mathbf{A}^2\mathbf{B}K, \quad (\text{C.18})$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_2 K + \alpha_1 K\tilde{\mathbf{A}} + K\tilde{\mathbf{A}}^2 \\ \alpha_1 K + K\tilde{\mathbf{A}} \\ K \end{bmatrix}. \quad (\text{C.19})$$

Puesto que el sistema es de estado completamente controlable, la inversa de la matriz de controlabilidad

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & : & \mathbf{AB} & : & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (\text{C.20})$$

existe. Así que multiplicando (C.20) por la inversa de la matriz de controlabilidad, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & : & \mathbf{AB} & : & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} \emptyset(\mathbf{A}) \cdot \begin{bmatrix} \alpha_2 K + \alpha_1 K \tilde{\mathbf{A}} + K \tilde{\mathbf{A}}^2 \\ \alpha_1 K + K \tilde{\mathbf{A}} \\ K \end{bmatrix}, \quad (\text{C.21})$$

multiplicando (C.21) por $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, se obtiene:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & : & \mathbf{AB} & : & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} \emptyset(\mathbf{A}) \\ = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 K + \alpha_1 K \tilde{\mathbf{A}} + K \tilde{\mathbf{A}}^2 \\ \alpha_1 K + K \tilde{\mathbf{A}} \\ K \end{bmatrix} = K, \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

(C.22) puede re escribirse como:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & : & \mathbf{AB} & : & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} \emptyset(\mathbf{A}) = K, \quad (\text{C.23})$$

de (C.23) se produce la matriz de ganancias del estado K deseada. Para un entero positivo arbitrario n , se tiene que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & : & \mathbf{AB} & : & \dots & : & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} \emptyset(\mathbf{A}) = K. \quad (\text{C.24})$$

A (C.24) se le conoce como la matriz de ganancias de retroalimentación del estado K .