Aportaciones Matemáticas
Serie Comunicaciones **32** (2003) 125–138

FÓRMULAS DE TIPO-WEYL PARA DOMINIOS EXTERIORES

FEDERICO MENÉNDEZ-CONDE LARA

Resumen. Se presenta un recuento histórico de comportamientos asintóticos de tipo-Weyl para dominios exteriores.

Abstract. We present a historical overview of Weyl-type asymptotics for exterior domains.

1. Introducción

Sea D un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$, y sea $-\Delta_i$ el operador de Laplace actuando en $D \subset \mathbb{R}^n$, sujeto a condiciones de frontera (Dirichlet o Neumann). La *fórmula de Weyl* para la distribución de eigenvalores establece que el número de eigenvalores de $-\Delta_i$ que son menores que λ^2 es

$$N(\lambda) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \operatorname{Vol}(D)\ \lambda^n + o(\lambda^n), \qquad \lambda \to \infty. \tag{1}$$

En esta fórmula, ω_n es el volumen de la bola n-dimensional de radio 1 y $\operatorname{Vol}(D)$ es el volumen del dominio. Tenemos entonces que la fórmula de Weyl describe la distribución aproximada de los eigenvalores del Laplaciano en un dominio acotado.

Por otra parte, sea $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ compacto, con interior no vacío, simplemente conexo y con frontera suave C^∞, y sea $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}$. A la región Ω la llamamos el *dominio exterior* y, a $\mathcal{O}$ lo llamamos el *obstáculo*. Consideramos el operador $-\Delta_e$, definido como la realización autoadjunta del Laplaciano positivo, actuando en $L^2(\Omega)$ y sujeto a condiciones de frontera (Dirichlet o Neumann). Denotamos por $-\Delta_0$ a la realización autoadjunta del operador de Laplace en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Existe un objeto, surgido en la teoría de la dispersión y conocido como la *fase de dispersión* para el par de operadores $\{-\Delta_0, -\Delta_e\}$, al que denotaremos por $p(\lambda)$, que es una función continua que tiene el comportamiento asintótico

$$p(\lambda) = \frac{2\omega_n}{(2\pi)^n} \operatorname{Vol}(\mathcal{O})\ \lambda^n + o(\lambda^n) \qquad \lambda \to \infty, \tag{2}$$

que recuerda notablemente a la fórmula de Weyl.

En este trabajo expondremos brevemente la teoría y la historia concernientes a las fórmulas (2) y (1). Asimismo, intentaremos mostrar que existe una profunda relación entre las funciones $p(\lambda)$ y $N(\lambda)$ que va más allá de la a priori sorprendente similitud entre sus comportamientos asintóticos.

Agradecimientos

Quiero agradecer a Rubén Martínez-Avendaño, quien leyó cuidadosamente este artículo e hizo algunos comentarios que resultaron útiles para su mejora; también quiero agradecer al árbitro por sus comentarios y por su sugerencia de incluir la sección 2.3.

2. El problema interno: la fórmula de Weyl

En esta sección tratamos la distribución de eigenvalores del operador de Laplace en un dominio acotado.

2.1. Formulación del problema. Consideramos el siguiente problema de frontera:

$$\begin{cases} -\Delta f(x) = s\ f(x) & x \in D \\ Bf(x) = 0 & x \in \partial D, \end{cases} \tag{3}$$

donde B puede ser igual a 1 (condiciones de Dirichlet), o bien $B = \partial/\partial n$ (condiciones de Neumann).

Es bien sabido (e.g. [11]) que este problema no tiene solución para cualquier valor de s, sino solamente para una colección numerable

$$s = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3...$$

de números reales no negativos $\lambda_j \geq 0$ conocidos como *eigenvalores* del problema (3). Las soluciones f_j de (3) con $s = \lambda_j$ son conocidas como *eigenfunciones* correspondientes al eigenvalor λ_j. Estos eigenvectores poseen las tres importantes propiedades siguientes:

1) Todas las f_j son infinitamente diferenciables en el interior de D y continuas en D. En particular, $f_j \in L^2(D)$.
2) Si $\lambda_k \neq \lambda_j$, entonces
$$\int_D f_j(x)\overline{f_k(x)}dx = 0.$$
Es decir, f_j es ortogonal a f_k con respecto al producto interno en $L^2(D)$.
3) La colección de eigenvectores genera el espacio $L^2(D)$.

Habiendo establecido esto, podemos entonces construir una base ortonormal de eigenfunciones $\{e_j\}$ de forma tal que sus eigenvalores correspondientes λ_j formen una sucesión no decreciente $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 ...$ Simplemente, normalizando los eigenvectores $\{f_j\}$ y ordenándolos apropiadamente.

La fórmula de Weyl (1) nos dice que, no importando cual sea la forma del dominio D, la distribución aproximada de los eigenvalores está directamente relacionada con el volumen del obstáculo, siendo que

$$N(\lambda) \sim \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \operatorname{Vol}(D)\ \lambda^n, \qquad \lambda \to \infty.$$

En algunos ejemplos sencillos, no es difícil mejorar el residuo que aparece en la fórmula (1). Por ejemplo, si D está dado por un intervalo en $\mathbb{R}$, podemos acotar el residuo por 1. Cuando D es un cubo n-dimensional, se puede obtener por métodos elementales (e.g. [11]) la fórmula

$$N(\lambda) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \operatorname{Vol}(D)\ \lambda^n + O(\lambda^{n-1}). \tag{4}$$

Otro ejemplo notable es cuando el dominio es una bola de radio R; en ese caso los eigenvalores son ceros de funciones de Bessel J_ν con índices que dependen solamente de la dimensión del espacio; la distribución de estos ceros (ver e.g. [40]) determina el resultado (4) para este ejemplo.

2.2. Un poco de historia. La relación (1) fue probada por Hermann Weyl en 1911 para condiciones de frontera de Dirichlet, menos de dos años después de haber sido conjeturada por el físico teórico H.A. Lorentz en una conferencia en Göttingen (cf [20]). Pocos años más tarde, Richard Courant obtuvo la estimación ([10])

$$N(\lambda) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \operatorname{Vol}(D)\ \lambda^n + O(\lambda^{n-1} \log \lambda), \tag{5}$$

mejorando notablemente el resultado anterior. A partir de entonces, muchos esfuerzos fueron dirigidos a probar que el factor $\log \lambda$ en el residuo de (5) era innecesario, como sugerían los numerosos ejemplos concretos existentes, y en particular los mencionados al final del apartado 2.1; sin embargo, el conseguir demostrar esto resultó ser notablemente difícil, y una prueba completa no fue obtenida sino hasta 1980 cuando Robert Seeley ([39]), usando métodos de análisis microlocal, consiguió probar que la fórmula (4) es válida para cualquier dominio acotado.

De este modo, la prueba de (4) fue la culminación de una serie de resultados intermedios que abarcaron la mayor parte del siglo veinte; entre los autores que hicieron aportaciones importantes a este problema en este periodo podemos mencionar, por ejemplo, a Minakshidundaram y Pleijel [31], a Fedosov [12] y a McKean y Singer [26]. Cabe también señalar que muy poco tiempo después de la publicación por Seeley del resultado (4), Victor Ivrĭi [18] y Richard Melrose [27] obtuvieron, independientemente uno del otro, la fórmula

$$N(\lambda) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\ \mathrm{Vol}(D)\ \lambda^n \pm \frac{\omega_{n-1}\mathrm{Vol}(\partial D)}{4(2\pi)^{n-1}}\ \lambda^{n-1} + o(\lambda^{n-1}), \tag{6}$$

válida en el caso en que D cumpla la condición geométrica de ser una región *no atrayente*; esto significa, intuitivamente, que toda bola de billar que rebote en la frontera de D no va permanecer rebotando para siempre contra la frontera, sino que eventualmente se va a alejar al infinito (referimos a [38] o [34] para una definición precisa de esto). Observamos que el coeficiente en el segundo término en la fórmula (6) es proporcional al volumen de la frontera del dominio.

Nos parece oportuno señalar en este punto que la fórmula de Weyl no es, ni mucho menos, una propiedad exclusiva del Laplaciano. En efecto, fórmulas análogas muy generales existen para una diversidad de operadores. Tocaremos este punto de forma algo más precisa en el apartado 3.2.

2.3. Un problema inverso: la forma de un tambor. En relación con la fórmula de Weyl puede plantearse el problema inverso sobre si los eigenvalores del operador $-\Delta_i$ determinan el dominio D. Notamos que la fórmula de Weyl (1) nos muestra que los eigenvalores de $-\Delta_i$ determinan el volumen de D, mientras que la fórmula (6) muestra que también el perímetro de D queda determinado por los eigenvalores de $-\Delta_i$. De hecho, tanto el volumen como el perímetro quedan determinados por la distribución aproximada de los eigenvalores en vecindades de infinito. En este orden de ideas, resulta natural la pregunta: ¿Si conociéramos exactamente quiénes son todos los eigenvalores de $-\Delta_i$ podríamos conocer la forma del dominio D? O, en otras palabras: Si los eigenvalores de los laplacianos de dos dominios acotados $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^n$ son exactamente los mismos ¿Se sigue necesariamente que ambos dominios son congruentes en el sentido de la geométricamente congruentes?

Una respuesta negativa a la pregunta arriba planteada fue dada por John Milnor en [30]. En ese breve artículo, Milnor construyó dos toros de dimensión 16, no congruentes entre si, cuyos laplacianos tienen los mismos eigenvalores.

Mark Kac ([20]) planteó esta pregunta para el caso $n = 2$ en términos acústicos : ¿Podemos escuchar la forma de un tambor? Si pensamos a una región acotada en $\mathbb{R}^2$ como la membrana de un tambor, los eigenvalores de $-\Delta_i$ corresponden a los tonos que este tambor es capaz de producir; de esta forma, Kac plantea la pregunta en la forma: ¿Podría alguien con oído perfecto conocer la forma de un tambor al escucharlo?

Esta pregunta fue respondida de forma negativa casi veinte años después de la publicación de [20], cuando Carolyn Gordon, David Webb y Scott Wolpert (en [14]) construyeron dos regiones poligonales en $\mathbb{R}^2$ cuyos laplacianos (tanto con condiciones de Dirichlet como de Neumann) tienen exactamente los mismos eigenvalores. De cualquier manera, una respuesta positiva en esta dirección fue dada recientemente por Steve Zelditch (en [43]) para el caso en el que el dominio D obedece ciertas condiciones de regularidad (referimos a [43] para los detalles).

3. El problema exterior. Primeras consideraciones

En esta sección tratamos el caso en el que el Laplaciano actúa en el dominio exterior Ω.

3.1. Planteamiento del problema. Si consideramos el problema de frontera (3) en el dominio exterior Ω en vez de en el dominio acotado D tendríamos que existen soluciones de este problema para todo $s \geq 0$ (por ejemplo, las llamadas *ondas planas perturbadas*); todas estas soluciones son acotadas e infinitamente diferenciables, pero ninguna de ellas es cuadrado integrable (e.g. [22]). No parece entonces inmediato el poder establecer un análogo de la función $N(\lambda)$ para esta situación: o bien se tienen soluciones para demasiados valores de s (soluciones acotadas) o bien no se tiene ninguna solución (soluciones cuadrado integrables).

Usando el lenguaje de teoría de operadores, la situación arriba mencionada se refleja en el hecho de que si definimos $-\Delta_e$ como el operador de Laplace actuando en el espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$ con dominio

$$D(-\Delta_e) = \{f \in H^2(\Omega) \mid Bf(x) = 0, x \in \partial\Omega\}, \tag{7}$$

entonces $-\Delta_e$ es un operador autoadjunto con espectro absolutamente continuo $\sigma(-\Delta_e) = [0, \infty)$. En la expresión (7), $H^2(\Omega)$ es el espacio de Sobolev $W_2^2(\Omega)$ de las funciones en $L^2(\Omega)$ tales que todas sus derivadas (en el sentido de distrubuciones) de orden menor o igual que 2 están también en $L^2(\Omega)$. Notamos que los eigenvalores $\{\lambda_j\}$ del problema (3) conforman el espectro del operador $-\Delta_i$ definido en la misma forma que $-\Delta_e$, pero tomando el dominio acotado D en lugar de Ω. En vista de esto, se puede entender el problema de buscar un análogo de $N(\lambda)$ para dominios exteriores, como el de buscar una medición de cómo es que va 'aumentando el espectro continuo' cuando λ crece.

Históricamente, una primera respuesta para esta pregunta fue dada por la teoría espectral; más concretamente por un objeto conocido como la *función espectral* de un operador autoadjunto. Esto es el tema del siguiente apartado.

3.2. La función espectral. De acuerdo con el teorema espectral (e.g. Teorema VIII.6 en [35]), dado un operador autoadjunto A actuando en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, para cada subconjunto $\mathcal{K}$ de los números reales corresponde una proyección ortogonal $P_{\mathcal{K}}(A)$ sobre cierto subespacio de $\mathcal{H}$. Estas proyecciones se conocen como *proyecciones espectrales*. En los casos particulares en los que el espectro es discreto, $P_{\mathcal{K}}(A)$ es la proyección sobre el subespacio formado por los eigenvectores correspondientes a los eigenvalores λ_j que estén en $\mathcal{K}$. A las proyecciones espectrales correspondientes a intervalos de la forma $(-\infty, s]$ se les suele denotar por $E_s(A)$.

Retomando el problema interno considerado en el apartado (2.1), observamos que la función $N(\lambda)$ de distribución de eigenvalores puede escribirse en términos de la base de eigenvectores $\{e_j\}$ del problema (3):

$$\begin{aligned} N(\lambda) &= \sum_{\lambda_j \leq \lambda^2} \int_D e_j(x)\overline{e_j(x)}dx \\ &= \int_D \sum_{\lambda_j \leq \lambda^2} e_j(x)\overline{e_j(x)}dx. \end{aligned} \tag{8}$$

Por otro lado, notamos que para cualquier $f \in L^2(D)$ se tiene que

$$\Big(E_s(-\Delta_i)\ f\Big)(x) = \int_D \left(\sum_{\lambda_j \leq s} e_j(x)\overline{e_j(y)} \right) f(y)\ dy. \tag{9}$$

Al kernel integral de las proyecciones espectrales $E_s(A)$, en el sentido de distribuciones, se le conoce como la *función espectral* del operador A y se le denota por $e_A(x, y; s)$. Las igualdades (8) y (9) nos dicen entonces que

$$N(\lambda) = \int_D e_{-\Delta_i}(x, x; \lambda^2)dx. \tag{10}$$

Tenemos pues, que la distribución de eigenvalores puede escribirse en términos de la función espectral. De hecho, desde la década de 1930's (ver e.g. [8], [13], [23]) es usual plantear la fórmula de Weyl en términos de la función espectral del operador de Laplace. Pues bien, la función espectral es un objeto que está definido para todo operador autoadjunto, y en particular para $-\Delta_e$, de forma que si estamos buscando análogos de la fórmula de Weyl (1) para dominios exteriores, resulta natural estudiar el comportamiento asintótico de la función espectral $e_{-\Delta_e}(x, x; s)$ cuando $s \to \infty$.

Resulta ser que para una gran diversidad de variedades diferenciales, que incluyen ambos dominios D y Ω, la función espectral de un operador elíptico P de orden $2m$ tiene el comportamiento asintótico

$$e_P(x, x; \lambda^{2m}) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\ \lambda^n + O(\lambda^{n-1}) \qquad \lambda \to \infty \tag{11}$$

uniformemente en compactos (ver [1] para el caso $m = 1$ y [16] para el caso general).

Observamos que, como consecuencia de (10), en el caso del operador de Laplace $-\Delta_i$, las fórmulas (11) y (1) son equivalentes, como se sigue de integrar (11) sobre D. En general y de la misma forma, para cualquier operador elíptico P de orden $2m$ actuando en D, se obtiene que el número de eigenvalores de P menores o iguales que

λ^{2m} es

$$N_P(\lambda) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \,\mathrm{Vol}(D)\; \lambda^n + o(\lambda^n), \qquad \lambda \to \infty$$

lo que nos da una generalización de la fórmula de Weyl para operadores elípticos en dominios acotados.

A diferencia de esto, para dominios no acotados no es posible simplemente integrar (11) sobre el dominio, ya que nada garantiza la convergencia de la integral; y de cualquier forma, el comportamiento asintótico señalado es uniforme solamente en subconjuntos compactos. Tenemos pues, que el encontrar por medio de la función espectral análogos de $N(\lambda)$ para el espectro continuo queda, por lo pronto, en un buen intento. Más adelante, en la Sección 5 volveremos a considerar a la función espectral y a su relación con $N(\lambda)$.

4. La fase de dispersión

En 1971, Vladimir Buslaev anunció [6] la expansión asintótica

$$p(\lambda) \sim \sum_{i=0}^{\infty} a_i \lambda^{n-i}, \qquad \lambda \to \infty \tag{12}$$

donde el primer coeficiente a_0 era proporcional al volumen de $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Acá, $p(\lambda)$ es un objeto conocido como la *fase de dispersión* para el par de operadores $\{-\Delta_e, -\Delta_0\}$. La fase de dispersión es un objeto ligado al espectro continuo de los operadores, de forma que (12) sugiere que $p(\lambda)$ podría ser considerado como un análogo de $N(\lambda)$ para el problema exterior. En esta sección introduciremos este objeto y sus fórmulas asintóticas.

4.1. La teoría de la dispersión. La fase de dispersión $p(\lambda)$ es un objeto que surge en la *teoría de la dispersión*. Esta es una teoría matemática muy amplia y muy desarrollada, que fue motivada originalmente por la mecánica cuántica y sobre la que han tenido notable incidencia también otras áreas de la física, como óptica, acústica y elasticidad. Existen, además, diversos enfoques de esta teoría. A primera vista, estos enfoques no parecen tener mucho que ver unos con otros, pero en realidad están profundamente interconectados. Por todo esto, no podemos ofrecer acá más que una muy corta y escueta introducción de la teoría de la dispersión, siendo el objetivo central el de presentar a la fase de dispersión $p(\lambda)$, que resulta ser el análogo de $N(\lambda)$ para dominios exteriores. Referimos a los libros [36] y [42], y a las numerosas referencias contenidas ahí, para una introducción más en forma sobre el tema.

En la teoría de la dispersión se comparan dos sistemas: un sistema *libre* y un sistema *perturbado*; cada uno de estos sistemas tiene asociado un operador autoadjunto. En nuestro ejemplo, al sistema libre corresponde el operador $-\Delta_0$ (el operador de Laplace actuando en todo $L^2(\mathbb{R}^n)$) y al sistema perturbado corresponde el operador $-\Delta_e$ (el operador de Laplace en $L^2(\Omega)$ sujeto a condiciones de frontera).

De acuerdo al teorema espectral y al teorema de Stone (e.g. Teoremas VIII.5 y VIII.7 en [35]), a cada operador autoadjunto A en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ corresponde una colección de operadores unitarios, parametrizados por una variable real t, y denotados por

$$U_A(t) = e^{-iAt}.$$

En cierta forma, los operadores e^{-iAt} tienen propiedades análogas a las de las funciones e^{-ixt}, donde la multiplicación de funciones jugaría el papel de la composición de operadores y la norma L^∞ tomaría el papel de la norma usual de operadores. Más precisamente (e.g. [35]):

a) $U_A(t+s) = U_A(t)U_A(s)$, para todo $s, t \in \mathbb{R}$.
b) U es fuertemente continuo, es decir que si $t \to t_0$, entonces $U_A(t)\varphi \to U_A(t_0)\varphi$ en $\mathcal{H}$ para todo $\varphi \in \mathcal{H}$.
c) Para todo $\psi \in D(A)$, se tiene

$$\lim_{t\to 0} \frac{U_A(t)\psi - \psi}{t} = iA\psi. \tag{13}$$

e) El límite en el lado izquierdo de (13) existe, si y sólo si $\psi \in D(A)$.

Introducimos un *operador de identificación*

$$\mathcal{J}_\rho : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\Omega),$$

dado por multiplicación por una función ρ de clase C^∞ que es igual a cero en una vecindad del obstáculo e igual a uno en una vecindad de infinito.

Definimos, para nuestro caso, los *operadores de onda* $W_\pm$ dados por

$$W_\pm : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\Omega)$$

$$W_\pm f_0 = \lim_{t\to\pm\infty} e^{i\Delta_e t}\mathcal{J}_\rho e^{-i\Delta_0 t} f_0. \tag{14}$$

Ambos límites en (14) existen para toda $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$; más aún, $W_\pm$ son ambos operadores unitarios del espacio libre sobre el espacio perturbado (e.g. [17]). Este hecho es de importancia crucial en la teoría de dispersiones (cf [36]).

Observamos que, para todo $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, si

$$W_\pm f_0 = f_\pm,$$

entonces se tiene

$$\lim_{t\to\pm\infty} \left\| \mathcal{J}_\rho e^{-it\Delta_0} f_0 - e^{-it\Delta_e} f_\pm \right\| = 0.$$

Esto es, f_+ es el único elemento en $L^2(\Omega)$ que, bajo el sistema perturbado, se comporta en el futuro distante como f_0 bajo el sistema libre. Similarmente, f_- es el único elemento en $L^2(\Omega)$ que se comporta como f_0 en el pasado distante.

También es importante recalcar que los operadores $W_\pm$ definidos en (14) no dependen de la elección de la función ρ; esto se debe a un fenómeno conocido como el *decaimiento de energía local* de las ondas acústicas (e.g. [22]).

El objeto fundamental de la teoría de dispersiones, conocido como el *operador de dispersión* definido por

$$S = W_+^* W_-$$

es un operador unitario en $L^2(\mathbb{R}^n)$. El operador de dispersión determina de forma única el obstáculo $\mathcal{O}$ (e.g. [22]).

Descomponemos el espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$ en una infinidad de copias, cada vez más grandes, de $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ mediante la integral directa

$$L^2(\mathbb{R}^n) \leftrightarrow \int_0^\infty \bigoplus L^2(\mathbb{S}^{n-1})\ \lambda^{n-1} d\lambda$$

de forma que el operador de dispersión se descompone en la forma

$$S \leftrightarrow \int_0^\infty \bigoplus \mathcal{S}(\lambda)\ \lambda^{n-1} d\lambda$$

donde, para cada $\lambda > 0$, $\mathcal{S}(\lambda)$ es un operador unitario en $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$. A la función $\mathcal{S}(\,\cdot\,)$ (que toma como valores a operadores) se le conoce como la *matriz de dispersión* del par $\{-\Delta_0, -\Delta_e\}$.

Para cada $\lambda > 0$ la matriz de dispersión es una perturbación de clase traza de la identidad en $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$, por lo que su determinante está definido. El determinante de $\mathcal{S}(\lambda)$ resulta ser, además, una función continua en λ (e.g. [19]). Definimos la *fase de dispersión* $p(\lambda)$ como una función continua de valores reales tal que cumpla la igualdad

$$\det\ \mathcal{S}(\lambda) = e^{i\pi p(\lambda)}.$$

Desde luego, $p(\lambda)$ está definida módulo la suma de un número entero; de cualquier forma, para efectos de los primeros términos en la expansión asintótica (12) de $p(\lambda)$, la elección de el número entero es irrelevante, puesto que $p(\lambda)$ crece en el orden de λ^n.

4.2. Historia. Dominios exteriores. Como mencionamos al principio de esta sección, Buslaev anunció en 1971 la expansión (12) para la fase de dispersión del par $\{-\Delta_0, -\Delta_e\}$; sin embargo, y hasta donde tenemos conocimiento, Buslaev nunca publicó una prueba completa de este resultado. Algunos años más tarde, Andrew

Majda y James Ralston demostraron, en la serie de tres artículos [25], que para el caso en el que $\mathcal{O}$ es convexo se tiene la fórmula asintótica

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \frac{2\omega_n}{(2\pi)^n}\ \mathrm{Vol}(\mathcal{O})\ \lambda^n + \frac{2\omega_{n-1}}{(2\pi)^{n-1}}\ \mathrm{Vol}(\partial\Omega)\ \lambda^{n-1} + h_n(\partial\Omega)\ \lambda^{n-2} \\ &+ O(\lambda^{n-3}). \qquad\qquad \lambda \to \infty. \end{aligned}$$

Acá, h_n es una función determinada por la curvatura de la frontera. Aproximadamente al mismo tiempo, Arne Jensen y Tosio Kato consiguieron (en [19]) el primer término en la expansión para el caso en el que el obstáculo $\mathcal{O}$ es un conjunto de tipo-estrella. En 1982 Vesselin Petkov y Georgi Popov obtuvieron (en [34]) el segundo término en la expansión para el caso en el que $\mathcal{O}$ es un dominio no-atrayente.

El resultado general de lo que podemos llamar el ánalogo de la fórmula de Weyl para dominios exteriores, es decir de la fórmula asintótica

$$p(\lambda) = \frac{2\omega_n}{(2\pi)^n}\ \mathrm{Vol}(\mathcal{O})\ \lambda^n + O(\lambda^{n-1}) \qquad\qquad \lambda \to \infty$$

para obstáculos arbitrarios, fue obtenido por Melrose en 1988 [28] en el caso cuando el espacio es de dimensión impar y más recientemente por D. Robert para dimensión arbitraria ([37]). A partir de entonces se han publicado numerosas generalizaciones a situaciones no-Euclideanas (por ejemplo y entre muchos otros [9], [29], [33], [15], [32]), así como resultados análogos para otros operadores diferenciales (por ejemplo, [7], [5]).

5. La función de desplazamiento espectral

Parece natural preguntarse si existe alguna relación entre las funciones $p(\lambda)$ y $N(\lambda)$ más allá de la sorprendente similitud entre sus comportamientos asintóticos. Esta pregunta se la plantearon Majda y Ralston en el primero de sus tres artículos [25] e intentaron explicar la relación, tratando de probar que de alguna forma $p(\lambda)$ cuenta los 'eigenvalores salientes' de la teoría de Lax-Phillips (cf [22]) que yacen en ciertos dominios apropiados a elegir; sin embargo, ellos mismos refieren en la conclusión de ese artículo que encontrar los dominios adecuados 'resulta desesperanzadoramente difícil en este punto.'

Una forma que ha resultado notablemente más efectiva para mostrar la existencia de una verdadera analogía entre $p(\lambda)$ y $N(\lambda)$ aparece mediante una función, denotada por $\xi(\lambda)$, y conocida como la *función de desplazamiento espectral* de Lifshits-Kreĭn.

La función $\xi(\lambda)$ fue introducida por el físico teórico I.M. Lifshits en 1952 ([24]) para perturbaciones de rango finito, y extendida a casos más generales por M.G. Kreĭn, quien sentó las bases matemáticas de la teoría de la función de desplazamiento espectral; para una exposición detallada de esta teoría referimos a [4].

Resulta ser, que dados dos operadores autoadjuntos H y H_0 donde el primero es una perturbación del segundo, si esta perturbación no es 'demasiado grande' en cierto sentido (por ejemplo, es suficiente que la diferencia de sus resolventes en un punto tenga traza finita), entonces existe una única función con valores reales $\xi(\lambda)$ tal que para toda φ en cierta clase de funciones (que va a ser mayor cuanto menor sea la perturbación) se tiene la igualdad

$$\text{Traza}\big(\varphi(H) - \varphi(H_0)\big) = \int_{\mathbb{R}} \varphi'(\lambda)\xi(\lambda)d\lambda. \tag{15}$$

A la función $\xi(\lambda)$ se le conoce como la función de desplazamiento espectral para el par de operadores $\{H, H_0\}$.

De cierto modo, la función de desplazamiento espectral describe cambios en el espectro bajo perturbaciones; esto puede ilustrarse más fácilmente en el caso en el que el espectro es discreto:

Sea ρ una función $C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\rho(x) = 1$ para $x \leq -1$ y $\rho(x) = 0$ para $x \geq 0$. Para $\epsilon > 0$, definimos $\rho_\epsilon(x) = \rho(x/\epsilon)$. Estas funciones ρ_ϵ están dentro de la clase de funciones φ que satisfacen (15) en una gran generalidad de situaciones (ver e.g. [3]).

Tenemos entonces que para $\mu \in \mathbb{R}$

$$\text{Traza}\big(\rho_\epsilon(H-\mu) - \rho_\epsilon(H_0-\mu)\big) = \int_{-\epsilon}^{0} \rho_\epsilon'(\lambda)\xi(\lambda)d\lambda$$

y haciendo $\epsilon \to 0$ resulta que

$$-\xi(\mu) = \lim_{\epsilon\to 0} \ \text{Traza}\big(\rho_\epsilon(H-\mu) - \rho_\epsilon(H_0-\mu)\big). \tag{16}$$

Supongamos ahora que el espectro del operador H no intersecta el intervalo $[a, b]$ y que el espectro de H_0 dentro de $[a, b]$ consta de solamente un eigenvalor λ con multiplicidad N.

Entonces, si ϵ es suficientemente pequeño:

$$\begin{aligned}
\text{Traza}\big(\rho_\epsilon(H_0-b) - \rho_\epsilon(H-b)\big) &= \text{Traza}\big(E_{b-\epsilon}(H_0) - E_{b-\epsilon}(H)\big) \\
&= \text{Traza}\big(E_a(H_0) - E_a(H) + E_\lambda(H_0)\big) \\
&= \text{Traza}\big(E_a(H_0) - E_a(H)\big) + N \\
&= \xi(a) + N.
\end{aligned}$$

Tenemos pues, que ξ crece en cada eigenvalor de H_0 por la multiplicidad del eigenvalor; de forma similar se puede ver que ξ decrece en los eigenvalores de H; esto es, la función de salto espectral es una función que en cierta forma 'cuenta eigenvalores'.

Por otra parte, un resultado conocido como la *fórmula de Birman-Kreĭn* establece, para el caso en que los espectros de H y de H_0 son absolutamente continuos, la a-priori sorprendente relación siguiente entre la función de desplazamiento espectral y la matriz de dispersión:

$$\det\ \mathcal{S}(\lambda) = e^{2\pi\xi(\lambda)}. \tag{17}$$

Es decir, cuando el espectro es absolutamente continuo, ξ es igual a la fase de dispersión módulo elección apropiada de un entero. La fórmula (17) fue probada por Mikhail Sh. Birman y Mark G. Kreĭn ([2]) en una gran diversidad de situaciones, que incluyen perturbaciones de traza finita. De todo esto, vemos que ξ es una función que donde se encuentra espectro discreto cuenta eigenvalores y donde se encuentra espectro absolutamente continuo es igual a la fase de dispersión.

Jensen y Kato plantearon el problema de encontrar fórmulas asintóticas para la fase de disperción $p(\lambda)$ en términos de la teoría de Birman-Kreĭn. En [19] demostraron la existencia de la función de desplazamiento espectral para el par de operadores $-\Delta_e, -\Delta_0$. De forma más precisa, probaron la existencia de una función ξ tal que

$$\text{Traza}\big(r\varphi(H)r^* - \varphi(H_0)\big) = \int_{\mathbb{R}} \varphi'(\lambda)\xi(\lambda)d\lambda, \tag{18}$$

donde r es la restricción a Ω:

$$\begin{array}{rcll} r : L^2(\mathbb{R}^n) & \to & L^2(\Omega) & \\ (rf)(x) & = & f(x), & \forall x \in \Omega. \end{array}$$

Habiendo establecido esto, y usando la teoría de Birman-Kreĭn pudieron concluir que $\xi(\lambda)$ y $p(\lambda)$ eran el mismo objeto.

Para terminar con esta exposición, hacemos notar que de la fórmula (18) es posible deducir formalmente una muy interesante relación entre la función de salto espectral y la función espectral:

$$\begin{aligned} \Big(\int_\Omega e_H(x,x;\lambda) - e_{H_0}(x,x;\lambda)\Big)\ dx &= \text{Traza}\big(E_\lambda(H) - E_\lambda(H_0)\big) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \chi'_{(-\infty,\lambda)}(s)\xi(s)\ ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \delta(\lambda - s)\xi(s)\ ds \\ &= \xi(\lambda). \end{aligned}$$

Referencias

[1] V.G. Avakumovic, *Uber die Eigenfunktionen auf geschlossenen Riemansche Mannigfaltigkeiten*, Math. Zeit. **65** (1965), 627–663.

[2] M.Sh. Birman, M.G. Kreĭn, *On the theory of wave operators and scattering operators*, Doklady Akad. Nauk. SSSR **144** (1962) 475–478.

[3] M.Sh. Birman, A. Pushnitski, *The spectral shift function: amazing and multifaceted. Dedicated to the memory of Mark Grigorevich Kreĭn*, Integral Eq. Operator Theory **30** (1998), no. 2, 191–199.

[4] M.Sh. Birman, D.R. Yafaev, *The spectral-shift function. The work of M.G. Kreĭn and its further development*, St.Petersburg Math. J. **4** (1993), no. 5, 833-869.

[5] N. Bruneau, *Asymptotique de la phase de diffusion à haute énergie pour l'opérateur de Dirac*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **7** (1998), no. 2, 207–231.

[6] V.S. Buslaev, *Scattered plane waves, spectral asymptotics and trace formulae in exterior problems*, Doklady Akad. Nauk. SSSR **197** (1971) 999–1002.

[7] F. Cardoso, G. Vodev, *Asymptotic behaviour for the scattering phase in linear elasticity for a strictly convex body*, Comm. in PDE's **22** (1997), no. 11–12, 2025–2049.

[8] T. Carleman, *Proprietés asymptotiques des fonctions fondamentales des membtanes vibrantes*, C.R. 8éme Congr. des Math. Scand. Stockhom (1934), 34–44.

[9] T. Christiansen, *Weyl asymptotics for the Laplacian on asymptotically Euclidean spaces*, American J. of Math. **121** (1999), no. 1, 1–22.

[10] R. Courant, *Uber die Eigenwerte bei den Differential gleichungen der mathematischen Physik*, Math. Zeit. **7** (1920), 1–57.

[11] R.Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics I, II*, John Wiley & Sons 1989.

[12] V.B. Fedosov, *Asymptotic formulas for the eigenvalues of the Laplace operator for a polyhedron*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **157** (1954), 536–538.

[13] L. Gårding, *On the asymptotic distribution of the eigenvalues and eigenfunctions of elliptic differential operators*, Math. Scand. **1** (1953), 237–255.

[14] C. Gordon, D. Webb, S. Wolpert, *One cannot hear the shape of a drum*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **27** (1992), no. 1, 134–138.

[15] L. Guillopé, M. Zworski, *Scattering asymptotics for Riemannian surfaces*, Annals of Math. (2) **145** (1997), no. 3, 597–660.

[16] L. Hörmander, *The spectral function of an elliptic operator*, Acta Math. **121** (1968) 193-218.

[17] T. Ikebe, *Scattering for the Schrödinger operator in an exterior domain*, J. of Math. of Kyoto University **7** (1967), 93-112.

[18] V.J. Ivriĭ, *The second term of the spectral asymptotics for a Laplace-Beltrami operator on manifolds with boundary*, Funktsionalnyĭ Analiz i ego Prilozheniya **14** (1980), no. 2, 25–34. Traducción inglesa en Functional Analysis and Appl. **14** (1980), no. 2, 98–106.

[19] A. Jensen, T. Kato, *Asymptotic behavior of the scattering phase for exterior domains*, Comm. in Partial Differential Equations **3** (1978), no. 12, 1165–1195.

[20] M. Kac, *Can one hear the shape of a drum?*, American Math. Monthly **73** (1966), 1–23.

[21] M.G. Kreĭn, *On the trace formula in perturbation theory*, Mat. Sbornik N. S. **33** (**75**) (1953), 597–626 (Russian).

[22] P. Lax, R. Phillips, *Scattering Theory*, Academic Press, San Diego, CA, Revised Edition 1990

[23] B.M. Levitan, *On the asymptotic behavior of the spectral function and the eigenfunction expansion of selfafjoint differential equations of the second order I, II*, Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat, **16** (1952), 325–352; ibidem **19** (1955), 33–58.

[24] I.M. Lifshits, *On a problem in perturbation theory*, Uspekhi Mat. Nauk. **7** (1952), no 1 (47), 171–180.

[25] A. Majda, J. Ralston, *An analogue of Weyl's theorem for unbounded domains I, II, III*, Duke Math. J. **45** (1978), no. 1, 183–196; ibidem **45** (1978), no. 3, 513–536; ibidem **46** (1979), no. 4, 725–731.

[26] H.P. McKean, I.M. Singer, *Curvature and the eigenvalues of the Laplacian*, J. Diff. Geometry **1** (1967), 43–69.

[27] R. Melrose, *Weyl's conjecture for manifolds with concave boundary*, Geometry of the Laplace operator (Proc. Sympos. Pure Math., Univ. Hawaii, Honolulu, Hawaii), Proc. Sympos. Pure Math. **37** AMS (1979), 257–274.Providence, R.I., 1980.

[28] R. Melrose, *Weyl asymptotics for the phase of obstacle scattering*, Comm. in Partial Differential Equations **13** (1988), no. 11, 1431–1439.

[29] R. Melrose, M. Zworski, *Scattering metrics and geodesic flows at infinity*, Invent. Math. **124** (1996), no 1–3, 389–436.

[30] J. Milnor, *Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds*, Proc. Nat. Acad. Sciences, **51** (1964), 542.

[31] S. Minakshidundaram, Å. Pleijel, *Some properties of the eigenfunctions of the Laplace operator on Riemannian manifolds*, Canadian J. Math. **1** (1949), 242-256.

[32] W. Müller, *Manifolds with Cusps of Rank One. Spectral Theory and L^2-index Theory.* Lecture Notes in Mathematics 1244. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[33] L. Parnovski, *Scattering matrix for manifolds with conical ends*, J. of the London Math. Society **61** (2000), no. 2, 555–567.

[34] V. Petkov, G. Popov, *Asymptotic behaviour of the scattering phase for nontrapping obstacles*, Annales de l'Institut Fourier (Grenoble) **32** (1982), no. 3, vi, 111–149.

[35] M. Reed, B. Simon, *Methods in Modern Mathematical Physics, Vol. 1: Functional Analysis*, Academic Press, New York - London 1972.

[36] M. Reed, B. Simon, *Methods in Modern Mathematical Physics, Vol. 3: Scattering Theory*, Academic Press, New York-London 1979.

[37] D. Robert, *Sur la formule de Weyl pour des ouverts non bornés*, C. R. des Séances de l'Acad. des Séances. Série I. Mathématique **319** (1994), no. 1, 29–34.

[38] Y. Safarov, D. Vassiliev, *The Asymptotic Distribution of Eigenvalues of Partial Differential Operators*, Translated from the Russian manuscript by the authors. AMS Translations of Mathematical Monographs 155. Providence 1997.

[39] R. Seeley, *An estimate near the boundary for the spectral function for the Laplace operator*, American Journal of Mathematics **102** (1980), no. 5, 869–902.

[40] G.N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press 1995.

[41] H. Weyl, *Das Asymptotische Verteilungsgetz der Eigenwerte linear partieller Differentialgleichungen*, Math. Ann. **71** (1911), 441–469.

[42] D.R. Yafaev, *Mathematical Scattering Theory: General Theory*, American Mathematical Society Translations of Mathematical Monographs, Vol. 105, Providence 1992.

[43] S. Zelditch, *Spectral determination of analytic bi-axisymmetric plane domains*, Geom. Funct. Anal. **10** (2000), no. 3, 628–677.

Centro de Investigación en Matemáticas, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Carretera Pachuca-Tulancingo km 4.5, CP 42074 Municipio de Mineral de la Reforma, Hidalgo

E-mail address: fmclara@uaeh.reduaeh.mx