Modelo Black-Scholes-Merton, para la toma de decisiones financieras.

M. E. Danae Duana Ávila. Profesor en la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. Correo electrónico: duananos@yahoo.com.mx. Plan de Agua Prieta ·66, colonia Plutarco Elías Calles, C.P. 11340 México D.F.

.

Lic. César Gabriel Millán Díaz. Licenciado en Matemáticas Aplicadas, con especialidad en Economía, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. Correo electrónico: millan.diaz@gmail.com. Carretera Pachuca Tulancingo K.m. 4.5 Pachuca Hidalgo.

Resumen

En la actualidad, la rapidez y la variabilidad en las finanzas, obligan a buscar mecanismos que permitan predecir los resultados y se facilite la toma de decisiones. Este trabajo tiene como propósito hacer una presentación, sin caer en excesivos formalismos matemáticos, pero con fidelidad histórica y suficiente profundidad conceptual, de un modelo de valoración de derivados financieros, conocido en el ámbito financiero como el modelo de Black-Scholes-Merton, como uno de los modelos matemáticos más utilizados en la toma de decisiones financieras a nivel mundial.

Palabras clave: Precio de la opción, Incertidumbre, Riesgo, Rentabilidad, Dividendos, Volatilidad y Derivado.

Abstract

At present, speed and variability in finance, forced to seek mechanisms to predict the outcome and facilitate decision making. This work aims to make a presentation, without falling into excessive mathematical formalisms, but with enough conceptual depth and historical fidelity, of a model for valuation of financial derivatives, known in the financial field as the Black-Scholes-Merton model, as one of the most mathematical models used in making financial decisions globally.

Keywords: Price of the option, Uncertainty, Risk, Profitability, Dividends, Volatility and Derivatives.

Iintroducción

En 1973 Fisher Black, Myron Scholes y Robert Merton lograron uno de los mayores avances en la valuación de opciones hasta ese momento, conocido como el modelo de Black-Scholes, que ha tenido una gran influencia en la manera en que los agentes valúan y cubren opciones. Ha sido también un punto de referencia para el desarrollo y éxito de la ingeniería financiera desde entonces. La importancia del modelo fue reconocida cuando Robert Merton y Myron Acholes fueron premiados con el Premio Nobel de Economía; desafortunadamente Fisher Black falleció en 1995, quien indudablemente también hubiera recibido el premio.

Aunque actualmente se utiliza en el mundo una gama de derivados financieros y múltiples combinaciones entre ellos, los derivados básicos, y más conocidos, siguen siendo las opciones, los forwards, los futuros y los swaps.

En este trabajo presentamos el modelo de Black-Scholes para la valuación de una opción call Europea sin pago de dividendos. En primer lugar se mencionan algunas nociones de finanzas y probabilidad, necesarias para una mejor comprensión del trabajo; posteriormente se presenta un modelo para el precio de un activo, el cual será necesario para poder formular el modelo para un opción en particular; posteriormente se presentan los supuestos y las ideas generales de su deducción y solución en este caso, transformándolo en un problema clásico en Física, conocido como la ecuación del calor; por último se analiza brevemente la fórmula que brinda su solución, en algunos casos extremos dados por las condiciones de frontera de la ecuación diferencial, así como el estudio de la variación del precio de la opción con respecto al precio del activo.

I. Nociones básicas

Finanzas

Llamaremos *activo* a cualquier posesión que pueda producir beneficios económicos. Un *portafolio* es un conjunto de activos, que pueden ser acciones, derivados, bonos, etc.

En la realidad existen costos para realizar operaciones financieras. Estos *costos de transacción* pueden depender de si se trata de una transacción de un activo subyacente o un derivado, de si se trata de una compra o de una venta, etc.

También se usará la llamada *tasa de interés libre de riesgo* que es aquella de una inversión "segura", libre de riesgo. Esto en la práctica no es del todo errado, ya que si se analizan activos y derivados en cortos períodos de tiempo (por ejemplo trimestres), entonces un bono del Estado a veinte años resulta una inversión segura, y hasta es razonable suponer constante la tasa de ese bono en el corto plazo.

Se llama *rentabilidad* a la ganancia relativa de una inversión, es decir, si llamamos S_0 a la inversión inicial, y S_T a lo que se obtiene a un tiempo T, la rentabilidad R es:

$$R = \frac{S_T - S_0}{S_0}$$

Otro concepto es el *arbitraje*, que es el proceso de comprar un bien en un mercado a un precio bajo y venderlo en otro a un precio más alto, con el fin de beneficiarse con la diferencia de precios. En el caso que nos ocupa, utilizaremos el principio de no arbitraje, es decir, no existe la posibilidad de realizar una inversión sin riesgo y ganar dinero (o por lo menos no más que invirtiendo con la tasa libre de riesgo). De no ser así, existiría claramente una forma de hacer dinero infinito.

Los *hedgers*, replicadores o cobertores son aquellos agentes que intentan reducir el riesgo al mínimo y tratan de no exponerse a los cambios adversos de los valores de los activos. En general conforman portafolios con activos en una posición (compra o venta) y algún derivado sobre éstos en la otra. Así, si el precio del activo se mueve de manera muy desfavorable, está la opción, por ejemplo, que amortigua la pérdida.

Un mercado *eficiente* se puede describir mediante dos conceptos:

- Toda la información del activo está reflejada en el precio actual.
- Los mercados responden inmediatamente a cualquier información nueva acerca de un activo.

Un *derivado financiero* o producto derivado, o simplemente derivado es un instrumento financiero cuyo valor depende de otros activos, como por ejemplo una acción, una opción o hasta de otro derivado. Se llama *payoff* de un derivado, activo o portafolio al resultado final de la inversión.

Una opción es un contrato que le da al dueño el derecho, pero no la obligación, de negociar un activo predeterminado, llamado también el activo subyacente por un precio determinado K llamado el *strike price* o precio de ejercicio en un tiempo en el futuro T, llamada *fecha de expiración*.

Una opción *call* da al dueño el derecho a comprar y una *put* el derecho a vender. La opción se llama *Europea* si sólo puede ser ejercida a tiempo T. Se llama *Americana* si puede ser ejercida a cualquier tiempo hasta la fecha de expiración. El payoff, de una call es $máx\{S_T - K,0\}$ ya que si $S_T > K$ se ejerce a K y se vende a S_T , lo que da una ganancia de $S_T - K$. En el otro caso la opción no se ejerce y el payoff es *0*. El de una put, análogamente es $máx\{K-S_T, 0\}$. El hecho de que uno tenga el derecho y no la obligación es lo que hace difícil la valuación de una opción.

La *volatilidad* del activo es la desviación estándar de la variación de crecimiento del precio.

Probabilidad.

Se conoce como *proceso estocástico* a un conjunto de variables aleatorias que dependen de un parámetro, por ejemplo el tiempo, es decir, $\{X(t) \mid t > 0\}$. Un proceso estocástico $Z(\cdot)$ se llama movimiento browniano o proceso de Wiener si:

1. $Z(0)=0$.
2. Para cualquier $t>0$ y $a>0$, $Z(t+a)-Z(t) \sim N(0,a)$.
3. Para cualquier $t>0$ y $a>0$, $Z(t+a)-Z(t)$ son independientes de $\{Z(s) \mid 0 < s < t\}$.

Un proceso de Wiener describe la evolución de una variable con distribución normal. La deriva del proceso es *0* y la varianza es *1* por unidad de tiempo. Esto significa que, si el valor de la variable es x_0 al tiempo *0*, entonces al tiempo *t* es normalmente distribuida con media x_0 y varianza *t*.

Un proceso generalizado de Wiener describe la evolución de una variable normalmente distribuida con una deriva de *a* y varianza b^2 por unidad de tiempo, donde *a* y *b* son constantes. Esto significa que si, como antes, el valor de la variable es x_0 al tiempo *0* entonces es normalmente distribuida con media $x_0 + at$ y varianza *bt* al tiempo *t*. Puede ser definido para una variable *X* en términos de un proceso de Wiener *Z* como

$$dX = adt + bdZ.$$

Un teorema del cálculo estocástico, que será fundamental para la deducción de la Ecuación de Black-Scholes es el siguiente:

Teorema 1. **(Lema de Îto.)** *Supongamos que S cumple la siguiente ecuación diferencial estocástica:*

$$dS = S\mu dt + S\sigma dZ$$

donde Z(t) es un movimiento browniano. Sea V una función de dos variables que toma valores reales de clase C^2 *en su dominio, dada por V = V(S,t). Entonces se satisface lo siguiente:*

$$dV = \left(\sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dZ\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt. \tag{1}$$

II. Un modelo para el precio de un activo

En cuanto al precio de un activo, modelaremos la llegada de nueva información que lo afecte, bajo el supuesto de que trabajamos en un mercado eficiente, considerando dicho precio como un proceso estocástico.

El cambio absoluto en el precio del activo no es significativo, sin embargo, si lo es el retorno, que como ya se ha definido, es el cambio sobre el precio original:

$$R = \frac{S_T - S_0}{S_0}$$

Supongamos ahora que en un tiempo *t* el precio de un activo es *S*, consideremos un tiempo posterior *t+dt*, en el cual *S* cambia a *S+dS*. El retorno de un activo es entonces *dS/S.* El modelo más común para modelar este retorno se descompone en dos partes.

Una parte es el retorno determinista similar al retorno libre de riesgo. Esta contribución la podemos plantear como

$$\mu dt$$

donde μ es una medida del crecimiento promedio del precio del activo.

La otra parte modela la aleatoriedad en el cambio del precio de S, en respuesta a los cambios externos, como noticias inesperadas. Se representa como un muestreo aleatorio obtenido de una distribución normal con media 0 y agrega al retorno el término

$$\sigma dX$$

donde σ es la volatilidad, que mide la desviación estándar de los retornos y dX es un movimiento browniano.

Juntando los dos términos, obtenemos la ecuación diferencial estocástica:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dX. \tag{2}$$

Hay que notar que de no existir el segundo término, cuando $\sigma=0$, tendríamos la ecuación

$$\frac{dS}{S} = \mu dt$$

que da como solución el crecimiento exponencial en el valor del activo

$$S(t) = S_0 e^{\mu(t-t_0)}$$

donde S_0 es el precio inicial y t_0 es el tiempo inicial.

Ahora usaremos el Lema de Îto para deducir el proceso seguido por *ln(S)* cuando satisface la ecuación (2). Definamos

$$V(S,t) = \ln S,$$

con lo que se obtienen las derivadas

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Como suponemos que *V* satisface el Lema de Îto, entonces

$$dV = S\sigma\frac{1}{S}dZ + \left(\mu S\frac{1}{S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{1}{S^2}\right)dt = \sigma dZ + (\mu - \sigma^2/2)dt$$

con μ y σ constantes, por lo que esta ecuación indica que *V=ln(S)* sigue un proceso de Wiener generalizado con tasa de deriva μ-σ^2/2 y varianza σ^2, ambas constantes. El cambio en *ln(S)* entre el tiempo cero y el tiempo *T* es**,** por lo tanto, una distribución

normal con media

$$(\mu - \sigma^2/2)\,T$$

y varianza

$$\sigma^2 T.$$

Esto significa que

$$\ln S_T \sim N\left(\ln S_0 + (\mu - \sigma^2/2)\,T, \sigma^2 T\right)$$

donde S_T es el precio del activo en un tiempo futuro *T* y S_0 es el precio inicial del activo. Esta ecuación nos muestra que *ln*(S_T) tiene distribución normal. Una variable tiene distribución lognormal si el logaritmo natural de esta variable está normalmente distribuido.

III. Deducción de la Ecuación de Black-Scholes-Merton

Ahora veremos la ecuación que modela cualquier derivado financiero en la forma continua. Enunciaremos los supuestos que vamos a requerir en el modelo:

- El precio de un activo sigue un proceso de Wiener log-normal:

$$dS = S\mu dt + S\sigma dZ$$

- La tasa de interés libre de riesgo *r* y la volatilidad σ del activo se suponen constantes durante el tiempo que dura la opción.
- No hay costos de transacción asociados a la cobertura del portafolio.
- El activo subyacente no paga dividendos durante la vida de la opción.
- No hay posibilidad de arbitraje. La ausencia de arbitraje significa que todos los portafolios libres de riesgo deben tener el mismo retorno.
- La compra y venta del activo puede tomar lugar continuamente.
- La venta y los activos son divisibles. Asumimos que podemos comprar y vender cualquier número (no necesariamente entero) del activo subyacente y que está permitido vender aunque no tengamos posesión; es decir, se trata de un mercado completo.

Sea *V(S,t)* el valor de un derivado estilo europeo, en el instante *t* cuando el precio del activo subyacente es *S > 0*. Construiremos un portafolio P libre de riesgo de la siguiente manera

$$\mathbb{P} = \begin{cases} \Delta \ unidades \ del \ activo & (compra) \\ 1 \ derivado & (venta) \end{cases}$$

cuyo valor es $\Pi_u=\Delta S_u-V_u$ cuando el valor del activo sube, y $\Pi_d=\Delta S_d-V_d$ cuando el valor del activo baja. La estrategia es igualar Π_u a Π_d; es decir, encontraremos un Δ tal que el portafolio tenga riesgo *0*. Entonces, al igualar nos queda

$$\Delta S_u - V_u = \Delta S_d - V_d,$$

es decir,

$$\Delta = \frac{V_u - V_d}{S_u - S_d} = \frac{\delta V}{\delta S},$$

lo que tomando el límite cuando δS tiende a *0* resulta

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S},$$

que es la variación del valor del derivado con respecto a *S* y es una medida de correlación entre los movimientos del derivado y los del activo subyacente.

En general, el valor del portafolio es $\Pi=\Delta S-V$, con lo cual

$$d\Pi = \Delta dS - dV = \Delta(S\mu dt + S\sigma dZ) - dV.$$

Suponemos que *V* también cumple los supuestos enunciados anteriormente, por lo que satisface las hipótesis del Lema de Îto, así que tenemos una expresión para *dV* de (1):

$$dV = \left(\sigma S\frac{\partial V}{\partial S}dZ\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt,$$

de donde obtenemos la ecuación

$$d\Pi = \Delta S\mu dt + \Delta S\sigma dZ - \left(\sigma S\frac{\partial V}{\partial S}dZ\right) - \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt.$$

Separando la parte determinística de la estocástica resulta

$$d\Pi = \left(\Delta\sigma S - \sigma S\frac{\partial V}{\partial S}\right)dZ + \left(\Delta\mu S - \frac{\partial V}{\partial t} - \mu S\frac{\partial V}{\partial S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt,$$

y sustituyendo $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ obtenido anteriormente, la ecuación queda únicamente determinística

$$d\Pi = -\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt. \tag{3}$$

Además, por la hipótesis de no arbitraje, como P es un portafolio libre de riesgo tenemos que su retorno es igual al de un bono de tasa *r*

$$\frac{d\Pi}{\Pi} = rdt \Rightarrow d\Pi = \Pi r dt. \tag{4}$$

Igualando (3) y (4) llegamos a

$$\Pi r dt = -\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt.$$

Simplificando *dt* y sustituyendo $\Pi = \Delta S - V = \frac{\partial V}{\partial S}S - V$, nos queda

$$\frac{\partial V}{\partial S}Sr - Vr = -\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}.$$

Finalmente, despejando *rV*, llegamos a la ecuación de Black-Scholes:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} = rV. \tag{5}$$

IV. Solución de la ecuación de Black-Scholes

Obtendremos la solución de la ecuación de Black-Scholes para el caso de una opción call europea sobre un activo de precio *S* con precio de ejercicio *K* y tiempo de expiración *T*. En este caso llamaremos *V*=*C*, la ecuación (5) resulta

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}+rS\frac{\partial C}{\partial S}-rC=0.$$

con las condiciones de frontera

$$C(0,t)=0, \qquad C(S,t)\sim S \quad si \quad S\to\infty$$

ya que cuando el precio del activo es nulo, también debe serlo el de la opción (es claro que no se va a ejercer). Y cuando el precio tiende a infinito *S-K* se va a aproximar a *S*. También recordemos la condición final, es decir, el payoff de la opción

$$C(S,T)=\text{máx}\{S-K,0\}.$$

Con todo lo anterior, podemos describir el modelo de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\ }+\dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2\dfrac{\partial^2 C}{\partial S^2}+rS\dfrac{\partial C}{\partial S}-rC=0. & S\in(0,\infty),\ t\in[0,T) \\ C(S,T)=\text{máx}\{S-K,0\} & S\in(0,\infty) \\ C(0,t)=0 & t\in[0,T) \\ C(S,t)\approx S & t\in[0,T),\quad S\to\infty \end{cases} \tag{6}$$

Nos concentraremos en las dos primeras ecuaciones de (6), pues posteriormente veremos que las últimas dos, que describen el comportamiento de *C* en los bordes, también se van a satisfacer. Entonces nuestro modelo queda como sigue:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2\dfrac{\partial^2 C}{\partial S^2}+rS\dfrac{\partial C}{\partial S}-rC=0. & S\in(0,\infty),\ t\in[0,T) \\ C(S,T)=\text{máx}\{S-K,0\} & S\in(0,\infty) \end{cases} \tag{7}$$

Para resolver esta ecuación, hagamos primero los cambios de variables

$$x = \ln\frac{S}{K}, \qquad \tau(t) = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t), \qquad v(x,\tau) = \frac{C(S,t)}{K},$$

es decir

$$S = Ke^x, \qquad t = T - \frac{2\tau(t)}{\sigma^2}, \qquad C(S,t) = Kv(x,\tau).$$

Reemplazando, las derivadas parciales quedan:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma^2 K\frac{\partial v}{\partial \tau}, \qquad \frac{\partial C}{\partial S} = \frac{K}{S}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{K}{S^2}\left(-\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right).$$

Como $\sigma(T)=0$, también tenemos una condición inicial para v a partir de la condición final de C:

$$C(S,T) = Kv(x,0) = \text{máx}\{Ke^x - K, 0\} \Rightarrow v(x,0) = \text{máx}\{e^x - 1, 0\}$$

que resulta una condición inicial. El modelo (7) queda como

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial v}{\partial \tau} = -\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + r\frac{\partial v}{\partial x} - rv & x \in \mathbb{R}, \quad \tau \in [0, T\sigma^2/2) \\ v(x,0) = \text{máx}\{e^x - 1, 0\} & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

y si llamamos $k = \frac{2r}{\sigma^2}$ el modelo queda como

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1)\frac{\partial v}{\partial x} - kv & x \in \mathbb{R}, \quad \tau \in [0, T\sigma^2/2) \\ v(x,0) = \text{máx}\{e^x - 1, 0\} & x \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad (8)$$

Hagamos un último cambio de variables. Proponemos

$$v(x,\tau) = e^{\alpha x + \beta\tau}u(x,\tau)$$

con α y β parámetros a determinar. Las derivadas parciales de v resultan

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \alpha e^{\alpha x+\beta\tau} u + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial \tau} = \beta e^{\alpha x+\beta\tau} u + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial \tau},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \alpha^2 e^{\alpha x+\beta\tau} u + 2\alpha e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial x} + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

sustituyéndolas en la primera ecuación de (8) y simplificando el término $e^{\alpha x+\beta\tau}$ llegamos a

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha^2 u + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k-1)\left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x}\right) - ku.$$

Ahora elegimos α y β para que se anulen los coeficientes que multiplican a u y a $\frac{\partial u}{\partial x}$, es decir

$$\beta = \alpha^2 + (k-1)\alpha - k \quad y \quad 0 = 2\alpha + (k-1).$$

Al resolver el sistema de ecuaciones, resultan

$$\alpha = -\tfrac{k-1}{2} \text{ y } \beta = -\tfrac{(k+1)^2}{4}.$$

Con esta elección de parámetros la primera ecuación de (8) queda

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

cuya condición inicial resulta

$$u(x,0) = v(x,0)e^{\frac{1}{2}(k-1)x} = \text{máx}\{e^x - 1, 0\}e^{\frac{1}{2}(k-1)x} = \text{máx}\{e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0\},$$

con lo cual, mediante cambios de variable, pasamos de (8) al modelo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \tau} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in \mathbb{R}, \quad \tau \in [0, T\sigma^2/2) \\ u(x,0) = u_0(x) = \text{máx}\{e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0\} & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{9}$$

Esta es la ecuación del calor, que tiene varias formas conocidas de solución. Ésta se encuentra determinada por

$$u(x,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}u_0(s)e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}}ds$$

que es la convolución entre la condición inicial y la solución fundamental de la ecuación del calor. Evaluemos esta integral haciendo el cambio

$$s=\omega\sqrt{2\tau}+x,$$

Con lo que resulta

$$\begin{aligned}
u(x,\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u_0(\omega\sqrt{2\tau}+x)e^{-\frac{1}{2}\omega^2}d\omega\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\text{máx}\{e^{\frac{1}{2}(k+1)(\omega\sqrt{2\tau}+x)}-e^{\frac{1}{2}(k-1)(\omega\sqrt{2\tau}+x)},0\}e^{-\frac{1}{2}\omega^2}d\omega.
\end{aligned}$$

Para eliminar el máximo, haremos uso de lo siguiente:

$$\begin{aligned}
& e^{\frac{1}{2}(k+1)s}-e^{\frac{1}{2}(k-1)s}\geq 0\\
\Leftrightarrow\ & e^{\frac{1}{2}(k+1)s}\geq e^{\frac{1}{2}(k-1)s}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{k+1}{2}s\geq\frac{k-1}{2}s\\
\Leftrightarrow\ & s\geq 0,
\end{aligned}$$

por lo cual el integrando no será nulo cuando $\omega\sqrt{2\tau}+x\geq 0,$ es decir, si

$$\omega\geq-\frac{x}{\sqrt{2\tau}},$$

por lo que la integral resulta

$$u(x,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty}e^{\frac{1}{2}(k+1)(\omega\sqrt{2\tau}+x)}e^{-\frac{1}{2}\omega^2}d\omega-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty}e^{\frac{1}{2}(k-1)(\omega\sqrt{2\tau}+x)}e^{-\frac{1}{2}\omega^2}d\omega.$$

Llamemos I_1 e I_2 a cada una de las integrales anteriores. Haremos los cálculos para la primera pues serán análogos los de la segunda. Sacando del integrando el término que no depende de ω y juntando las exponenciales

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(\omega\sqrt{2\tau}+x)} e^{-\frac{1}{2}\omega^2} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(k+1)x} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(\omega\sqrt{2\tau})-\frac{1}{2}\omega^2} d\omega.$$

Completando cuadrados en el exponente tenemos

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(k+1)x} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau - \frac{1}{2}(\omega - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau})^2} d\omega.$$

Sacamos el término que no depende de ω y sea

$$\rho = \omega - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$$

con lo cual, haciendo el cambio de variable nos queda

$$I_1 = e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho.$$

Si definimos

$$d_1 := \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$$

la integral resulta

$$I_1 = e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho = e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1)$$

donde *N(·)* es la función de probabilidad de la distribución Normal estándar

$$N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds.$$

El cálculo para I_2 es idéntico al de I_1, reemplazando *(k-1)* por *(k+1)* en todo el análisis. Es decir, resulta

$$I_2 = e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2)$$

con

$$d_2 := \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau},$$

así que tenemos una fórmula explícita para $u(x,\tau)$ dada por

$$u(x,\tau) = e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2).$$

Ahora volveremos a cambiar las variables para obtener una expresión para $C(S,t)$. En primer lugar, teníamos que

$$v(x,\tau) = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x-\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} u(x,\tau) = e^{x} N(d_1) - e^{-k\tau} N(d_2).$$

Usando que

$$x = \ln\left(\frac{S}{K}\right), \quad \tau(t) = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t), \quad v(x,\tau) = \frac{C(S,t)}{K}, \quad k = \frac{2r}{\sigma^2},$$

llegamos a

$$\frac{C(S,t)}{K} = e^{\ln\left(\frac{S}{K}\right)} N(d_1) - e^{-\frac{2r}{\sigma^2}\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} N(d_2),$$

que, simplificando, se transforma en la fórmula de Black-Scholes:

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2) \tag{10}$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \tag{11}$$

Es importante notar que cuando el valor de la volatilidad σ y la tasa de retorno *r* son conocidas o asignadas previamente, el valor de la opción queda completamente determinado. En la siguiente sección se presenta el análisis del resultado obtenido.

V. Análisis de la fórmula de Black-Scholes-Merton

Iniciaremos nuestro análisis corroborando que se satisfacen las dos últimas ecuaciones de (6), áquellas que describen el comportamiento en la frontera y son los casos extremos.

1. La primera describe el comportamiento cuando $S = 0$, es decir

$$C(0,t) = 0 \quad t \in [0,T).$$

   Notemos que, como en las expresiones para d_1 y d_2 aparece $ln(S/K)$, tomaremos el límite cuando S tiende a 0, resultando que

$$S \to 0 \quad \Rightarrow \quad d_1, d_2 \to -\infty \quad \Rightarrow \quad N(d_1), N(d_2) \to 0,$$

   con lo que resulta que $C(S,t)$ tiende a 0 cuando S tiende a 0.

2. La segunda era el comportamiento de C cuando S tiende a infinito,

$$C(S,t) \approx S \quad t \in [0,T), \quad S \to \infty.$$

   Un análisis similar al anterior nos dice que

$$S \to \infty \quad \Rightarrow \quad d_1, d_2 \to \infty \quad \Rightarrow \quad N(d_1), N(d_2) \to 1,$$

Resultando que $C(S,t) \approx S - Ke^{-r(T-t)} \approx S$.

Recordemos, por otra parte, que se llegó a la fórmula construyendo un portafolio libre de riesgo, por medio de la estrategia Δ-hedging, y como vimos anteriormente, el Δ es de suma importancia para neutralizar el riesgo del portafolio, expresado como

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}.$$

Derivando la ecuación (10) con respecto a *S* obtenemos

$$\Delta = N(d_1) + SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} - Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S}.$$

De las expresiones para d_1 y d_2 en (11) obtenemos

$$\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{\partial d_2}{\partial S} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}}$$

por lo cual

$$\Delta = N(d_1) + \frac{SN'(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$$

y afirmamos que $SN'(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N'(d_2) = 0,$ lo que es equivalente a verificar que

$$\frac{N'(d_1)}{N'(d_2)} = \frac{K}{S}e^{-r(T-t)}.$$

Notemos que

$$\frac{N'(d_1)}{N'(d_2)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d_1^2}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d_2^2}} = e^{-\frac{1}{2}(d_1^2 - d_2^2)}.$$

Por otra parte, de las expresiones para d_1 y d_2 obtenemos que

$$d_1 - d_2 = \sigma\sqrt{T-t}$$

y

$$d_1 + d_2 = 2\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} + 2\frac{r}{\sigma}\sqrt{T-t},$$

por lo que

$$d_1^2 - d_2^2 = (d_1 - d_2)(d_1 + d_2) = \sigma\sqrt{T-t}\left(2\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} + 2\frac{r}{\sigma}\sqrt{T-t}\right) = 2\ln\left(\frac{S}{K}\right) + 2r(T-t).$$

Usando lo anterior en (12) llegamos a

$$\frac{N'(d_1)}{N'(d_2)} = e^{2\ln\left(\frac{S}{K}\right)+2r(T-t)} = \frac{K}{S}e^{-r(T-t)},$$

que es lo que queríamos probar. Por último, podemos concluir que

$$\Delta = N(d_1).$$

Conclusiones.

Todo modelo es una representación de un fenómeno real. En particular, al modelar matemáticamente una situación real se pretende facilitar su análisis y disponer de un soporte que permita tomar decisiones racionales en torno a una situación.

Por esta razón es ideal que el modelo represente tan fielmente como sea posible el fenómeno real. Pero la aproximación entre el modelo y la realidad tiene un precio: Normalmente mientras más fidelidad se pretenda en el modelo, éste será más complejo.

El Modelo de Black-Scholes-Merton intenta responder a la pregunta: ¿Cuál es el precio de una opción? El éxito que ha tenido al responder esta pregunta parece reflejar su apego a situaciones reales; sin embargo, como todo modelo matemático, éste es simplificado por algunos supuestos. En este caso es natural preguntarse si la volatilidad y la tasa de retorno son constantes, si el cambio en los precios sigue una distribución log-normal o no considerar costos de transacción, entre otros.

La importancia del modelo radica en que ha servido como base para posteriores modificaciones y adaptaciones que concuerdan con los hechos, y que ha sido usado para valuar otro tipo de derivados, como bonos y contratos forward; también ha sido generalizado al considerar costos de transacción.

Este trabajo también muestra la relación con áreas, pues, como hemos visto, la matemática, la física y las finanzas, que parecerían no tener alguna relación entre ellas, se han fundido excepcionalmente en este modelo.

Bibliografía.

Black, Fischer, Myron Scholes, (1973). *The Pricing of Options and Corporate Liabilities.* Journal of Political Economy, pp. 637–654,

Capinski M. y Zastawniak T, (2005), *Mathematics for Finance*. Springer,

L.C. Evans, (1998), *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence.

Hull J., *Options,*(2000).*, Futures and other Derivates.* Prentice Hall.

Itô, K, (1950), *Stochastic Differential Equations In A Differentiable Manifold.* Nagoya Mathematics Journal, pp. 35-47.

Merton, Robert C, (1973).. *Theory of Rational Option Pricing*. Bell Journal of Economics and Management Science**,** pp. 141–183.

Nielsen L. T, (1999).., *Pricing and Hedging of Derivate Securities.* Oxford University.

Strichartz R. S, (2003)., *A guide to Distribution Theory and Fourier Transforms*. World Scientifc Publishing.

Shah A., Black, Merton and Scholes, (1997): *Their work and its consequences.* Indira Gandhi Institute of Development Research. Bombay, India. Hoja web consultada el 15 de febrero del 2008 http:www.mayin.org/ajayshah/PDFDOCS/Shah1997_bms.pdf.

Kim M., Financial Mathematics, (2004). Queen's University, Belfast, U.K.hoja web consultada el 20 de enero del 2008 **http://web.am.qub.ac.uk/users/m.s.kim/lectures.htm**