Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Área Académica de Matemáticas y Física

Línea de investigación: Física Matemática
Programa educativo: Licenciatura en Matemáticas Aplicadas
Nombre de la asignatura: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Tema: Modelos Matemáticos Compartamentales
Ciclo: Julio-Diciembre de 2005.
Profesor: Orlando Ávila-Pozos

Tema: Modelos Matemáticos Compartamentales

Abstract: In this work, the scheme to model the interaction between a *closed* population divided in two classes is presented. In particular, it is of interest to evaluate the behaviour of an epidemic disease in a very simple way.

Keywords: Epidemy, Compartmental Scheme, Reproductive Number.
Palabras clave: Epidemia, Esquema compartamental, Número Reproductivo de la Enfermedad.

Usar la herramienta matemática que permita modelar distintos aspectos de una enfermedad infecciosa (predicciones sobre epidemia, toma de decisiones sobre individuos a vacunarse, modelación de la epidemia, etc.)

D. Bernoulli (1760) 

R. Malthus (1798) 

R. Verhulst (1838) 

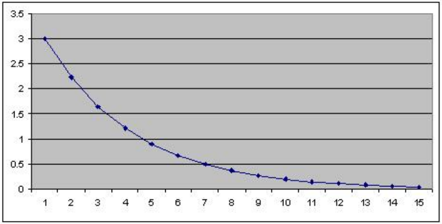
$$x(t+\Delta t) \sim x(t) + \alpha x(t)\Delta t \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x \quad (2)$$

Con la condición inicial tenemos

$$x(t) = x_0 e^{\alpha t}$$

Es clave ver que si $\alpha = b - m < 0$ tenemos un decaimiento exponencial.

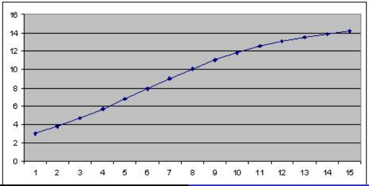


$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \alpha x && (3)\\
\frac{dx}{dt} &= \alpha x(1 - \frac{x}{K}) && (4)\\
& && (5)
\end{aligned}
$$

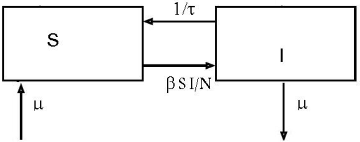
Con la condición inicial tenemos

$$x(t) = \frac{K}{1 + Ce^{-\alpha t}}$$

$C = \frac{K - x_0}{x_0}$.



R. Ross (1903)
Kermack, McKendrick(1927)
Transmisión de una enfermedad: Susceptibles-Infectados

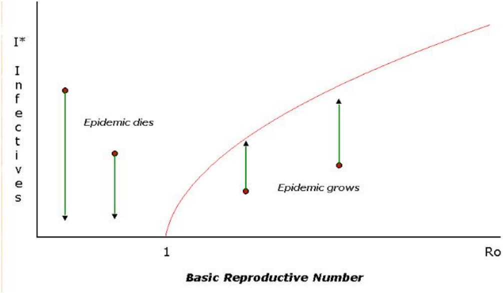


Supuestos: $N = S + I$, equilibrio demográfico.

$$\frac{dI}{dt} = \beta S \frac{I}{N} - \frac{I}{\tau} - \mu I \quad = \quad \beta(N - I)\frac{I}{N} - (\frac{1}{\tau} + \mu)I \qquad (6)$$

$$= \quad RI\left(1 - \frac{I}{K}\right) \qquad (7)$$

$R_0 = \frac{\beta}{\frac{1}{\tau}+\mu}$ **No. repr. básico de la enfermedad[1],[2]** Si $R_0 < 1$ entonces la enfermedad se extingue mientras que si $R_0 > 1$ se obtiene un equilibrio endémico.

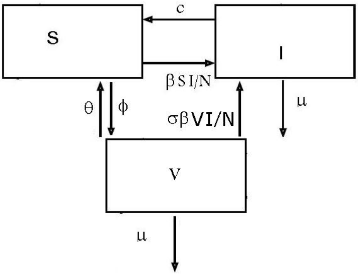


*Lotka y Volterra (1925-6)

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - ax - by) \tag{8}$$

$$\frac{dy}{dt} = y(cx - dy) \tag{9}$$

a, b, c, d son positivos.
Hay 3 equilibrios, extinción, prevalencia de la presa y coexistencia (¿será estable?)



$0 < \sigma < 1$ **Eficacia de la vacuna [3]**.

$$\frac{dI}{dt} = \beta S\frac{I}{N} + \sigma\beta V\frac{I}{N} - cI - \mu I \quad (10)$$

$$\frac{dV}{dt} = \phi SV - \theta V - \mu V - \sigma\beta V\frac{I}{N} \quad (11)$$

Routh-Hurwicz
: En 2 dimensiones, Tr$M < 0$ y det$M > 0$

M es la matriz Jacobiana del sistema evaluada en el equilibrio.

- Las hipótesis que se impongan dan cuenta del tipo de modelo.
- La predicción de rebrotes de enfermedades no es sencilla.
- Es importante el sistema de información.
- El estudio serio de los modelos puede ser parte clave en las políticas nacionales de salud.

- Existen muchas preguntas abiertas en torno a la Epidemiología.

- Castillo-Chávez, C., and Brauer, F.
  Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology.
  Springer, New York, London, Tokyo, 2000.

- Castillo-Chávez, C., F. Z., and Huang, W.
  On the computation of R_0 and its role on global stability.
  IMA, Vol. 125, pp. 229-250, 2001.

- Kribs Zaleta, C.
  Introducción a los modelos epidemiológicos.
  Notas de Curso en la UAEH, 2007.