Eigenteoría sin determinantes

Fernando Barrera Mora
barrera@uaeh.edu.mx

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Taller de álgebra lineal
XVIII Semana Regional de Investigación y Docencia
UNISON, 2008

b

INTRODUCCIÓN

1. ¿Cuáles son los problemas fundamentales en álgebra lineal?
2. Haciendo un análisis se llega a que dichos problemas son resolver las ecuaciones:

$$AX = B, \qquad AX = \lambda X \tag{1}$$

- ¿Qué conceptos y métodos son esenciales al resolverlos?
- Desde los inicios, la teoría de los determinantes ha jugado un papel importante en su solución (Regla de Cramer, polinomio característico).
- Estudios recientes han mostrado que el concepto de independencia lineal es central al abordar dichos problemas.

1. ¿Cuáles son los problemas fundamentales en álgebra lineal?
2. Haciendo un análisis se llega a que dichos problemas son resolver las ecuaciones:

$$AX = B, \qquad AX = \lambda X \tag{1}$$

3. ¿Qué conceptos y métodos son esenciales al resolverlos?
4. Desde los inicios, la teoría de los determinantes ha jugado un papel importante en su solución (Regla de Cramer, polinomio característico).
5. Estudios recientes han mostrado que el concepto de independencia lineal es central al abordar dichos problemas.

1. ¿Cuáles son los problemas fundamentales en álgebra lineal?
2. Haciendo un análisis se llega a que dichos problemas son resolver las ecuaciones:

$$AX = B, \qquad AX = \lambda X \tag{1}$$

3. ¿Qué conceptos y métodos son esenciales al resolverlos?
4. Desde los inicios, la teoría de los determinantes ha jugado un papel importante en su solución (Regla de Cramer, polinomio característico).
5. Estudios recientes han mostrado que el concepto de independencia lineal es central al abordar dichos problemas.

1. ¿Cuáles son los problemas fundamentales en álgebra lineal?
2. Haciendo un análisis se llega a que dichos problemas son resolver las ecuaciones:

$$AX = B, \qquad AX = \lambda X \tag{1}$$

3. ¿Qué conceptos y métodos son esenciales al resolverlos?
4. Desde los inicios, la teoría de los determinantes ha jugado un papel importante en su solución (Regla de Cramer, polinomio característico).
5. Estudios recientes han mostrado que el concepto de independencia lineal es central al abordar dichos problemas.

1. ¿Cuáles son los problemas fundamentales en álgebra lineal?
2. Haciendo un análisis se llega a que dichos problemas son resolver las ecuaciones:

$$AX = B, \qquad AX = \lambda X \tag{1}$$

3. ¿Qué conceptos y métodos son esenciales al resolverlos?
4. Desde los inicios, la teoría de los determinantes ha jugado un papel importante en su solución (Regla de Cramer, polinomio característico).
5. Estudios recientes han mostrado que el concepto de independencia lineal es central al abordar dichos problemas.

1. ¿Cuáles son los problemas fundamentales en álgebra lineal?
2. Haciendo un análisis se llega a que dichos problemas son resolver las ecuaciones:

$$AX = B, \qquad AX = \lambda X \tag{1}$$

3. ¿Qué conceptos y métodos son esenciales al resolverlos?
4. Desde los inicios, la teoría de los determinantes ha jugado un papel importante en su solución (Regla de Cramer, polinomio característico).
5. Estudios recientes han mostrado que el concepto de independencia lineal es central al abordar dichos problemas.

1. Forma escalonada reducida y dependencia lineal
2. Sistemas de ecuaciones y combinaciones linealeas
   - Los sistemas $AX = B$ y $x_1A_1 + \cdots + x_nA_n = B$ son equivalentes.
   - Otra interpretación geométrica de las soluciones.
3. El rango fila y rango columna de A coinciden.

1. Forma escalonada reducida y dependencia lineal
2. Sistemas de ecuaciones y combinaciones linealeas
    1. Los sistemas $AX = B$ y $x_1A_1 + \cdots + x_nA_n = B$ son equivalentes.
    2. Otra interpretación geométrica de las soluciones.
3. El rango fila y rango columna de A coinciden.

1. Forma escalonada reducida y dependencia lineal
2. Sistemas de ecuaciones y combinaciones linealeas
    1. Los sistemas $AX = B$ y $x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n = B$ son equivalentes.
    2. Otra interpretación geométrica de las soluciones.
3. El rango fila y rango columna de A coinciden.

1. Forma escalonada reducida y dependencia lineal
2. Sistemas de ecuaciones y combinaciones linealeas
   1. Los sistemas $AX = B$ y $x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n = B$ son equivalentes.
   2. Otra interpretación geométrica de las soluciones.
3. El rango fila y rango columna de A coinciden.

1. Forma escalonada reducida y dependencia lineal
2. Sistemas de ecuaciones y combinaciones linealeas
    1. Los sistemas $AX = B$ y $x_1A_1 + \cdots + x_nA_n = B$ son equivalentes.
    2. Otra interpretación geométrica de las soluciones.
3. El rango fila y rango columna de A coinciden.

1. Forma escalonada reducida y dependencia lineal
2. Sistemas de ecuaciones y combinaciones linealeas
    1. Los sistemas $AX = B$ y $x_1A_1 + \cdots + x_nA_n = B$ son equivalentes.
    2. Otra interpretación geométrica de las soluciones.
3. El rango fila y rango columna de A coinciden.

TEOREMA

(Polinomio Mínimo) Si A es una matriz $n \times n$, entonces existe un único polinomio de mínimo grado, mónico $m(x)$ que satisface:

- $m(A) = 0$.
- Si $f(x)$ es otro polinomio tal que $f(A) = 0$, entonces $m(x)$ divide a $f(x)$.
- $deg\,(m(x)) \leq n$.

DEMOSTRACIÓN

- Existencia:
  - sea $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$,
  - existe $h_i(x)$ polinomio tal que $h_i(A)Y_i = 0$,
  - defina $g(x) := h_1(x) \cdots h_n(x)$, entonces $g(A) = 0$.
- La segunda parte se prueba usando el algoritmo de la

TEOREMA

(Polinomio Mínimo) Si A es una matriz $n \times n$, entonces existe un único polinomio de mínimo grado, mónico $m(x)$ que satisface:

- $m(A) = 0$.
- *Si $f(x)$ es otro polinomio tal que $f(A) = 0$, entonces $m(x)$ divide a $f(x)$.*
- $deg(m(x)) \leq n$.

DEMOSTRACIÓN

- *Existencia:*
  - *sea $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$,*
  - *existe $h_i(x)$ polinomio tal que $h_i(A)Y_i = 0$,*
  - *defina $g(x) := h_1(x) \cdots h_n(x)$, entonces $g(A) = 0$.*
- *La segunda parte se prueba usando el algoritmo de la*

Teorema

(Polinomio Mínimo) Si A es una matriz $n \times n$, entonces existe un único polinomio de mínimo grado, mónico $m(x)$ que satisface:

- $m(A) = 0$.
- *Si $f(x)$ es otro polinomio tal que $f(A) = 0$, entonces $m(x)$ divide a $f(x)$.*
- $deg(m(x)) \leq n$.

Demostración

- *Existencia:*
  - *sea $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$,*
  - *existe $h_i(x)$ polinomio tal que $h_i(A)Y_i = 0$,*
  - *defina $g(x) := h_1(x) \cdots h_n(x)$, entonces $g(A) = 0$.*
- *La segunda parte se prueba usando el algoritmo de la*

Teorema

(Polinomio Mínimo) Si A es una matriz $n \times n$, entonces existe un único polinomio de mínimo grado, mónico $m(x)$ que satisface:

- $m(A) = 0$.
- Si $f(x)$ es otro polinomio tal que $f(A) = 0$, entonces $m(x)$ divide a $f(x)$.
- $deg\,(m(x)) \leq n$.

Demostración

- Existencia:
  - sea $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$,
  - existe $h_i(x)$ polinomio tal que $h_i(A)Y_i = 0$,
  - defina $g(x) := h_1(x) \cdots h_n(x)$, entonces $g(A) = 0$.
- La segunda parte se prueba usando el algoritmo de la

Teorema

(Polinomio Mínimo) Si A es una matriz $n \times n$, entonces existe un único polinomio de mínimo grado, mónico $m(x)$ que satisface:

- $m(A) = 0$.
- *Si $f(x)$ es otro polinomio tal que $f(A) = 0$, entonces $m(x)$ divide a $f(x)$.*
- $deg(m(x)) \leq n$.

Demostración

- *Existencia:*
  - sea $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$,
  - existe $h_i(x)$ polinomio tal que $h_i(A)Y_i = 0$,
  - defina $g(x) := h_1(x) \cdots h_n(x)$, entonces $g(A) = 0$.
- *La segunda parte se prueba usando el algoritmo de la*

Teorema

(Polinomio Mínimo) Si A es una matriz $n \times n$, entonces existe un único polinomio de mínimo grado, mónico $m(x)$ que satisface:

- $m(A) = 0$.
- *Si $f(x)$ es otro polinomio tal que $f(A) = 0$, entonces $m(x)$ divide a $f(x)$.*
- $deg(m(x)) \leq n$.

Demostración

- *Existencia:*
  - *sea $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$,*
  - *existe $h_i(x)$ polinomio tal que $h_i(A)Y_i = 0$,*
  - *defina $g(x) := h_1(x) \cdots h_n(x)$, entonces $g(A) = 0$.*
- *La segunda parte se prueba usando el algoritmo de la*

El Problema de Valores y Vectores Característicos

Teorema

(Polinomio Mínimo) Si A es una matriz $n \times n$, entonces existe un único polinomio de mínimo grado, mónico $m(x)$ que satisface:

- $m(A) = 0$.
- *Si $f(x)$ es otro polinomio tal que $f(A) = 0$, entonces $m(x)$ divide a $f(x)$.*
- $deg(m(x)) \leq n$.

Demostración

- *Existencia:*
  - *sea $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$,*
  - *existe $h_i(x)$ polinomio tal que $h_i(A)Y_i = 0$,*
  - *defina $g(x) := h_1(x) \cdots h_n(x)$, entonces $g(A) = 0$.*
- *La segunda parte se prueba usando el algoritmo de la*

Teorema

(Polinomio Mínimo) Si A es una matriz $n \times n$, entonces existe un único polinomio de mínimo grado, mónico $m(x)$ que satisface:

- $m(A) = 0$.
- *Si $f(x)$ es otro polinomio tal que $f(A) = 0$, entonces $m(x)$ divide a $f(x)$.*
- $deg(m(x)) \leq n$.

Demostración

- *Existencia:*
- *La segunda parte se prueba usando el algoritmo de la*

El Problema de Valores y Vectores Característicos

Teorema

(Polinomio Mínimo) Si A es una matriz $n \times n$, entonces existe un único polinomio de mínimo grado, mónico $m(x)$ que satisface:

- $m(A) = 0$.
- *Si $f(x)$ es otro polinomio tal que $f(A) = 0$, entonces $m(x)$ divide a $f(x)$.*
- $deg\,(m(x)) \leq n$.

Demostración

- *Existencia:*
  - *sea $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$,*
  - *existe $h_i(x)$ polinomio tal que $h_i(A)Y_i = 0$,*
  - *defina $g(x) := h_1(x) \cdots h_n(x)$, entonces $g(A) = 0$.*
- *La segunda parte se prueba usando el algoritmo de la*

Teorema

(Polinomio Mínimo) Si A es una matriz $n \times n$, entonces existe un único polinomio de mínimo grado, mónico $m(x)$ que satisface:

- $m(A) = 0$.
- *Si $f(x)$ es otro polinomio tal que $f(A) = 0$, entonces $m(x)$ divide a $f(x)$.*
- $deg\,(m(x)) \leq n$.

Demostración

- *Existencia:*
    - *sea $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$,*
    - *existe $h_i(x)$ polinomio tal que $h_i(A)Y_i = 0$,*
    - *defina $g(x) := h_1(x) \cdots h_n(x)$, entonces $g(A) = 0$.*
- *La segunda parte se prueba usando el algoritmo de la*

Teorema

(Polinomio Mínimo) Si A es una matriz $n \times n$, entonces existe un único polinomio de mínimo grado, mónico $m(x)$ que satisface:

- $m(A) = 0$.
- *Si $f(x)$ es otro polinomio tal que $f(A) = 0$, entonces $m(x)$ divide a $f(x)$.*
- $deg\,(m(x)) \leq n$.

Demostración

- *Existencia:*
  - *sea $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$,*
  - *existe $h_i(x)$ polinomio tal que $h_i(A)Y_i = 0$,*
  - *defina $g(x) := h_1(x) \cdots h_n(x)$, entonces $g(A) = 0$.*
- *La segunda parte se prueba usando el algoritmo de la*

Teorema

(Polinomio Mínimo) Si A es una matriz $n \times n$, entonces existe un único polinomio de mínimo grado, mónico $m(x)$ que satisface:

- $m(A) = 0$.
- *Si $f(x)$ es otro polinomio tal que $f(A) = 0$, entonces $m(x)$ divide a $f(x)$.*
- $deg(m(x)) \leq n$.

Demostración

- *Existencia:*
  - *sea $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$,*
  - *existe $h_i(x)$ polinomio tal que $h_i(A)Y_i = 0$,*
  - *defina $g(x) := h_1(x) \cdots h_n(x)$, entonces $g(A) = 0$.*
- *La segunda parte se prueba usando el algoritmo de la*

TEOREMA

(Polinomio Mínimo) Si A es una matriz $n \times n$, entonces existe un único polinomio de mínimo grado, mónico $m(x)$ que satisface:

- $m(A) = 0$.
- *Si $f(x)$ es otro polinomio tal que $f(A) = 0$, entonces $m(x)$ divide a $f(x)$.*
- $deg(m(x)) \leq n$.

DEMOSTRACIÓN

- *Existencia:*
  - *sea $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$,*
  - *existe $h_i(x)$ polinomio tal que $h_i(A)Y_i = 0$,*
  - *defina $g(x) := h_1(x) \cdots h_n(x)$, entonces $g(A) = 0$.*
- *La segunda parte se prueba usando el algoritmo de la*

TEOREMA

(Polinomio Mínimo) Si A es una matriz $n \times n$, entonces existe un único polinomio de mínimo grado, mónico $m(x)$ que satisface:

- $m(A) = 0$.
- *Si $f(x)$ es otro polinomio tal que $f(A) = 0$, entonces $m(x)$ divide a $f(x)$.*
- $deg\,(m(x)) \leq n$.

DEMOSTRACIÓN

- *Existencia:*
  - *sea $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$,*
  - *existe $h_i(x)$ polinomio tal que $h_i(A)Y_i = 0$,*
  - *defina $g(x) := h_1(x) \cdots h_n(x)$, entonces $g(A) = 0$.*
- *La segunda parte se prueba usando el algoritmo de la*

Lema

Si A es una matriz $n \times n$, y W es un subespacio A-invariante de dimensión positiva, entonces existe un polinomio $g(x)$ de grado $\leq n - \dim(W)$, que satisface $g(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq W$.

Demostración

Pongamos $\dim(W) = n - r$, $0 \leq r < n$. Aplicaremos inducción sobre r.

- *Si $r = 0$, entonces $W = V$ y cualquier polinomio constante $\neq 0$ funciona.*
- *Si $r = 1$, entonces $\dim(W) = n - 1$.*
  - *Sean, $\{X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ una base de W y Y tal que $\{X_1, \ldots, X_{n-1}, Y\}$ es base de $\mathbb{R}^n$,*
  - *entonces $AY = Z + cY$, para algún $c \in \mathbb{R}$ y $Z \in W$.*
  - *De esto se concluye que $(A - cI)(\mathbb{R}^n) \subseteq W$.*

Lema

Si A es una matriz $n \times n$, y W es un subespacio A-invariante de dimensión positiva, entonces existe un polinomio $g(x)$ de grado $\leq n - \dim(W)$, que satisface $g(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq W$.

Demostración

Pongamos $\dim(W) = n - r$, $0 \leq r < n$. Aplicaremos inducción sobre r.

- *Si $r = 0$, entonces $W = V$ y cualquier polinomio constante $\neq 0$ funciona.*
- *Si $r = 1$, entonces $\dim(W) = n - 1$.*
    - *Sean, $\{X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ una base de W y Y tal que $\{X_1, \ldots, X_{n-1}, Y\}$ es base de $\mathbb{R}^n$,*
    - *entonces $AY = Z + cY$, para algún $c \in \mathbb{R}$ y $Z \in W$.*
    - *De esto se concluye que $(A - cI)(\mathbb{R}^n) \subseteq W$.*

LEMA

Si A es una matriz $n \times n$, y W es un subespacio A-invariante de dimensión positiva, entonces existe un polinomio $g(x)$ de grado $\leq n - \dim(W)$, que satisface $g(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq W$.

DEMOSTRACIÓN

Pongamos $\dim(W) = n - r$, $0 \leq r < n$. Aplicaremos inducción sobre r.

- *Si $r = 0$, entonces $W = V$ y cualquier polinomio constante $\neq 0$ funciona.*
- *Si $r = 1$, entonces $\dim(W) = n - 1$.*
  - *Sean, $\{X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ una base de W y Y tal que $\{X_1, \ldots, X_{n-1}, Y\}$ es base de $\mathbb{R}^n$,*
  - *entonces $AY = Z + cY$, para algún $c \in \mathbb{R}$ y $Z \in W$.*
  - *De esto se concluye que $(A - cI)(\mathbb{R}^n) \subseteq W$.*

Continuación de la Demostración

Lema

Si A es una matriz $n \times n$, y W es un subespacio A-invariante de dimensión positiva, entonces existe un polinomio $g(x)$ de grado $\leq n - \dim(W)$, que satisface $g(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq W$.

Demostración

Pongamos $\dim(W) = n - r$, $0 \leq r < n$. Aplicaremos inducción sobre r.

- *Si $r = 0$, entonces $W = V$ y cualquier polinomio constante $\neq 0$ funciona.*
- *Si $r = 1$, entonces $\dim(W) = n - 1$.*

Continuación de la Demostración

Lema

Si A es una matriz $n \times n$, y W es un subespacio A-invariante de dimensión positiva, entonces existe un polinomio $g(x)$ de grado $\leq n - \dim(W)$, que satisface $g(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq W$.

Demostración

Pongamos $\dim(W) = n - r$, $0 \leq r < n$. Aplicaremos inducción sobre r.

- *Si $r = 0$, entonces $W = V$ y cualquier polinomio constante $\neq 0$ funciona.*
- *Si $r = 1$, entonces $\dim(W) = n - 1$.*

Lema

Si A es una matriz $n \times n$, y W es un subespacio A-invariante de dimensión positiva, entonces existe un polinomio $g(x)$ de grado $\leq n - \dim(W)$, que satisface $g(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq W$.

Demostración

Pongamos $\dim(W) = n - r$, $0 \leq r < n$. Aplicaremos inducción sobre r.

- *Si $r = 0$, entonces $W = V$ y cualquier polinomio constante $\neq 0$ funciona.*
- *Si $r = 1$, entonces $\dim(W) = n - 1$.*

Continuación de la Demostración

Lema

Si A es una matriz $n \times n$, y W es un subespacio A-invariante de dimensión positiva, entonces existe un polinomio $g(x)$ de grado $\leq n - \dim(W)$, que satisface $g(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq W$.

Demostración

Pongamos $\dim(W) = n - r$, $0 \leq r < n$. Aplicaremos inducción sobre r.

- *Si $r = 0$, entonces $W = V$ y cualquier polinomio constante $\neq 0$ funciona.*
- *Si $r = 1$, entonces $\dim(W) = n - 1$.*

Continuación de la Demostración

Lema

Si A es una matriz $n \times n$, y W es un subespacio A-invariante de dimensión positiva, entonces existe un polinomio $g(x)$ de grado $\leq n - \dim(W)$, que satisface $g(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq W$.

Demostración

Pongamos $\dim(W) = n - r$, $0 \leq r < n$. Aplicaremos inducción sobre r.

- *Si $r = 0$, entonces $W = V$ y cualquier polinomio constante $\neq 0$ funciona.*
- *Si $r = 1$, entonces $\dim(W) = n - 1$.*
  - *Sean, $\{X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ una base de W y Y tal que $\{X_1, \ldots, X_{n-1}, Y\}$ es base de $\mathbb{R}^n$,*
  - *entonces $AY = Z + cY$, para algún $c \in \mathbb{R}$ y $Z \in W$. De esto se concluye que $(A - cI)(\mathbb{R}^n) \subseteq W$.*

Lema

Si A es una matriz $n \times n$, y W es un subespacio A-invariante de dimensión positiva, entonces existe un polinomio $g(x)$ de grado $\leq n - \dim(W)$, que satisface $g(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq W$.

Demostración

Pongamos $\dim(W) = n - r$, $0 \leq r < n$. Aplicaremos inducción sobre r.

- *Si $r = 0$, entonces $W = V$ y cualquier polinomio constante $\neq 0$ funciona.*
- *Si $r = 1$, entonces $\dim(W) = n - 1$.*
    - *Sean, $\{X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ una base de W y Y tal que $\{X_1, \ldots, X_{n-1}, Y\}$ es base de $\mathbb{R}^n$,*
    - *entonces $AY = Z + cY$, para algún $c \in \mathbb{R}$ y $Z \in W$.*
    - *De esto se concluye que $(A - cI)(\mathbb{R}^n) \subseteq W$.*

Continuación de la Demostración

Lema

Si A es una matriz $n \times n$, y W es un subespacio A-invariante de dimensión positiva, entonces existe un polinomio $g(x)$ de grado $\leq n - \dim(W)$, que satisface $g(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq W$.

Demostración

Pongamos $\dim(W) = n - r$, $0 \leq r < n$. Aplicaremos inducción sobre r.

- *Si $r = 0$, entonces $W = V$ y cualquier polinomio constante $\neq 0$ funciona.*
- *Si $r = 1$, entonces $\dim(W) = n - 1$.*
    - *Sean, $\{X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ una base de W y Y tal que $\{X_1, \ldots, X_{n-1}, Y\}$ es base de $\mathbb{R}^n$,*
    - *entonces $AY = Z + cY$, para algún $c \in \mathbb{R}$ y $Z \in W$.*
    - *De esto se concluye que $(A - cI)(\mathbb{R}^n) \subseteq W$.*

Continuación de la Demostración

Lema

Si A es una matriz $n \times n$, y W es un subespacio A-invariante de dimensión positiva, entonces existe un polinomio $g(x)$ de grado $\leq n - \dim(W)$, que satisface $g(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq W$.

Demostración

Pongamos $\dim(W) = n - r$, $0 \leq r < n$. Aplicaremos inducción sobre r.

- *Si $r = 0$, entonces $W = V$ y cualquier polinomio constante $\neq 0$ funciona.*
- *Si $r = 1$, entonces $\dim(W) = n - 1$.*
  - *Sean, $\{X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ una base de W y Y tal que $\{X_1, \ldots, X_{n-1}, Y\}$ es base de $\mathbb{R}^n$,*
  - *entonces $AY = Z + cY$, para algún $c \in \mathbb{R}$ y $Z \in W$.*
  - *De esto se concluye que $(A - cI)(\mathbb{R}^n) \subseteq W$.*

- Supongamos $r \geq 1$ y sea $X \in \mathbb{R}^n \setminus W$; existe un polinomio $g_1(x)$ de mínimo grado tal que $g_1(A)X \in W$.
- Sea, $l := \deg(g_1(x))$ y $W_1 = \mathcal{L}(\{X, AX, \ldots, A^{l-1}X\})$.
- La minimalidad de l garantiza:
  - $\{X, AX, \ldots, A^{l-1}X\}$ es l.i.
  - $W \cap W_1 = \{0\}$.
- También se tiene que $W + W_1$ es A-invariante y $\dim(W + W_1) = n - r_1 > \dim(W) = n - r$.
- Por hipótesis de inducción, existe $g_2(x)$ de grado $\leq n - \dim(W + W_1)$ tal que $g_2(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq W + W_1$.
- De lo anterior $g_1(A)g_2(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq g_1(A)(W + W_1) \subseteq W$ y
- $\deg(g_1 g_2) = \deg(g_1) + \deg(g_2) \leq \deg(g_1) + n - \dim(W + W_1) = n - \dim(W)$.

Continuación de la Demostración

- Supongamos $r > 1$ y sea $X \in \mathbb{R}^n \setminus W$; existe un polinomio $g_1(x)$ de mínimo grado tal que $g_1(A)X \in W$.
- Sea, $l := \deg(g_1(x))$ y $W_1 = \mathcal{L}(\{X, AX, \ldots, A^{l-1}X\})$.
- La minimalidad de l garantiza:
  - $\{X, AX, \ldots, A^{l-1}X\}$ es l.i.
  - $W \cap W_1 = \{0\}$.
- También se tiene que $W + W_1$ es A-invariante y $\dim(W + W_1) = n - r_1 > \dim(W) = n - r$.
- Por hipótesis de inducción, existe $g_2(x)$ de grado $\leq n - \dim(W + W_1)$ tal que $g_2(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq W + W_1$.
- De lo anterior $g_1(A)g_2(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq g_1(A)(W + W_1) \subseteq W$ y
- $\deg(g_1 g_2) = \deg(g_1) + \deg(g_2) \leq \deg(g_1) + n - \dim(W + W_1) = n - \dim(W)$.

Continuación de la Demostración

- Supongamos $r > 1$ y sea $X \in \mathbb{R}^n \setminus W$; existe un polinomio $g_1(x)$ de mínimo grado tal que $g_1(A)X \in W$.
- Sea, $l := \deg(g_1(x))$ y $W_1 = \mathcal{L}(\{X, AX, \ldots, A^{l-1}X\})$.
- La minimalidad de l garantiza:
  - $\{X, AX, \ldots, A^{l-1}X\}$ es l.i.
  - $W \cap W_1 = \{0\}$.
- También se tiene que $W + W_1$ es A-invariante y $\dim(W + W_1) = n - r_1 > \dim(W) = n - r$.
- Por hipótesis de inducción, existe $g_2(x)$ de grado $\leq n - \dim(W + W_1)$ tal que $g_2(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq W + W_1$.
- De lo anterior $g_1(A)g_2(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq g_1(A)(W + W_1) \subseteq W$ y
- $\deg(g_1 g_2) = \deg(g_1) + \deg(g_2) \leq \deg(g_1) + n - \dim(W + W_1) = n - \dim(W)$.

Continuación de la Demostración

- Supongamos $r > 1$ y sea $X \in \mathbb{R}^n \setminus W$; existe un polinomio $g_1(x)$ de mínimo grado tal que $g_1(A)X \in W$.
- Sea, $l := \deg(g_1(x))$ y $W_1 = \mathcal{L}(\{X, AX, \ldots, A^{l-1}X\})$.
- La minimalidad de l garantiza:
  - $\{X, AX, \ldots, A^{l-1}X\}$ es l.i.
  - $W \cap W_1 = \{0\}$.
- También se tiene que $W + W_1$ es A-invariante y $\dim(W + W_1) = n - r_1 > \dim(W) = n - r$.
- Por hipótesis de inducción, existe $g_2(x)$ de grado $\leq n - \dim(W + W_1)$ tal que $g_2(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq W + W_1$.
- De lo anterior $g_1(A)g_2(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq g_1(A)(W + W_1) \subseteq W$ y
- $\deg(g_1 g_2) = \deg(g_1) + \deg(g_2) \leq \deg(g_1) + n - \dim(W + W_1) = n - \dim(W)$.

Continuación de la Demostración

- Supongamos $r > 1$ y sea $X \in \mathbb{R}^n \setminus W$; existe un polinomio $g_1(x)$ de mínimo grado tal que $g_1(A)X \in W$.
- Sea, $l := \deg(g_1(x))$ y $W_1 = \mathcal{L}(\{X, AX, \ldots, A^{l-1}X\})$.
- La minimalidad de l garantiza:
  - $\{X, AX, \ldots, A^{l-1}X\}$ es l.i.
  - $W \cap W_1 = \{0\}$.
- También se tiene que $W + W_1$ es A-invariante y $\dim(W + W_1) = n - r_1 > \dim(W) = n - r$.
- Por hipótesis de inducción, existe $g_2(x)$ de grado $\leq n - \dim(W + W_1)$ tal que $g_2(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq W + W_1$.
- De lo anterior $g_1(A)g_2(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq g_1(A)(W + W_1) \subseteq W$ y
- $\deg(g_1 g_2) = \deg(g_1) + \deg(g_2) \leq \deg(g_1) + n - \dim(W + W_1) = n - \dim(W)$.

- Supongamos $r > 1$ y sea $X \in \mathbb{R}^n \setminus W$; existe un polinomio $g_1(x)$ de mínimo grado tal que $g_1(A)X \in W$.
- Sea, $l := \deg(g_1(x))$ y $W_1 = \mathcal{L}(\{X, AX, \ldots, A^{l-1}X\})$.
- La minimalidad de l garantiza:
  - $\{X, AX, \ldots, A^{l-1}X\}$ es l.i.
  - $W \cap W_1 = \{0\}$.
- También se tiene que $W + W_1$ es A-invariante y $\dim(W + W_1) = n - r_1 > \dim(W) = n - r$.
- Por hipótesis de inducción, existe $g_2(x)$ de grado $\leq n - \dim(W + W_1)$ tal que $g_2(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq W + W_1$.
- De lo anterior $g_1(A)g_2(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq g_1(A)(W + W_1) \subseteq W$ y
- $\deg(g_1 g_2) = \deg(g_1) + \deg(g_2) \leq \deg(g_1) + n - \dim(W + W_1) = n - \dim(W)$.

- Supongamos $r > 1$ y sea $X \in \mathbb{R}^n \setminus W$; existe un polinomio $g_1(x)$ de mínimo grado tal que $g_1(A)X \in W$.
- Sea, $l := \deg(g_1(x))$ y $W_1 = \mathcal{L}(\{X, AX, \dots, A^{l-1}X\})$.
- La minimalidad de l garantiza:
  - $\{X, AX, \dots, A^{l-1}X\}$ es l.i.
  - $W \cap W_1 = \{0\}$.
- También se tiene que $W + W_1$ es A-invariante y $\dim(W + W_1) = n - r_1 > \dim(W) = n - r$.
- Por hipótesis de inducción, existe $g_2(x)$ de grado $\leq n - \dim(W + W_1)$ tal que $g_2(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq W + W_1$.
- De lo anterior $g_1(A)g_2(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq g_1(A)(W + W_1) \subseteq W$ y
- $\deg(g_1 g_2) = \deg(g_1) + \deg(g_2) \leq \deg(g_1) + n - \dim(W + W_1) = n - \dim(W)$.

- Supongamos $r > 1$ y sea $X \in \mathbb{R}^n \setminus W$; existe un polinomio $g_1(x)$ de mínimo grado tal que $g_1(A)X \in W$.
- Sea, $l := \deg(g_1(x))$ y $W_1 = \mathcal{L}(\{X, AX, \ldots, A^{l-1}X\})$.
- La minimalidad de l garantiza:
  - $\{X, AX, \ldots, A^{l-1}X\}$ es l.i.
  - $W \cap W_1 = \{0\}$.
- También se tiene que $W + W_1$ es A-invariante y $\dim(W + W_1) = n - r_1 > \dim(W) = n - r$.
- Por hipótesis de inducción, existe $g_2(x)$ de grado $\leq n - \dim(W + W_1)$ tal que $g_2(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq W + W_1$.
- De lo anterior $g_1(A)g_2(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq g_1(A)(W + W_1) \subseteq W$ y
- $\deg(g_1 g_2) = \deg(g_1) + \deg(g_2) \leq \deg(g_1) + n - \dim(W + W_1) = n - \dim(W)$.

- Supongamos $r > 1$ y sea $X \in \mathbb{R}^n \setminus W$; existe un polinomio $g_1(x)$ de mínimo grado tal que $g_1(A)X \in W$.
- Sea, $l := \deg(g_1(x))$ y $W_1 = \mathcal{L}(\{X, AX, \ldots, A^{l-1}X\})$.
- La minimalidad de l garantiza:
  - $\{X, AX, \ldots, A^{l-1}X\}$ es l.i.
  - $W \cap W_1 = \{0\}$.
- También se tiene que $W + W_1$ es A-invariante y $\dim(W + W_1) = n - r_1 > \dim(W) = n - r$.
- Por hipótesis de inducción, existe $g_2(x)$ de grado $\leq n - \dim(W + W_1)$ tal que $g_2(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq W + W_1$.
- De lo anterior $g_1(A)g_2(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq g_1(A)(W + W_1) \subseteq W$ y
- $\deg(g_1 g_2) = \deg(g_1) + \deg(g_2) \leq \deg(g_1) + n - \dim(W + W_1) = n - \dim(W)$.

- Supongamos $r > 1$ y sea $X \in \mathbb{R}^n \setminus W$; existe un polinomio $g_1(x)$ de mínimo grado tal que $g_1(A)X \in W$.
- Sea, $l := \deg(g_1(x))$ y $W_1 = \mathcal{L}(\{X, AX, \ldots, A^{l-1}X\})$.
- La minimalidad de l garantiza:
  - $\{X, AX, \ldots, A^{l-1}X\}$ es l.i.
  - $W \cap W_1 = \{0\}$.
- También se tiene que $W + W_1$ es A-invariante y $\dim(W + W_1) = n - r_1 > \dim(W) = n - r$.
- Por hipótesis de inducción, existe $g_2(x)$ de grado $\leq n - \dim(W + W_1)$ tal que $g_2(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq W + W_1$.
- De lo anterior $g_1(A)g_2(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq g_1(A)(W + W_1) \subseteq W$ y
- $\deg(g_1 g_2) = \deg(g_1) + \deg(g_2) \leq \deg(g_1) + n - \dim(W + W_1) = n - \dim(W)$.

Aplicaremos inducción sobre n.

- Si $n = 1$, entonces para cualquier $X \neq 0$ se tiene $AX = cX$, por lo que $A - cI$ es la matriz cero.
- Supongamos $n > 1$, y el resultado cierto para todos los espacios vectoriales de dimensión $< n$.
- Sea $X \neq 0$, entonces $a_0X + a_1AX + \cdots + a_nA^nX = 0$, con algún $a_i \neq 0$.
- Sea $A_1 = a_0I + a_1A + \cdots + a_nA^n$ y N su núcleo, el cual es A-invariante.
- Si $N = \mathbb{R}^n$, hemos terminado. Si $N \neq \mathbb{R}^n$, entonces la restricción de A a N satisface la conclusión ($\deg(h) \leq \dim(N)$, h polinomio mínimo de la restricción.)
- Por el lema, existe un polinomio $g_1(x)$ de grado a lo más $n - \dim(N)$ tal que $g_1(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq N$.
- De lo anterior se concluye $h(A)g_1(A)(\mathbb{R}^n) = 0$ y $\deg(hg_1) \leq n$.

Aplicaremos inducción sobre n.

- Si $n = 1$, entonces para cualquier $X \neq 0$ se tiene $AX = cX$, por lo que $A - cI$ es la matriz cero.
- Supongamos $n > 1$, y el resultado cierto para todos los espacios vectoriales de dimensión $< n$.
- Sea $X \neq 0$, entonces $a_0X + a_1AX + \cdots + a_nA^nX = 0$, con algún $a_i \neq 0$.
- Sea $A_1 = a_0I + a_1A + \cdots + a_nA^n$ y N su núcleo, el cual es A-invariante.
- Si $N = \mathbb{R}^n$, hemos terminado. Si $N \neq \mathbb{R}^n$, entonces la restricción de A a N satisface la conclusión ($\deg(h) \leq \dim(N)$, h polinomio mínimo de la restricción.)
- Por el lema, existe un polinomio $g_1(x)$ de grado a lo más $n - \dim(N)$ tal que $g_1(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq N$.
- De lo anterior se concluye $h(A)g_1(A)(\mathbb{R}^n) = 0$ y $\deg(hg_1) \leq n$.

Aplicaremos inducción sobre n.

- Si $n = 1$, entonces para cualquier $X \neq 0$ se tiene $AX = cX$, por lo que $A - cI$ es la matriz cero.
- Supongamos $n > 1$, y el resultado cierto para todos los espacios vectoriales de dimensión $< n$.
- Sea $X \neq 0$, entonces $a_0 X + a_1 AX + \cdots + a_n A^n X = 0$, con algún $a_i \neq 0$.
- Sea $A_1 = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_n A^n$ y N su núcleo, el cual es A-invariante.
- Si $N = \mathbb{R}^n$, hemos terminado. Si $N \neq \mathbb{R}^n$, entonces la restricción de A a N satisface la conclusión ($\deg(h) \leq \dim(N)$, h polinomio mínimo de la restricción.)
- Por el lema, existe un polinomio $g_1(x)$ de grado a lo más $n - \dim(N)$ tal que $g_1(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq N$.
- De lo anterior se concluye $h(A)g_1(A)(\mathbb{R}^n) = 0$ y $\deg(hg_1) \leq n$.

Aplicaremos inducción sobre n.

- Si $n = 1$, entonces para cualquier $X \neq 0$ se tiene $AX = cX$, por lo que $A - cI$ es la matriz cero.
- Supongamos $n > 1$, y el resultado cierto para todos los espacios vectoriales de dimensión $< n$.
- Sea $X \neq 0$, entonces $a_0 X + a_1 AX + \cdots + a_n A^n X = 0$, con algún $a_i \neq 0$.
- Sea $A_1 = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_n A^n$ y N su núcleo, el cual es A-invariante.
- Si $N = \mathbb{R}^n$, hemos terminado. Si $N \neq \mathbb{R}^n$, entonces la restricción de A a N satisface la conclusión ($\deg(h) \leq \dim(N)$, h polinomio mínimo de la restricción.)
- Por el lema, existe un polinomio $g_1(x)$ de grado a lo más $n - \dim(N)$ tal que $g_1(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq N$.
- De lo anterior se concluye $h(A)g_1(A)(\mathbb{R}^n) = 0$ y $\deg(hg_1) \leq n$.

Aplicaremos inducción sobre n.

- Si $n = 1$, entonces para cualquier $X \neq 0$ se tiene $AX = cX$, por lo que $A - cI$ es la matriz cero.
- Supongamos $n > 1$, y el resultado cierto para todos los espacios vectoriales de dimensión $< n$.
- Sea $X \neq 0$, entonces $a_0X + a_1AX + \cdots + a_nA^nX = 0$, con algún $a_i \neq 0$.
- Sea $A_1 = a_0I + a_1A + \cdots + a_nA^n$ y N su núcleo, el cual es A-invariante.
- Si $N = \mathbb{R}^n$, hemos terminado. Si $N \neq \mathbb{R}^n$, entonces la restricción de A a N satisface la conclusión ($\deg(h) \leq \dim(N)$, h polinomio mínimo de la restricción.)
- Por el lema, existe un polinomio $g_1(x)$ de grado a lo más $n - \dim(N)$ tal que $g_1(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq N$.
- De lo anterior se concluye $h(A)g_1(A)(\mathbb{R}^n) = 0$ y $\deg(hg_1) \leq n$.

Aplicaremos inducción sobre n.

- Si $n = 1$, entonces para cualquier $X \neq 0$ se tiene $AX = cX$, por lo que $A - cI$ es la matriz cero.
- Supongamos $n > 1$, y el resultado cierto para todos los espacios vectoriales de dimensión $< n$.
- Sea $X \neq 0$, entonces $a_0X + a_1AX + \cdots + a_nA^nX = 0$, con algún $a_i \neq 0$.
- Sea $A_1 = a_0I + a_1A + \cdots + a_nA^n$ y N su núcleo, el cual es A-invariante.
- Si $N = \mathbb{R}^n$, hemos terminado. Si $N \neq \mathbb{R}^n$, entonces la restricción de A a N satisface la conclusión ($\deg(h) \leq \dim(N)$, h polinomio mínimo de la restricción.)
- Por el lema, existe un polinomio $g_1(x)$ de grado a lo más $n - \dim(N)$ tal que $g_1(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq N$.
- De lo anterior se concluye $h(A)g_1(A)(\mathbb{R}^n) = 0$ y $\deg(hg_1) \leq n$.

Aplicaremos inducción sobre n.

- Si $n = 1$, entonces para cualquier $X \neq 0$ se tiene $AX = cX$, por lo que $A - cI$ es la matriz cero.
- Supongamos $n > 1$, y el resultado cierto para todos los espacios vectoriales de dimensión $< n$.
- Sea $X \neq 0$, entonces $a_0X + a_1AX + \cdots + a_nA^nX = 0$, con algún $a_i \neq 0$.
- Sea $A_1 = a_0I + a_1A + \cdots + a_nA^n$ y N su núcleo, el cual es A-invariante.
- Si $N = \mathbb{R}^n$, hemos terminado. Si $N \neq \mathbb{R}^n$, entonces la restricción de A a N satisface la conclusión ($\deg(h) \leq \dim(N)$, h polinomio mínimo de la restricción.)
- Por el lema, existe un polinomio $g_1(x)$ de grado a lo más $n - \dim(N)$ tal que $g_1(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq N$.
- De lo anterior se concluye $h(A)g_1(A)(\mathbb{R}^n) = 0$ y $\deg(hg_1) \leq n$.

Aplicaremos inducción sobre n.

- Si $n = 1$, entonces para cualquier $X \neq 0$ se tiene $AX = cX$, por lo que $A - cI$ es la matriz cero.
- Supongamos $n > 1$, y el resultado cierto para todos los espacios vectoriales de dimensión $< n$.
- Sea $X \neq 0$, entonces $a_0 X + a_1 AX + \cdots + a_n A^n X = 0$, con algún $a_i \neq 0$.
- Sea $A_1 = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_n A^n$ y N su núcleo, el cual es A-invariante.
- Si $N = \mathbb{R}^n$, hemos terminado. Si $N \neq \mathbb{R}^n$, entonces la restricción de A a N satisface la conclusión ($\deg(h) \leq \dim(N)$, h polinomio mínimo de la restricción.)
- Por el lema, existe un polinomio $g_1(x)$ de grado a lo más $n - \dim(N)$ tal que $g_1(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq N$.
- De lo anterior se concluye $h(A)g_1(A)(\mathbb{R}^n) = 0$ y $\deg(hg_1) \leq n$.

Aplicaremos inducción sobre n.

- Si $n = 1$, entonces para cualquier $X \neq 0$ se tiene $AX = cX$, por lo que $A - cI$ es la matriz cero.
- Supongamos $n > 1$, y el resultado cierto para todos los espacios vectoriales de dimensión $< n$.
- Sea $X \neq 0$, entonces $a_0X + a_1AX + \cdots + a_nA^nX = 0$, con algún $a_i \neq 0$.
- Sea $A_1 = a_0I + a_1A + \cdots + a_nA^n$ y N su núcleo, el cual es A-invariante.
- Si $N = \mathbb{R}^n$, hemos terminado. Si $N \neq \mathbb{R}^n$, entonces la restricción de A a N satisface la conclusión ($\deg(h) \leq \dim(N)$, h polinomio mínimo de la restricción.)
- Por el lema, existe un polinomio $g_1(x)$ de grado a lo más $n - \dim(N)$ tal que $g_1(A)(\mathbb{R}^n) \subseteq N$.
- De lo anterior se concluye $h(A)g_1(A)(\mathbb{R}^n) = 0$ y $\deg(hg_1) \leq n$.

Teorema (Descomposición Primaria)

Sea A una matriz $n \times n$,

$$m(x) = p_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_k^{r_k}(x)$$

la factorización del polinomio mínimo de A en factores irreducibles. Si W_i es el núcleo de $B_i = p_i^{r_i}(A)$, entonces:

- $\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$.
- *Cada W_i es A-invariante.*
- *La matriz B_i tiene por polinomio mínimo a $p_i^{r_i}(x)$.*

Teorema (Descomposición Primaria)

Sea A una matriz $n \times n$,

$$m(x) = p_1^{r_1}(x) p_2^{r_2}(x) \cdots p_k^{r_k}(x)$$

la factorización del polinomio mínimo de A en factores irreducibles. Si W_i es el núcleo de $B_i = p_i^{r_i}(A)$, entonces:

TEOREMA (DESCOMPOSICIÓN PRIMARIA)

Sea A una matriz $n \times n$,

$$m(x) = p_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_k^{r_k}(x)$$

la factorización del polinomio mínimo de A en factores irreducibles. Si W_i es el núcleo de $B_i = p_i^{r_i}(A)$, entonces:

TEOREMA (DESCOMPOSICIÓN PRIMARIA)

Sea A una matriz $n \times n$,

$$m(x) = p_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_k^{r_k}(x)$$

la factorización del polinomio mínimo de A en factores irreducibles. Si W_i es el núcleo de $B_i = p_i^{r_i}(A)$, entonces:

- $\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$.
- *Cada W_i es A-invariante.*
- *La matriz B_i tiene por polinomio mínimo a $p_i(x)$*

Teorema (Descomposición Primaria)

Sea A una matriz $n \times n$,

$$m(x) = p_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_k^{r_k}(x)$$

la factorización del polinomio mínimo de A en factores irreducibles. Si W_i es el núcleo de $B_i = p_i^{r_i}(A)$, entonces:

- $\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$.
- *Cada W_i es A-invariante.*
- *La matriz B_i tiene por polinomio mínimo a $p_i^{r_i}(x)$.*

TEOREMA (DESCOMPOSICIÓN PRIMARIA)

Sea A una matriz $n \times n$,

$$m(x) = p_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_k^{r_k}(x)$$

la factorización del polinomio mínimo de A en factores irreducibles. Si W_i es el núcleo de $B_i = p_i^{r_i}(A)$, entonces:

- $\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$.
- *Cada W_i es A-invariante.*
- *La matriz B_i tiene por polinomio mínimo a $p_i^{r_i}(x)$.*

Teorema (Descomposición Primaria)

Sea A una matriz $n \times n$,

$$m(x) = p_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_k^{r_k}(x)$$

la factorización del polinomio mínimo de A en factores irreducibles. Si W_i es el núcleo de $B_i = p_i^{r_i}(A)$, entonces:

- $\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$.
- *Cada W_i es A-invariante.*
- *La matriz B_i tiene por polinomio mínimo a $p_i^{r_i}(x)$.*

Teorema (Descomposición Primaria)

Sea A una matriz $n \times n$,

$$m(x) = p_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_k^{r_k}(x)$$

la factorización del polinomio mínimo de A en factores irreducibles. Si W_i es el núcleo de $B_i = p_i^{r_i}(A)$, entonces:

- $\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$.
- *Cada W_i es A-invariante.*
- *La matriz B_i tiene por polinomio mínimo a $p_i^{r_i}(x)$.*

- Para cada i, sea $f_i(x) = \prod_{j\neq i} p_j^{r_j}(x)$. Los polinomios $f_1, f_2, \ldots, f_k$ son primos relativos.
- Existen $g_1, g_2, \ldots, g_k$ tales que

$$f_1(x)g_1(x) + \cdots + f_k(x)g_k(x) = 1. \qquad (2)$$

- Definimos $A_i := f_i(A)g_i(A)$ y se verifica directamente:
  1. $A_1 + A_2 + \cdots + A_k = I$, la matriz identidad.
  2. Si $i \neq j$, entonces $A_iA_j = 0$.
  3. Para todo $i = 1, 2, \ldots, k$ se tiene $A_i^2 = A_i$.
- La propiedad 1 implica: $A_1(\mathbb{R}^n) + A_2(\mathbb{R}^n) + \cdots + A_k(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

Demostración TDP

- Para cada i, sea $f_i(x) = \prod_{j \neq i} p_j^{r_j}(x)$. Los polinomios $f_1, f_2, \ldots, f_k$ son primos relativos.
- Existen $g_1, g_2, \ldots, g_k$ tales que
$$f_1(x)g_1(x) + \cdots + f_k(x)g_k(x) = 1. \tag{2}$$
- Definimos $A_i := f_i(A)g_i(A)$ y se verifica directamente:
  1. $A_1 + A_2 + \cdots + A_k = I$, la matriz identidad.
  2. Si $i \neq j$, entonces $A_iA_j = 0$.
  3. Para todo $i = 1, 2, \ldots, k$ se tiene $A_i^2 = A_i$.
- La propiedad 1 implica:
$A_1(\mathbb{R}^n) + A_2(\mathbb{R}^n) + \cdots + A_k(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

- Para cada i, sea $f_i(x) = \prod_{j\neq i} p_j^{r_j}(x)$. Los polinomios $f_1, f_2, \ldots, f_k$ son primos relativos.
- Existen $g_1, g_2, \ldots, g_k$ tales que

$$f_1(x)g_1(x) + \cdots + f_k(x)g_k(x) = 1. \tag{2}$$

- Definimos $A_i := f_i(A)g_i(A)$ y se verifica directamente:
  1. $A_1 + A_2 + \cdots + A_k = I$, la matriz identidad.
  2. Si $i \neq j$, entonces $A_iA_j = 0$.
  3. Para todo $i = 1, 2, \ldots, k$ se tiene $A_i^2 = A_i$.
- La propiedad 1 implica: $A_1(\mathbb{R}^n) + A_2(\mathbb{R}^n) + \cdots + A_k(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

- Para cada i, sea $f_i(x) = \prod_{j\neq i} p_j^{r_j}(x)$. Los polinomios $f_1, f_2, \ldots, f_k$ son primos relativos.
- Existen $g_1, g_2, \ldots, g_k$ tales que

$$f_1(x)g_1(x) + \cdots + f_k(x)g_k(x) = 1. \tag{2}$$

- Definimos $A_i := f_i(A)g_i(A)$ y se verifica directamente:
  1. $A_1 + A_2 + \cdots + A_k = I$, la matriz identidad.
  2. Si $i \neq j$, entonces $A_iA_j = 0$.
  3. Para todo $i = 1, 2, \ldots, k$ se tiene $A_i^2 = A_i$.
- La propiedad 1 implica: $A_1(\mathbb{R}^n) + A_2(\mathbb{R}^n) + \cdots + A_k(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

- Para cada i, sea $f_i(x) = \prod_{j \neq i} p_j^{r_j}(x)$. Los polinomios $f_1, f_2, \ldots, f_k$ son primos relativos.
- Existen $g_1, g_2, \ldots, g_k$ tales que

$$f_1(x)g_1(x) + \cdots + f_k(x)g_k(x) = 1. \tag{2}$$

- Definimos $A_i := f_i(A)g_i(A)$ y se verifica directamente:
  1. $A_1 + A_2 + \cdots + A_k = I$, la matriz identidad.
  2. Si $i \neq j$, entonces $A_iA_j = 0$.
  3. Para todo $i = 1, 2, \ldots, k$ se tiene $A_i^2 = A_i$.
- La propiedad 1 implica: $A_1(\mathbb{R}^n) + A_2(\mathbb{R}^n) + \cdots + A_k(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

- Para cada i, sea $f_i(x) = \prod_{j \neq i} p_j^{r_j}(x)$. Los polinomios $f_1, f_2, \ldots, f_k$ son primos relativos.
- Existen $g_1, g_2, \ldots, g_k$ tales que

$$f_1(x)g_1(x) + \cdots + f_k(x)g_k(x) = 1. \tag{2}$$

- Definimos $A_i := f_i(A)g_i(A)$ y se verifica directamente:
  1. $A_1 + A_2 + \cdots + A_k = I$, la matriz identidad.
  2. Si $i \neq j$, entonces $A_iA_j = 0$.
  3. Para todo $i = 1, 2, \ldots, k$ se tiene $A_i^2 = A_i$.
- La propiedad 1 implica: $A_1(\mathbb{R}^n) + A_2(\mathbb{R}^n) + \cdots + A_k(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

- Para cada i, sea $f_i(x) = \prod_{j \neq i} p_j^{r_j}(x)$. Los polinomios $f_1, f_2, \ldots, f_k$ son primos relativos.
- Existen $g_1, g_2, \ldots, g_k$ tales que

$$f_1(x)g_1(x) + \cdots + f_k(x)g_k(x) = 1. \tag{2}$$

- Definimos $A_i := f_i(A)g_i(A)$ y se verifica directamente:
  1. $A_1 + A_2 + \cdots + A_k = I$, la matriz identidad.
  2. Si $i \neq j$, entonces $A_iA_j = 0$.
  3. Para todo $i = 1, 2, \ldots, k$ se tiene $A_i^2 = A_i$.
- La propiedad 1 implica: $A_1(\mathbb{R}^n) + A_2(\mathbb{R}^n) + \cdots + A_k(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

- Para cada i, sea $f_i(x) = \prod_{j \neq i} p_j^{r_j}(x)$. Los polinomios $f_1, f_2, \ldots, f_k$ son primos relativos.
- Existen $g_1, g_2, \ldots, g_k$ tales que

$$f_1(x)g_1(x) + \cdots + f_k(x)g_k(x) = 1. \tag{2}$$

- Definimos $A_i := f_i(A)g_i(A)$ y se verifica directamente:
  1. $A_1 + A_2 + \cdots + A_k = I$, la matriz identidad.
  2. Si $i \neq j$, entonces $A_iA_j = 0$.
  3. Para todo $i = 1, 2, \ldots, k$ se tiene $A_i^2 = A_i$.
- La propiedad 1 implica: $A_1(\mathbb{R}^n) + A_2(\mathbb{R}^n) + \cdots + A_k(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

Demostración TDP

- Mostraremos que $A_i(\mathbb{R}^n) = W_i$ y que forman una suma directa.
- Sea $Y \in A_i(\mathbb{R}^n)$, $Y = A_i X = f_i(A)g_i(A)X$ para algún $X \in \mathbb{R}^n$
- entonces $B_i Y = p_i^{l_i}(A)Y = p_i^{l_i}(A)f_i(A)g_i(A)X = m(A)g_i(A)X = 0$, probando que $Y \in W_i$.
- Recíprocamente, sea $X \in W_i$; como $A_1 + A_2 + \cdots + A_k = I$, entonces $X = A_1X + A_2X + \cdots + A_kX$.
- También se tiene $p_i^{l_i}(x)$ divide a $f_j(x)$ para todo $j \neq i$,
- entonces $A_jX = f_j(A)g_j(A)X = 0$, para todo $j \neq i$, por lo que $X = A_iX \in A_i(\mathbb{R}^n)$.

- Mostraremos que $A_i(\mathbb{R}^n) = W_i$ y que forman una suma directa.
- Sea $Y \in A_i(\mathbb{R}^n)$, $Y = A_iX = f_i(A)g_i(A)X$ para algún $X \in \mathbb{R}^n$
- entonces $B_iY = p_i^{r_i}(A)Y = p_i^{r_i}(A)f_i(A)g_i(A)X = m(A)g_i(A)X = 0$, probando que $Y \in W_i$.
- Recíprocamente, sea $X \in W_i$; como $A_1 + A_2 + \cdots + A_k = I$, entonces $X = A_1X + A_2X + \cdots + A_kX$.
- También se tiene $p_i^{r_i}(x)$ divide a $f_j(x)$ para todo $j \neq i$,
- entonces $A_jX = f_j(A)g_j(A)X = 0$, para todo $j \neq i$, por lo que $X = A_iX \in A_i(\mathbb{R}^n)$.

- Mostraremos que $A_i(\mathbb{R}^n) = W_i$ y que forman una suma directa.
- Sea $Y \in A_i(\mathbb{R}^n)$, $Y = A_iX = f_i(A)g_i(A)X$ para algún $X \in \mathbb{R}^n$
- entonces $B_iY = p_i^{r_i}(A)Y = p_i^{r_i}(A)f_i(A)g_i(A)X = m(A)g_i(A)X = 0$, probando que $Y \in W_i$.
- Recíprocamente, sea $X \in W_i$; como $A_1 + A_2 + \cdots + A_k = I$, entonces $X = A_1X + A_2X + \cdots + A_kX$.
- También se tiene $p_i^{r_i}(x)$ divide a $f_j(x)$ para todo $j \neq i$,
- entonces $A_jX = f_j(A)g_j(A)X = 0$, para todo $j \neq i$, por lo que $X = A_iX \in A_i(\mathbb{R}^n)$.

Demostración TDP

- Mostraremos que $A_i(\mathbb{R}^n) = W_i$ y que forman una suma directa.
- Sea $Y \in A_i(\mathbb{R}^n)$, $Y = A_iX = f_i(A)g_i(A)X$ para algún $X \in \mathbb{R}^n$
- entonces $B_iY = p_i^{r_i}(A)Y = p_i^{r_i}(A)f_i(A)g_i(A)X = m(A)g_i(A)X = 0$, probando que $Y \in W_i$.
- Recíprocamente, sea $X \in W_i$; como $A_1 + A_2 + \cdots + A_k = I$, entonces $X = A_1X + A_2X + \cdots + A_kX$.
- También se tiene $p_i^{r_i}(x)$ divide a $f_j(x)$ para todo $j \neq i$,
- entonces $A_jX = f_j(A)g_j(A)X = 0$, para todo $j \neq i$, por lo que $X = A_iX \in A_i(\mathbb{R}^n)$.

- Mostraremos que $A_i(\mathbb{R}^n) = W_i$ y que forman una suma directa.
- Sea $Y \in A_i(\mathbb{R}^n)$, $Y = A_iX = f_i(A)g_i(A)X$ para algún $X \in \mathbb{R}^n$
- entonces $B_iY = p_i^{r_i}(A)Y = p_i^{r_i}(A)f_i(A)g_i(A)X = m(A)g_i(A)X = 0$, probando que $Y \in W_i$.
- Recíprocamente, sea $X \in W_i$; como $A_1 + A_2 + \cdots + A_k = I$, entonces $X = A_1X + A_2X + \cdots + A_kX$.
- También se tiene $p_i^{r_i}(x)$ divide a $f_j(x)$ para todo $j \neq i$,
- entonces $A_jX = f_j(A)g_j(A)X = 0$, para todo $j \neq i$, por lo que $X = A_iX \in A_i(\mathbb{R}^n)$.

- Mostraremos que $A_i(\mathbb{R}^n) = W_i$ y que forman una suma directa.
- Sea $Y \in A_i(\mathbb{R}^n)$, $Y = A_iX = f_i(A)g_i(A)X$ para algún $X \in \mathbb{R}^n$
- entonces $B_iY = p_i^{r_i}(A)Y = p_i^{r_i}(A)f_i(A)g_i(A)X = m(A)g_i(A)X = 0$, probando que $Y \in W_i$.
- Recíprocamente, sea $X \in W_i$; como $A_1 + A_2 + \cdots + A_k = I$, entonces $X = A_1X + A_2X + \cdots + A_kX$.
- También se tiene $p_i^{r_i}(x)$ divide a $f_j(x)$ para todo $j \neq i$,
- entonces $A_jX = f_j(A)g_j(A)X = 0$, para todo $j \neq i$, por lo que $X = A_iX \in A_i(\mathbb{R}^n)$.

- Mostraremos que $A_i(\mathbb{R}^n) = W_i$ y que forman una suma directa.
- Sea $Y \in A_i(\mathbb{R}^n)$, $Y = A_iX = f_i(A)g_i(A)X$ para algún $X \in \mathbb{R}^n$
- entonces $B_iY = p_i^{r_i}(A)Y = p_i^{r_i}(A)f_i(A)g_i(A)X = m(A)g_i(A)X = 0$, probando que $Y \in W_i$.
- Recíprocamente, sea $X \in W_i$; como $A_1 + A_2 + \cdots + A_k = I$, entonces $X = A_1X + A_2X + \cdots + A_kX$.
- También se tiene $p_i^{r_i}(x)$ divide a $f_j(x)$ para todo $j \neq i$,
- entonces $A_jX = f_j(A)g_j(A)X = 0$, para todo $j \neq i$, por lo que $X = A_iX \in A_i(\mathbb{R}^n)$.

- Mostraremos que $A_i(\mathbb{R}^n) \bigcap \left(\sum_{j \neq i} A_j(\mathbb{R}^n) \right) = \{0\}$.
- Sea $X \in A_i(\mathbb{R}^n) \bigcap \left(\sum_{j \neq i} A_j(\mathbb{R}^n) \right)$,
- entonces $X = A_i(Z) = \sum_{j \neq i} A_j(X_j)$. Aplicando A_i a esta ecuación y usando la Propiedad 2 enunciada antes se tiene $A_i(X) = A_i^2(Z) = \sum_{j \neq i} A_i A_j(X_j) = 0$.
- Ahora usando la Propiedad 3 se tiene $0 = A_i(X) = A_i^2(Z) = A_i(Z) = X$, finalizando la prueba de la primera parte del teorema.

- Mostraremos que $A_i(\mathbb{R}^n) \bigcap \left(\sum_{j \neq i} A_j(\mathbb{R}^n) \right) = \{0\}$.
- Sea $X \in A_i(\mathbb{R}^n) \bigcap \left(\sum_{j \neq i} A_j(\mathbb{R}^n) \right)$,
- entonces $X = A_i(Z) = \sum_{j \neq i} A_j(X_j)$. Aplicando A_i a esta ecuación y usando la Propiedad 2 enunciada antes se tiene $A_i(X) = A_i^2(Z) = \sum_{j \neq i} A_i A_j(X_j) = 0$.
- Ahora usando la Propiedad 3 se tiene $0 = A_i(X) = A_i^2(Z) = A_i(Z) = X$, finalizando la prueba de la primera parte del teorema.

Demostración TDP

- Mostraremos que $A_i(\mathbb{R}^n) \bigcap \left(\sum_{j \neq i} A_j(\mathbb{R}^n) \right) = \{0\}$.
- Sea $X \in A_i(\mathbb{R}^n) \bigcap \left(\sum_{j \neq i} A_j(\mathbb{R}^n) \right)$,
- entonces $X = A_i(Z) = \sum_{j \neq i} A_j(X_j)$. Aplicando A_i a esta ecuación y usando la Propiedad 2 enunciada antes se tiene $A_i(X) = A_i^2(Z) = \sum_{j \neq i} A_i A_j(X_j) = 0$.
- Ahora usando la Propiedad 3 se tiene $0 = A_i(X) = A_i^2(Z) = A_i(Z) = X$, finalizando la prueba de la primera parte del teorema.

- Mostraremos que $A_i(\mathbb{R}^n) \bigcap \left(\sum_{j \neq i} A_j(\mathbb{R}^n) \right) = \{0\}$.
- Sea $X \in A_i(\mathbb{R}^n) \bigcap \left(\sum_{j \neq i} A_j(\mathbb{R}^n) \right)$,
- entonces $X = A_i(Z) = \sum_{j \neq i} A_j(X_j)$. Aplicando A_i a esta ecuación y usando la Propiedad 2 enunciada antes se tiene $A_i(X) = A_i^2(Z) = \sum_{j \neq i} A_i A_j(X_j) = 0$.
- Ahora usando la Propiedad 3 se tiene $0 = A_i(X) = A_i^2(Z) = A_i(Z) = X$, finalizando la prueba de la primera parte del teorema.

Demostración TDP

- La segunda parte del teorema se tiene de manera directa usando que T conmuta con $p_i^{l_i}(T)$.
- Para la parte tres, note que $B_i = p_i^{l_i}(A)$ es cero en W_i por lo que el polinomio mínimo de A en W_i, divide a $p_i^{l_i}(x)$.
- Si $h(x)$ es cualquier otro polinomio tal que $h(E_i) = 0$, con E_i la restricción de A a W_i, entonces $h(A)f_i(A)$ es el operador cero, por lo que $m(x) = p_i^{l_i}(x)f_i(x)$ divide a $h(x)f_i(x)$, es decir $p_i^{l_i}(x)$ divide a $h(x)$, probando el teorema.

- La segunda parte del teorema se tiene de manera directa usando que T conmuta con $p_i^{r_i}(T)$.
- Para la parte tres, note que $B_i = p_i^{r_i}(A)$ es cero en W_i por lo que el polinomio mínimo de A en W_i, divide a $p_i^{r_i}(x)$.
- Si $h(x)$ es cualquier otro polinomio tal que $h(E_i) = 0$, con E_i la restricción de A a W_i, entonces $h(A)f_i(A)$ es el operador cero, por lo que $m(x) = p_i^{r_i}(x)f_i(x)$ divide a $h(x)f_i(x)$, es decir $p_i^{r_i}(x)$ divide a $h(x)$, probando el teorema.

- La segunda parte del teorema se tiene de manera directa usando que T conmuta con $p_i^{r_i}(T)$.
- Para la parte tres, note que $B_i = p_i^{r_i}(A)$ es cero en W_i por lo que el polinomio mínimo de A en W_i, divide a $p_i^{r_i}(x)$.
- Si $h(x)$ es cualquier otro polinomio tal que $h(E_i) = 0$, con E_i la restricción de A a W_i, entonces $h(A)f_i(A)$ es el operador cero, por lo que $m(x) = p_i^{r_i}(x)f_i(x)$ divide a $h(x)f_i(x)$, es decir $p_i^{r_i}(x)$ divide a $h(x)$, probando el teorema.

- La segunda parte del teorema se tiene de manera directa usando que T conmuta con $p_i^{r_i}(T)$.
- Para la parte tres, note que $B_i = p_i^{r_i}(A)$ es cero en W_i por lo que el polinomio mínimo de A en W_i, divide a $p_i^{r_i}(x)$.
- Si $h(x)$ es cualquier otro polinomio tal que $h(E_i) = 0$, con E_i la restricción de A a W_i, entonces $h(A)f_i(A)$ es el operador cero, por lo que $m(x) = p_i^{r_i}(x)f_i(x)$ divide a $h(x)f_i(x)$, es decir $p_i^{r_i}(x)$ divide a $h(x)$, probando el teorema.

Corolario

Sea A una matriz $n \times n$. Entonces A es singular $\iff$ el cero es raíz de su polinomio mínimo.

Corolario

Sea A una matriz $n \times n$. Entonces A tiene un subespacio invariante de dimensión uno $\iff$ el polinomio mínimo de A tiene un factor lineal.

Corolario

Sea A una matriz $n \times n$. Entonces A es singular $\iff$ el cero es raíz de su polinomio mínimo.

Corolario

Sea A una matriz $n \times n$. Entonces A tiene un subespacio invariante de dimensión uno $\iff$ el polinomio mínimo de A tiene un factor lineal.

Teorema de Cayley-Hamilton (preliminares)

Teorema

Sea A una matriz $n \times n$ con polinomio mínimo $p(x)^l$, con $p(x)$ irreducible de grado r. Entonces r divide a n.

Corolario

Sea

$$m(x) = p_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_k^{r_k}(x)$$

la factorización del polinomio mínimo de A en factores irreducibles y

$$\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$$

la descomposición inducida en $\mathbb{R}^n$ por $m(x)$. Si denotamos por r_i al grado de $p_i(x)$, entonces r_i divide a $\dim(W_i)$, para todo $i = 1, 2, \ldots, k$.

DESPRIM

TEOREMA

Sea A una matriz $n \times n$ con polinomio mínimo $p(x)^l$, con $p(x)$ irreducible de grado r. Entonces r divide a n.

COROLARIO

Sea

$$m(x) = p_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_k^{r_k}(x)$$

la factorización del polinomio mínimo de A en factores irreducibles y

$$\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$$

la descomposición inducida en $\mathbb{R}^n$ por $m(x)$. Si denotamos por r_i al grado de $p_i(x)$, entonces r_i divide a $\dim(W_i)$, para todo $i = 1, 2, \ldots, k$.

DESPRIM

TEOREMA

Sea A una matriz $n \times n$ con polinomio mínimo $p(x)^l$, con $p(x)$ irreducible de grado r. Entonces r divide a n.

COROLARIO

Sea

$$m(x) = p_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_k^{r_k}(x)$$

la factorización del polinomio mínimo de A en factores irreducibles y

$$\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$$

la descomposición inducida en $\mathbb{R}^n$ por $m(x)$. Si denotamos por r_i al grado de $p_i(x)$, entonces r_i divide a $\dim(W_i)$, para todo $i = 1, 2, \ldots, k$.

DESPRIM

TEOREMA

Sea A una matriz $n \times n$ con polinomio mínimo $p(x)^l$, con $p(x)$ irreducible de grado r. Entonces r divide a n.

COROLARIO

Sea

$$m(x) = p_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_k^{r_k}(x)$$

la factorización del polinomio mínimo de A en factores irreducibles y

$$\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$$

la descomposición inducida en $\mathbb{R}^n$ por $m(x)$. Si denotamos por r_i al grado de $p_i(x)$, entonces r_i divide a $\dim(W_i)$, para todo $i = 1, 2, \ldots, k$.

DESPRIM

TEOREMA

Sea A una matriz $n \times n$ con polinomio mínimo $p(x)^l$, con $p(x)$ irreducible de grado r. Entonces r divide a n.

COROLARIO

Sea

$$m(x) = p_1^{r_1}(x) p_2^{r_2}(x) \cdots p_k^{r_k}(x)$$

la factorización del polinomio mínimo de A en factores irreducibles y

$$\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$$

la descomposición inducida en $\mathbb{R}^n$ por $m(x)$. Si denotamos por r_i al grado de $p_i(x)$, entonces r_i divide a $\dim(W_i)$, para todo $i = 1, 2, \ldots, k$.

DESPRIM

Teorema

Sea A una matriz $n \times n$ con polinomio mínimo $p(x)^l$, con $p(x)$ irreducible de grado r. Entonces r divide a n.

Corolario

Sea

$$m(x) = p_1^{r_1}(x) p_2^{r_2}(x) \cdots p_k^{r_k}(x)$$

la factorización del polinomio mínimo de A en factores irreducibles y

$$\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$$

la descomposición inducida en $\mathbb{R}^n$ por $m(x)$. Si denotamos por r_i al grado de $p_i(x)$, entonces r_i divide a $\dim(W_i)$, para todo $i = 1, 2, \ldots, k$.

DESPRIM

Polinomio característico y el Teorema de Cayley-Hamilton

Definición

Sea A una matriz $n \times n$, $m(x) = p_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_k^{r_k}(x)$ la factorización del polinomio mínimo de A como producto de irreducibles. Definimos el polinomio característico de A como $f_A(x) := (-1)^n p_1^{d_1}(x)p_2^{d_2}(x)\cdots p_k^{d_k}(x)$, en donde $d_i = \dfrac{\dim W_i}{\deg p_i(x)}$.

Teorema (Cayley-Hamilton)

Toda matriz es cero de su polinomio característico.

Definición

Sea A una matriz $n \times n$, $m(x) = p_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_k^{r_k}(x)$ la factorización del polinomio mínimo de A como producto de irreducibles. Definimos el polinomio característico de A como $f_A(x) := (-1)^n p_1^{d_1}(x)p_2^{d_2}(x)\cdots p_k^{d_k}(x)$, en donde $d_i = \dfrac{\dim W_i}{\deg p_i(x)}$.

Teorema (Cayley-Hamilton)

Toda matriz es cero de su polinomio característico.

Polinomio característico y el Teorema de Cayley-Hamilton

Definición

Sea A una matriz $n \times n$, $m(x) = p_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_k^{r_k}(x)$ la factorización del polinomio mínimo de A como producto de irreducibles. Definimos el polinomio característico de A como $f_A(x) := (-1)^n p_1^{d_1}(x)p_2^{d_2}(x)\cdots p_k^{d_k}(x)$, en donde $d_i = \dfrac{\dim W_i}{\deg p_i(x)}$.

Teorema (Cayley-Hamilton)

Toda matriz es cero de su polinomio característico.

Teorema

Dada la matriz A, existen matrices inversibles $Q, R \in K[x]$ tales que

$$Q(A - xI)R = \begin{pmatrix} m_1(x) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2(x) & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & m_k(x) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

en donde $m_{i+1}(x)$ divide a $m_i(x)$ y $m_1(x)$ es el polinomio mínimo de A.

Teorema

Dada la matriz A, existen matrices inversibles $Q, R \in K[x]$ tales que

$$Q(A - xI)R = \begin{pmatrix} m_1(x) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2(x) & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & m_k(x) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

en donde $m_{i+1}(x)$ divide a $m_i(x)$ y $m_1(x)$ es el polinomio mínimo de A.

Polinomio mínimo (algoritmo)

Require: Matriz cuadrada A.

1: Construya la matriz $A_1 = A - xI$.

2: Con operaciones elementales en las filas y columnas de A_1 se obtiene $B = \operatorname{diag}\{p(x), C\}$, en donde $p(x)$ es el máximo común divisor de los elementos de la primera fila y la primera columna de A_1, y C es cuadrada.

3: **while** $p(x)$ no divida a todas la entradas de C, **do**

4: Encuentre la primera columna que contiene un elemento no divisible por $p(x)$ y sume esta columna a la primera de B.

5: Aplique el Paso 2 a B.

6: **end while**

7: Haga $A_1 = C$ y vaya al Paso 2.

En un número finito de iteraciones llegará a una matriz de la forma $\operatorname{diag}\{m_1(x), m_2(x), \ldots, m_k(x), 1, \ldots, 1\}$, en donde $m_i(x)$ divide a $m_{i+1}(x)$. El polinomio mínimo de A es $m_k(x)$.

Require: Matriz cuadrada A.

1: Construya la matriz $A_1 = A - xI$.

2: Con operaciones elementales en las filas y columnas de A_1 se obtiene $B = \mathrm{diag}\{p(x), C\}$, en donde $p(x)$ es el máximo común divisor de los elementos de la primera fila y la primera columna de A_1, y C es cuadrada.

3: **while** $p(x)$ no divida a todas la entradas de C, **do**

4: Encuentre la primera columna que contiene un elemento no divisible por $p(x)$ y sume esta columna a la primera de B.

5: Aplique el Paso 2 a B.

6: **end while**

7: Haga $A_1 = C$ y vaya al Paso 2.

En un número finito de iteraciones llegará a una matriz de la forma $\mathrm{diag}\{m_1(x), m_2(x), \ldots, m_k(x), 1, \ldots, 1\}$, en donde $m_i(x)$ divide a $m_{i+1}(x)$. El polinomio mínimo de A es $m_k(x)$.

Require: Matriz cuadrada A.

1: Construya la matriz $A_1 = A - xI$.

2: Con operaciones elementales en las filas y columnas de A_1 se obtiene $B = \operatorname{diag}\{p(x), C\}$, en donde $p(x)$ es el máximo común divisor de los elementos de la primera fila y la primera columna de A_1, y C es cuadrada.

3: **while** $p(x)$ no divida a todas la entradas de C, **do**

4: Encuentre la primera columna que contiene un elemento no divisible por $p(x)$ y sume esta columna a la primera de B.

5: Aplique el Paso 2 a B.

6: **end while**

7: Haga $A_1 = C$ y vaya al Paso 2.

En un número finito de iteraciones llegará a una matriz de la forma $\operatorname{diag}\{m_1(x), m_2(x), \ldots, m_k(x), 1, \ldots, 1\}$, en donde $m_i(x)$ divide a $m_{i+1}(x)$. El polinomio mínimo de A es $m_k(x)$.

Require: Matriz cuadrada A.

1: Construya la matriz $A_1 = A - xI$.

2: Con operaciones elementales en las filas y columnas de A_1 se obtiene $B = \text{diag}\{p(x), C\}$, en donde $p(x)$ es el máximo común divisor de los elementos de la primera fila y la primera columna de A_1, y C es cuadrada.

3: **while** $p(x)$ no divida a todas la entradas de C, **do**

4: Encuentre la primera columna que contiene un elemento no divisible por $p(x)$ y sume esta columna a la primera de B.

5: Aplique el Paso 2 a B.

6: **end while**

7: Haga $A_1 = C$ y vaya al Paso 2.

En un número finito de iteraciones llegará a una matriz de la forma $\text{diag}\{m_1(x), m_2(x), \ldots, m_k(x), 1, \ldots, 1\}$, en donde $m_i(x)$ divide a $m_{i+1}(x)$. El polinomio mínimo de A es $m_k(x)$.

Polinomio mínimo (algoritmo)

Require: Matriz cuadrada A.

1: Construya la matriz $A_1 = A - xI$.

2: Con operaciones elementales en las filas y columnas de A_1 se obtiene $B = \mathrm{diag}\{p(x), C\}$, en donde $p(x)$ es el máximo común divisor de los elementos de la primera fila y la primera columna de A_1, y C es cuadrada.

3: **while** $p(x)$ no divida a todas la entradas de C, **do**

4: Encuentre la primera columna que contiene un elemento no divisible por $p(x)$ y sume esta columna a la primera de B.

5: Aplique el Paso 2 a B.

6: **end while**

7: Haga $A_1 = C$ y vaya al Paso 2.

En un número finito de iteraciones llegará a una matriz de la forma $\mathrm{diag}\{m_1(x), m_2(x), \ldots, m_k(x), 1, \ldots, 1\}$, en donde $m_i(x)$ divide a $m_{i+1}(x)$. El polinomio mínimo de A es $m_k(x)$.

Require: Matriz cuadrada A.

1: Construya la matriz $A_1 = A - xI$.

2: Con operaciones elementales en las filas y columnas de A_1 se obtiene $B = \mathrm{diag}\{p(x), C\}$, en donde $p(x)$ es el máximo común divisor de los elementos de la primera fila y la primera columna de A_1, y C es cuadrada.

3: **while** $p(x)$ no divida a todas la entradas de C, **do**

4: Encuentre la primera columna que contiene un elemento no divisible por $p(x)$ y sume esta columna a la primera de B.

5: Aplique el Paso 2 a B.

6: **end while**

7: Haga $A_1 = C$ y vaya al Paso 2.

En un número finito de iteraciones llegará a una matriz de la forma $\mathrm{diag}\{m_1(x), m_2(x), \ldots, m_k(x), 1, \ldots, 1\}$, en donde $m_i(x)$ divide a $m_{i+1}(x)$. El polinomio mínimo de A es $m_k(x)$.

Require: Matriz cuadrada A.

1: Construya la matriz $A_1 = A - xI$.

2: Con operaciones elementales en las filas y columnas de A_1 se obtiene $B = \text{diag}\{p(x), C\}$, en donde $p(x)$ es el máximo común divisor de los elementos de la primera fila y la primera columna de A_1, y C es cuadrada.

3: **while** $p(x)$ no divida a todas la entradas de C, **do**

4: Encuentre la primera columna que contiene un elemento no divisible por $p(x)$ y sume esta columna a la primera de B.

5: Aplique el Paso 2 a B.

6: **end while**

7: Haga $A_1 = C$ y vaya al Paso 2.

En un número finito de iteraciones llegará a una matriz de la forma $\text{diag}\{m_1(x), m_2(x), \ldots, m_k(x), 1, \ldots, 1\}$, en donde $m_i(x)$ divide a $m_{i+1}(x)$. El polinomio mínimo de A es $m_k(x)$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A-xI} \begin{bmatrix} 1-x & 0 & -1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{21}(1-x)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & (1-x)^2 & -1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{21}\circ R_2(-1)} \begin{bmatrix} 1 & x-1 & 0 \\ 0 & (1-x)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xrightarrow{C_{12}(1-x}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-x)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{32}(1-x)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+(1-x)^3 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xrightarrow{C_{23}(1-x}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+(1-x)^3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{23}\circ R_2(-1)\circ R_3(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (x-1)^3+1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A-xI} \begin{bmatrix} 1-x & 0 & -1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{21}(1-x)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & (1-x)^2 & -1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{21}\circ R_2(-1)} \begin{bmatrix} 1 & x-1 & 0 \\ 0 & (1-x)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xrightarrow{C_{12}(1-x)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-x)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{32}(1-x)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+(1-x)^3 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xrightarrow{C_{23}(1-x)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+(1-x)^3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{23}\circ R_2(-1)\circ R_3(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (x-1)^3+1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xmapsto{A-xI} \begin{bmatrix} 1-x & 0 & -1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xmapsto{R_{21}(1-x)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & (1-x)^2 & -1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xmapsto{R_{21}\circ R_2(-1)} \begin{bmatrix} 1 & x-1 & 0 \\ 0 & (1-x)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xmapsto{C_{12}(1-x)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-x)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xmapsto{R_{32}(1-x)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+(1-x)^3 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xmapsto{C_{23}(1-x)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+(1-x)^3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xmapsto{R_{23}\circ R_2(-1)\circ R_3(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (x-1)^3+1 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A-xI} \begin{bmatrix} 1-x & 0 & -1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{21}(1-x)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & (1-x)^2 & -1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{21}\circ R_2(-1)} \begin{bmatrix} 1 & x-1 & 0 \\ 0 & (1-x)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xrightarrow{C_{12}(1-x)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-x)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{32}(1-x)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+(1-x)^3 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xrightarrow{C_{23}(1-x}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+(1-x)^3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{23}\circ R_2(-1)\circ R_3(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (x-1)^3+1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xmapsto{A-xI} \begin{bmatrix} 1-x & 0 & -1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xmapsto{R_{21}(1-x)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & (1-x)^2 & -1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xmapsto{R_{21}\circ R_2(-1)} \begin{bmatrix} 1 & x-1 & 0 \\ 0 & (1-x)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xmapsto{C_{12}(1-x)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-x)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xmapsto{R_{32}(1-x)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+(1-x)^3 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xmapsto{C_{23}(1-x)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+(1-x)^3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xmapsto{R_{23}\circ R_2(-1)\circ R_3(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (x-1)^3+1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xmapsto{A-xI} \begin{bmatrix} 1-x & 0 & -1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xmapsto{R_{21}(1-x)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & (1-x)^2 & -1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xmapsto{R_{21}\circ R_2(-1)} \begin{bmatrix} 1 & x-1 & 0 \\ 0 & (1-x)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xmapsto{C_{12}(1-x)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-x)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xmapsto{R_{32}(1-x)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+(1-x)^3 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xmapsto{C_{23}(1-x}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+(1-x)^3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xmapsto{R_{23}\circ R_2(-1)\circ R_3(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (x-1)^3+1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xmapsto{A-xI} \begin{bmatrix} 1-x & 0 & -1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xmapsto{R_{21}(1-x)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & (1-x)^2 & -1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xmapsto{R_{21}\circ R_2(-1)} \begin{bmatrix} 1 & x-1 & 0 \\ 0 & (1-x)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xmapsto{C_{12}(1-x)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-x)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xmapsto{R_{32}(1-x)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+(1-x)^3 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xmapsto{C_{23}(1-x}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+(1-x)^3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xmapsto{R_{23}\circ R_2(-1)\circ R_3(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (x-1)^3+1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xmapsto{A-xI} \begin{bmatrix} 1-x & 0 & -1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xmapsto{R_{21}(1-x)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & (1-x)^2 & -1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xmapsto{R_{21}\circ R_2(-1)} \begin{bmatrix} 1 & x-1 & 0 \\ 0 & (1-x)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xmapsto{C_{12}(1-x)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-x)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xmapsto{R_{32}(1-x)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+(1-x)^3 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xmapsto{C_{23}(1-x)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+(1-x)^3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xmapsto{R_{23}\circ R_2(-1)\circ R_3(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (x-1)^3+1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A-xI} \begin{bmatrix} 1-x & 0 & -1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{21}(1-x)}
$$

$$
\begin{bmatrix} 0 & (1-x)^2 & -1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{21}\circ R_2(-1)} \begin{bmatrix} 1 & x-1 & 0 \\ 0 & (1-x)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xrightarrow{C_{12}(1-x)}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-x)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{32}(1-x)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+(1-x)^3 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xrightarrow{C_{23}(1-x)}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+(1-x)^3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{23}\circ R_2(-1)\circ R_3(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (x-1)^3+1 \end{bmatrix}
$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A-xI} \begin{bmatrix} 1-x & 0 & -1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{21}(1-x)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & (1-x)^2 & -1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{21}\circ R_2(-1)} \begin{bmatrix} 1 & x-1 & 0 \\ 0 & (1-x)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xrightarrow{C_{12}(1-x)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-x)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{32}(1-x)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+(1-x)^3 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xrightarrow{C_{23}(1-x}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+(1-x)^3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{23}\circ R_2(-1)\circ R_3(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (x-1)^3+1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xmapsto{A-xI} \begin{bmatrix} 1-x & 0 & -1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xmapsto{R_{21}(1-x)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & (1-x)^2 & -1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xmapsto{R_{21}\circ R_2(-1)} \begin{bmatrix} 1 & x-1 & 0 \\ 0 & (1-x)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xmapsto{C_{12}(1-x)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-x)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xmapsto{R_{32}(1-x)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+(1-x)^3 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xmapsto{C_{23}(1-x)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+(1-x)^3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xmapsto{R_{23}\circ R_2(-1)\circ R_3(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (x-1)^3+1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A-xI} \begin{bmatrix} 1-x & 0 & -1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{21}(1-x)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & (1-x)^2 & -1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{21}\circ R_2(-1)} \begin{bmatrix} 1 & x-1 & 0 \\ 0 & (1-x)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xrightarrow{C_{12}(1-x)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-x)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{32}(1-x)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+(1-x)^3 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xrightarrow{C_{23}(1-x)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+(1-x)^3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{23}\circ R_2(-1)\circ R_3(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (x-1)^3+1 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}
\xmapsto{A-xI}
\begin{bmatrix} 1-x & 0 & -1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix}
\xmapsto{R_{21}(1-x)}
$$

$$
\begin{bmatrix} 0 & (1-x)^2 & -1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix}
\xmapsto{R_{21}\circ R_2(-1)}
\begin{bmatrix} 1 & x-1 & 0 \\ 0 & (1-x)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix}
\xmapsto{C_{12}(1-x)}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-x)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix}
\xmapsto{R_{32}(1-x)^2}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+(1-x)^3 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix}
\xmapsto{C_{23}(1-x}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+(1-x)^3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}
\xmapsto{R_{23}\circ R_2(-1)\circ R_3(-1)}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (x-1)^3+1 \end{bmatrix}
$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xmapsto{A-xI} \begin{bmatrix} 1-x & 0 & -1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xmapsto{R_{21}(1-x)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & (1-x)^2 & -1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xmapsto{R_{21}\circ R_2(-1)} \begin{bmatrix} 1 & x-1 & 0 \\ 0 & (1-x)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xmapsto{C_{12}(1-x)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-x)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xmapsto{R_{32}(1-x)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+(1-x)^3 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xmapsto{C_{23}(1-x}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+(1-x)^3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xmapsto{R_{23}\circ R_2(-1)\circ R_3(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (x-1)^3+1 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}
\xmapsto{A-xI}
\begin{bmatrix} 1-x & 0 & -1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix}
\xmapsto{R_{21}(1-x)}
$$

$$
\begin{bmatrix} 0 & (1-x)^2 & -1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix}
\xmapsto{R_{21} \circ R_2(-1)}
\begin{bmatrix} 1 & x-1 & 0 \\ 0 & (1-x)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix}
\xmapsto{C_{12}(1-x)}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-x)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix}
\xmapsto{R_{32}(1-x)^2}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+(1-x)^3 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix}
\xmapsto{C_{23}(1-x}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+(1-x)^3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}
\xmapsto{R_{23} \circ R_2(-1) \circ R_3(-1)}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (x-1)^3+1 \end{bmatrix}
$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A-xI} \begin{bmatrix} 1-x & 0 & -1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{21}(1-x)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & (1-x)^2 & -1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{21}\circ R_2(-1)} \begin{bmatrix} 1 & x-1 & 0 \\ 0 & (1-x)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xrightarrow{C_{12}(1-x}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-x)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{32}(1-x)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+(1-x)^3 \\ 0 & -1 & 1-x \end{bmatrix} \xrightarrow{C_{23}(1-x}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+(1-x)^3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{23}\circ R_2(-1)\circ R_3(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (x-1)^3+1 \end{bmatrix}$$

Bibliografía

S. Axler.
Down with Determinants.
Am. Math. Monthly, Vol. 102 (1995).

S. Axler.
Linear Algebra Done Right.
Springer-Verlag, (1997).

F. Barrera Mora.
Álgebra Lineal.
Grupo Editorial Patria Cultural, (2007).

inicio intr

S. Axler.
Down with Determinants.
Am. Math. Monthly, Vol. 102 (1995).

S. Axler.
Linear Algebra Done Right.
Springer-Verlag, (1997).

F. Barrera Mora.
Álgebra Lineal.
Grupo Editorial Patria Cultural, (2007).

inicio intr