UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

Escuela Superior Tepeji del Río

Escuela Superior Tepeji

Amor, Orden y Progreso

Área Académica: Ingenieria Industrial

Asignatura: Resistencia de los Materiales

Profesor(a):Miguel Ángel Hernández Garduño

Periodo: Julio- Diciembre 2011

Asignatura: Resistencia de los Materiales

Abstract

Mostrar habilidad para determinar los esfuerzos y deformaciones, en cualquier conjunto o elemento sólido.

.

Keywords: Esfuerzo, Deformación, Resistencia, Modulo de Young

- **ESFUERZOS Y DEFORMACIONES**
- Esfuerzos por cargas axiales
- Tipos de esfuerzos
- Ley de Hooke
- Modulo de Poisson

ENSAYO

incluso, sin tema alguno.

El ensayo es un producto crítico por excelencia.

ESTRUCTURA

- Portada: titulo
- Introducción
- Contenido
- Conclusiones
- Referencias

- Estructura libre

Características

- De forma sintética y de extensión relativamente breve
- Es concreto, sencillo, lógico y presenta las ideas en forma agradable al lector
- Variedad temática
- Estilo cuidadoso y elegante
- Tono variado, que corresponde a la manera particular conque el autor ve e interpreta al mundo.

Pasos

- **Lectura**
- **El subrayado:** localizar las ideas principales .
- **El análisis:** clasificación de la información.
- **La síntesis:** expresar en forma oral o por escrito, utilizando el propio estilo, las ideas de los autores con las palabras de uno mismo.
- **El comentario:** es una aportación personal, acompañado de reflexiones, criticas, comentarios y propuestas.

- **ESFUERZOS TERMICOS Y SISTEMAS HIPERESTATICOS**
- Dilatación térmica
- Ecuación de conducción de calor
- Esfuerzos térmicos
- Método general aplicado a sistemas Hiperestaticos
- Método de superposición
- Deformaciones por temperatura

TORCIÓN

- Introducción a la teoría de la torsión
- Esfuerzos y deformaciones en barras cilíndricas
- Esfuerzos y deformaciones en ejes estáticamente interdependientes
- Momento torsor en ejes de transmisión
- Torsión en tubos de pared delgada
- Resortes helicoidales

UNIVERSIDAD AUTONOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

- RESISTENCIA DE LOS MATERIALES

ESFUERZO TORSIONAL

- PRESENTA: Miguel Angel Hernandez Garduño

Esfuerzo torsional

Esfuerzo de corte desarrollado en un material sometido a una torque específico en un ensayo de torsión. Se calcula mediante la ecuación:

S=T.r/j

donde T es la torsión, r es la distancia desde el eje de giro a la fibra más exterior de la probeta y J es el momento polar de inercia.

PROBLEMA

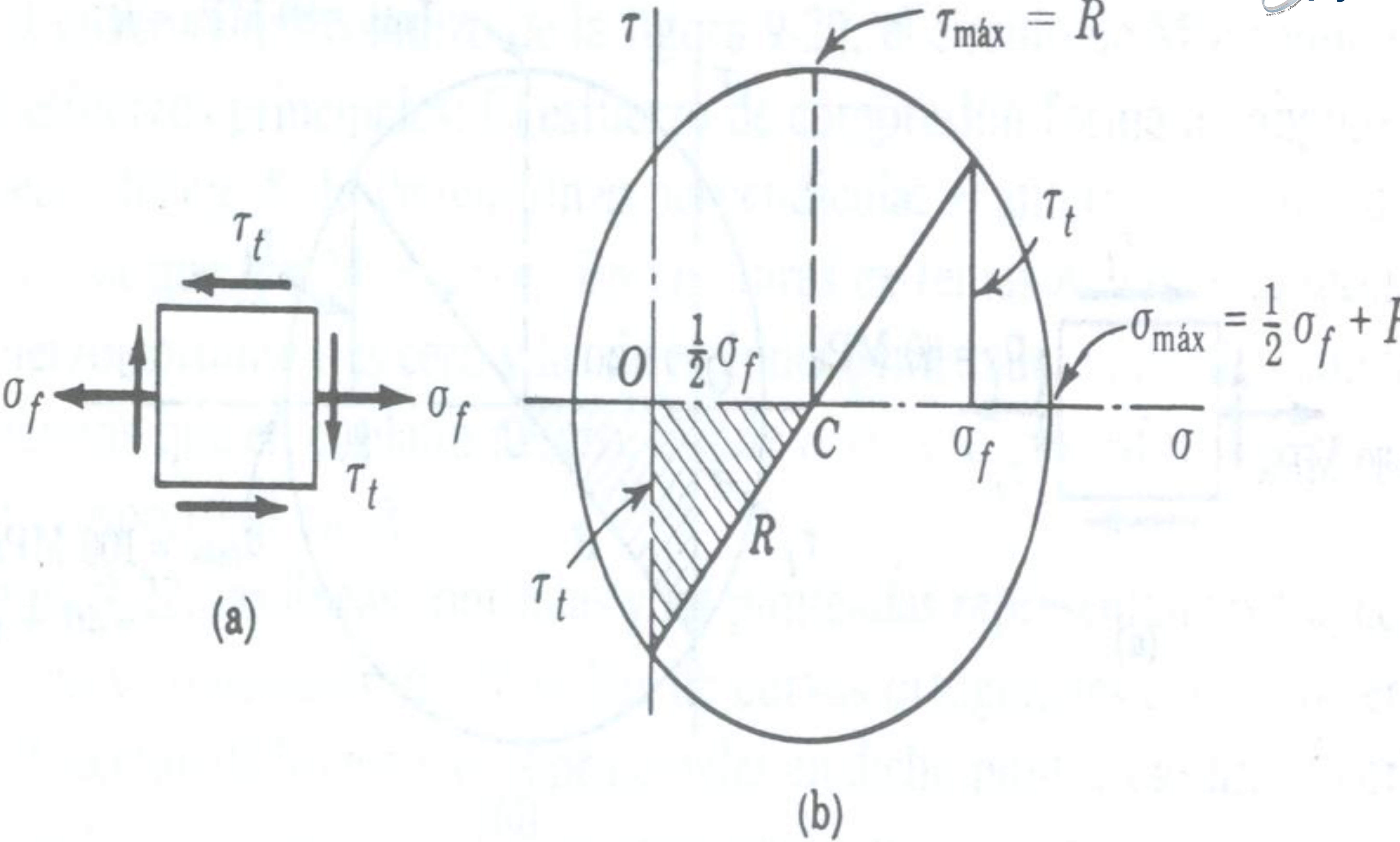
- Un eje macizo se somete a flexión y torsión simultaneas, producidas por un momento torsionante T y un momento flexionarte T. Expresar el esfuerzo cortante máximo y el esfuerzo normal máximo resultantes, en función de T, de M y de radio r del eje. Aplicar las relaciones obtenidas al caso de un eje cometido a un T=1200N.m y M=900N.m, para determinar su diámetro si los esfuerzos admisibles son de 70 MPa a cortante y 100 Mpa a flexión.

SOLUCION

- La flexión y la torsión simultaneas aparecen con frecuencia en el diseño de ejes giratorios. Las formulas que se desarrollan son muy útiles, pero su aplicación esta limitada al caso en que se conozcan T y M.

- En esta figura se muestra el estado de esfuerzo de un elemento de un eje sometido a flexión y torsión simultaneas, el circulo de mohr correspondiente. El esfuerzo cortante máximo T es igual al radio R de la circunferencia y del triangulo rayado se obtiene:

- T max= R√(1/2Ó



τ
$\tau_{máx} = R$
τ_t
σ_f
σ_f
τ_t
(a)
O
$\frac{1}{2}\sigma_f$
$\sigma_{máx} = \frac{1}{2}\sigma_f + R$
C
σ_f
σ
R
τ_t
τ_t
(b)

Figura 9-24.

- Esfuerzo cortante máximo T es igual al radio R de la circunferencia, y del triángulo rayado se obtiene

$$\tau_{\text{máx}} = R = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\sigma_f\right)^2 + (\tau_t)^2}$$

- Las fórmulas de la torsión y de la flexión, particularizadas para un eje circular macizo se escriben en la forma:

$$\sigma_f = \frac{4M}{\pi r^3} \quad \text{y} \quad \tau = \frac{2T}{\pi r^3}$$

$$\tau_{\text{máx}} = \sqrt{\left(\frac{2M}{\pi r^3}\right)^2 + \left(\frac{2T}{\pi r^3}\right)^2}$$

- O bien,

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{2}{\pi r^3}\sqrt{M^2 + T^2}$$

Haciendo $T_e = \sqrt{M^2 + T^2},$ se obtiene finalmente:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{2T_e}{\pi r^3}$$

- La semejanza entre la ecuación (9-11) y la fórmula de la torsión en (b) sugiere que a T, se le llame *momento torsionante equivalente.*

- La ecuación que se obtiene, para el esfuerzo normal máximo, análoga a la fórmula de la flexión, obliga a introducir el concepto de *momento flexionante equivalente* M_e, y se determina de la manera siguiente.

$$\sigma_{\text{máx}} = \tfrac{1}{2}\sigma_f + R.$$

- En la figura 9-24b, el esfuerzo normal máximo resultante vale $\sigma_f = 4M/\pi r^3$ y $R = 2T_e/\pi r^3$ Teniendo en cuenta que resulta:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{2}{\pi r^3}(M + T_e)$$

- Multiplicando por dos y dividiendo igualmente entre dos el segundo miembro,

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{4M_e}{\pi r^3}$$

- Que es la misma fórmula de la flexión (b), pero en la que se tiene el momento equivalente $M_e = (M + T_e)$.

- Las ecuaciones (9-11) y (9-12) son, pues, las mismas fórmulas de la torsión y de la flexión. Lo único que se debe recordar son los valores de los momentos equivalentes a torsión y a flexión respectivamente, dados por:

$$T_e = \sqrt{M^2 + T^2}$$

$$M_e = \tfrac{1}{2}(M + T_e)$$

- En el caso particular del ejemplo, y de acuerdo con los datos del enunciado, los momentos equivalentes a torsión y de flexión son:

$$T_e = \sqrt{M^2 + T^2} = \sqrt{(900)^2 + (1200)^2} = 1500\ \mathrm{N\cdot m}$$

$$M_e = \tfrac{1}{2}(M + T_e) = \tfrac{1}{2}(900 + 1500) = 1200\ \mathrm{N\cdot m}$$

- El radio del árbol para que el esfuerzo normal máximo no exceda el admisible, según la ecuación (9.11), viene dado por:

$$\tau = \frac{2T_e}{\pi r^3} \qquad 70 \times 10^6 = \frac{2(1500)}{\pi r^3} \quad \text{o} \quad r = 23.9 \times 10^{-3}\ \mathrm{m} = 23.9\ \mathrm{mm}$$

no exceda al admisible, según la ecuación (6-12), viene dado por :

$$\left[\tau = \frac{4M_e}{\pi r^3}\right] \qquad 100 \times 10^6 = \frac{4(1200)}{\pi r^3} \quad \text{o bien,} \quad r = 24.8 \times 10^{-3}\ \text{m} = 24.8\ \text{mm}$$

- El mayor de los valores obtenidos cumple ambas condiciones y, por tanto, es el diámetro necesario.

$$d = 2 \times 24.8 = 49.6\ \text{mm}$$

FLEXION

- Diagrama de esfuerzos cortantes y momentos flexionales
- Esfuerzos flexionantes
- Esfuerzo cortante en vigas
- Calculo de vigas y selección del perfil económico

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Escuela Superior Tepeji del Rio

Profesor: Miguel Angel Hernández Garduño

Materia: Resistencia de los Materiales

TEMA: Deducción de la formula de flexión

INTRODUCCIÓN

En este apartado estudiaremos la relación entre el momento flexionante y los esfuerzos normales y el desarrollo de la formula de flexión a partir de las siguientes hipótesis:

- Hipótesis 1:

La secciones planas de la viga, inicialmente planas, permanecen planas

- Hipótesis 2:

El material es homogéneo y obedece a la ley de HOOKE

- Hipótesis 3:

El modulo elástico es igual a la tensión que a la compresión

- Hipótesis 4:

La viga es inicialmente recta y de sección constante

- Hipótesis 5:

El plano en el que actúan las fuerzas contiene a uno de los ejes principales de la sección recta de la viga y las cargas actúan perpendicularmente al eje longitudinal de aquella.

- Los esfuerzos normales producidos por el elemento flexionante se llama esfuerzo por flexión y tiene relación entre los esfuerzos y el momento flexionante los cuales se expresa en base ala formula de flexión.

- Tiene el mismo principio de deducción de la formula de torsión que ya hemos estudiado en clase, las deformaciones elásticas junto con la ley de Hooke, determinan la forma de la distribución de esfuerzos y mediante las condiciones de equilibrio y la relación entre los esfuerzos y las cargas.

- **Para recordar:**

- **ley de elasticidad de Hooke** o **ley de Hooke**, formulada para el estiramiento longitudinal, establece que el alargamiento unitario que experimenta un material elástico es directamente proporcional a la fuerza aplicada *F*:

- donde: δ: es el alargamiento *A:* la sección transversal p.E

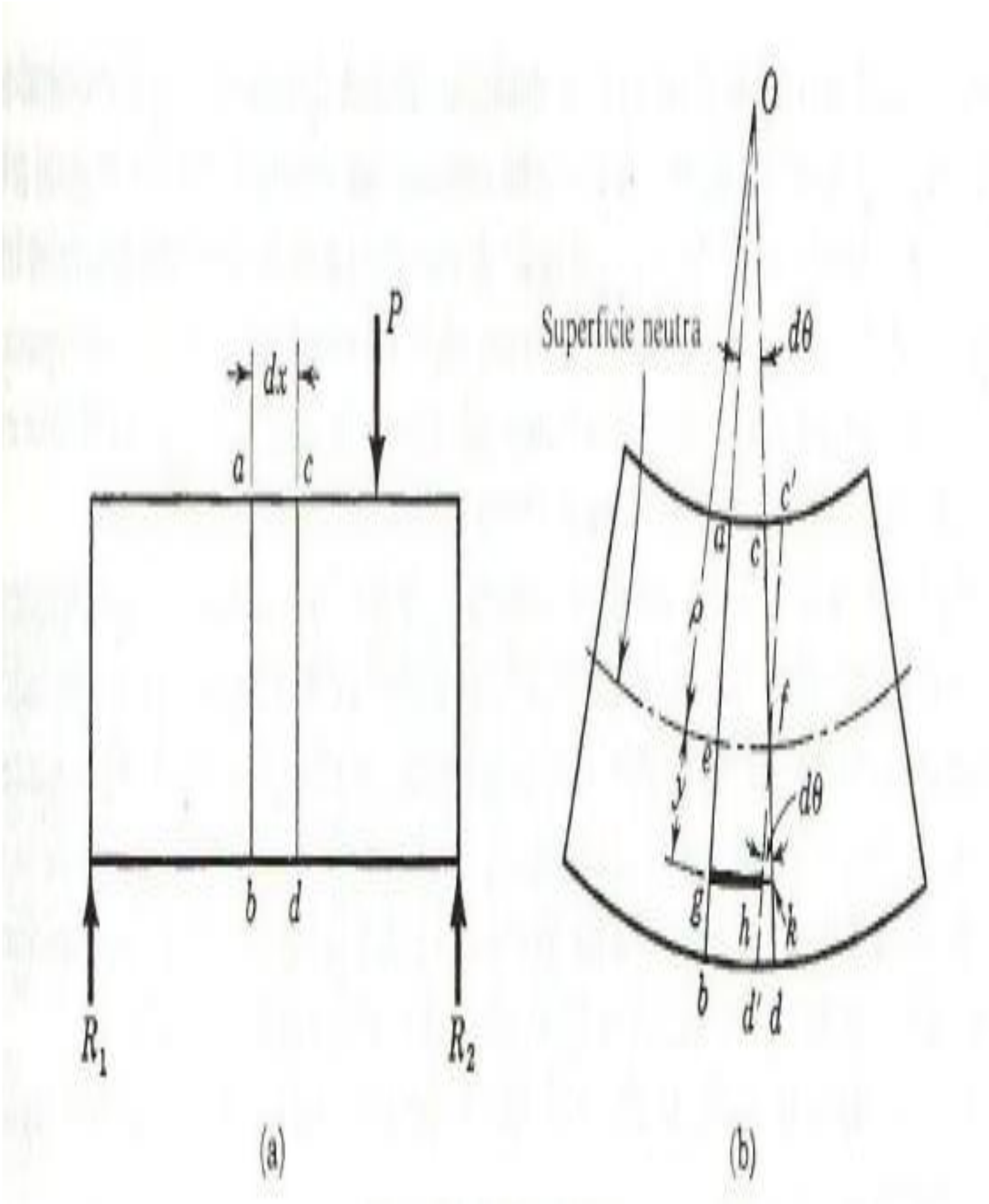
- *L:* la longitud original

- *E*: módulo de Young

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{F}{AE}$$

- La ley se aplica a materiales elásticos hasta un límite denominado límite elástico.

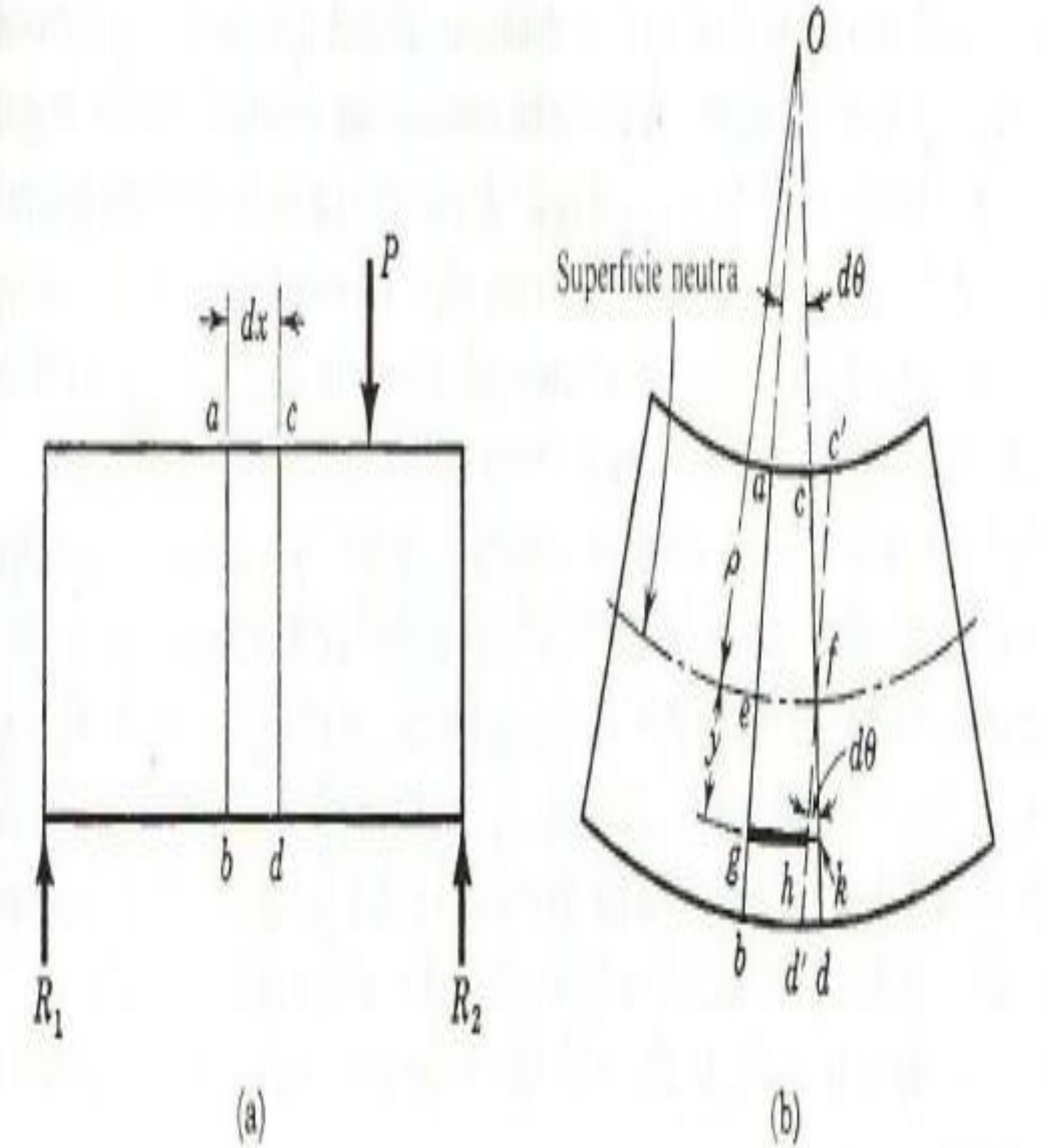
Comportamiento interno al generase la flexión



- En la figura se muestra 2 secciones ab,cd separadas por una distancia dx, debido ala flexión que genero la fuerza p.

- Estas secciones conllevan un giro una de otra en donde se tiene un Angulo.

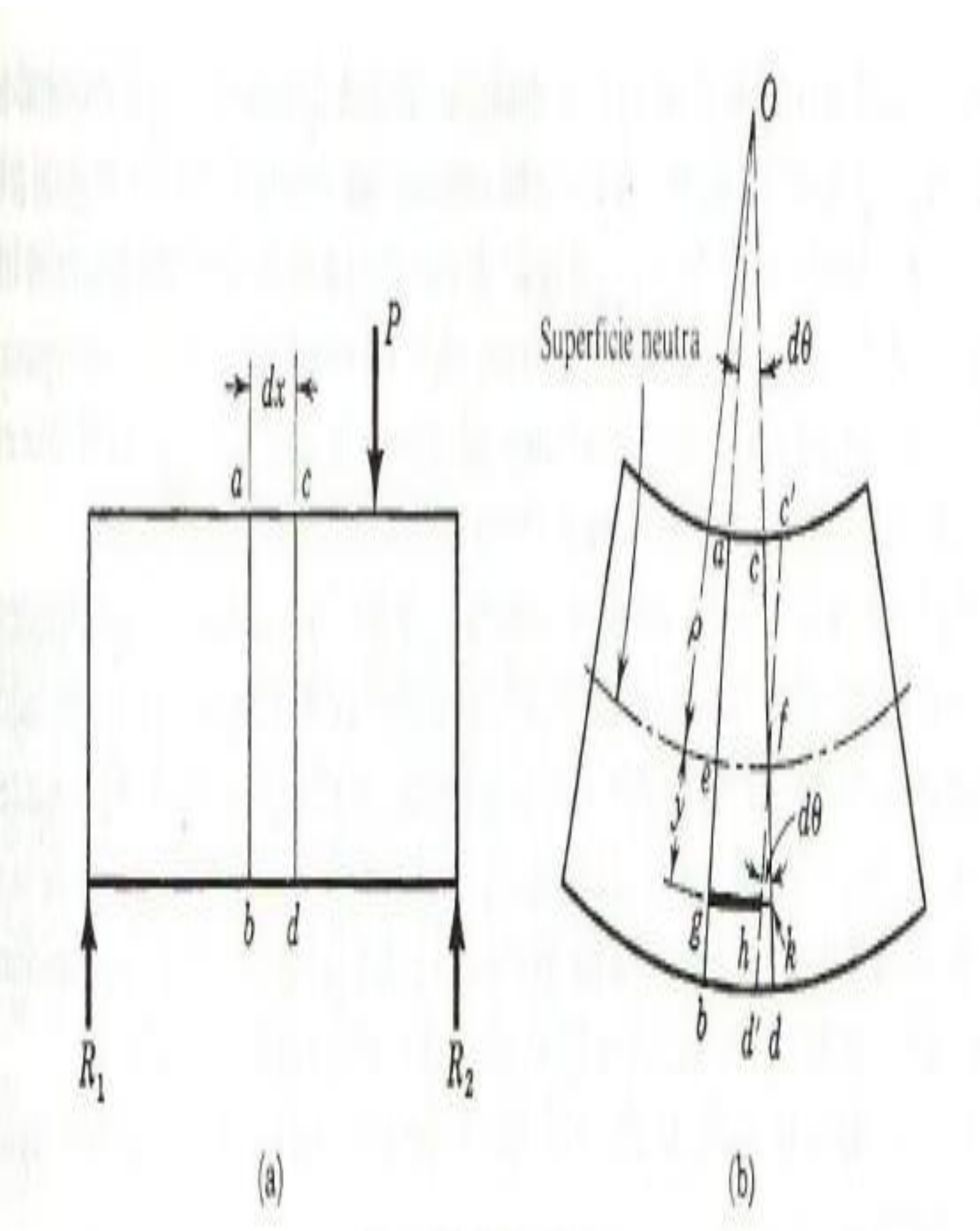
- En la seccion ab, se puede ver que existe un acortamiento y en la seccion cd un alargamiento, y existe una seccion ef la cual permanece la distancia sin afectación que llamaremos seccion neutra.



(a) (b)

- Se puede observar seccion ac que existe el acortamiento de la longitud cc´ y se esta generando una compresión

- mientras que en la seccion bd se esta generando el alargamiento en la longitud d´d y existe en este punto una tensión.



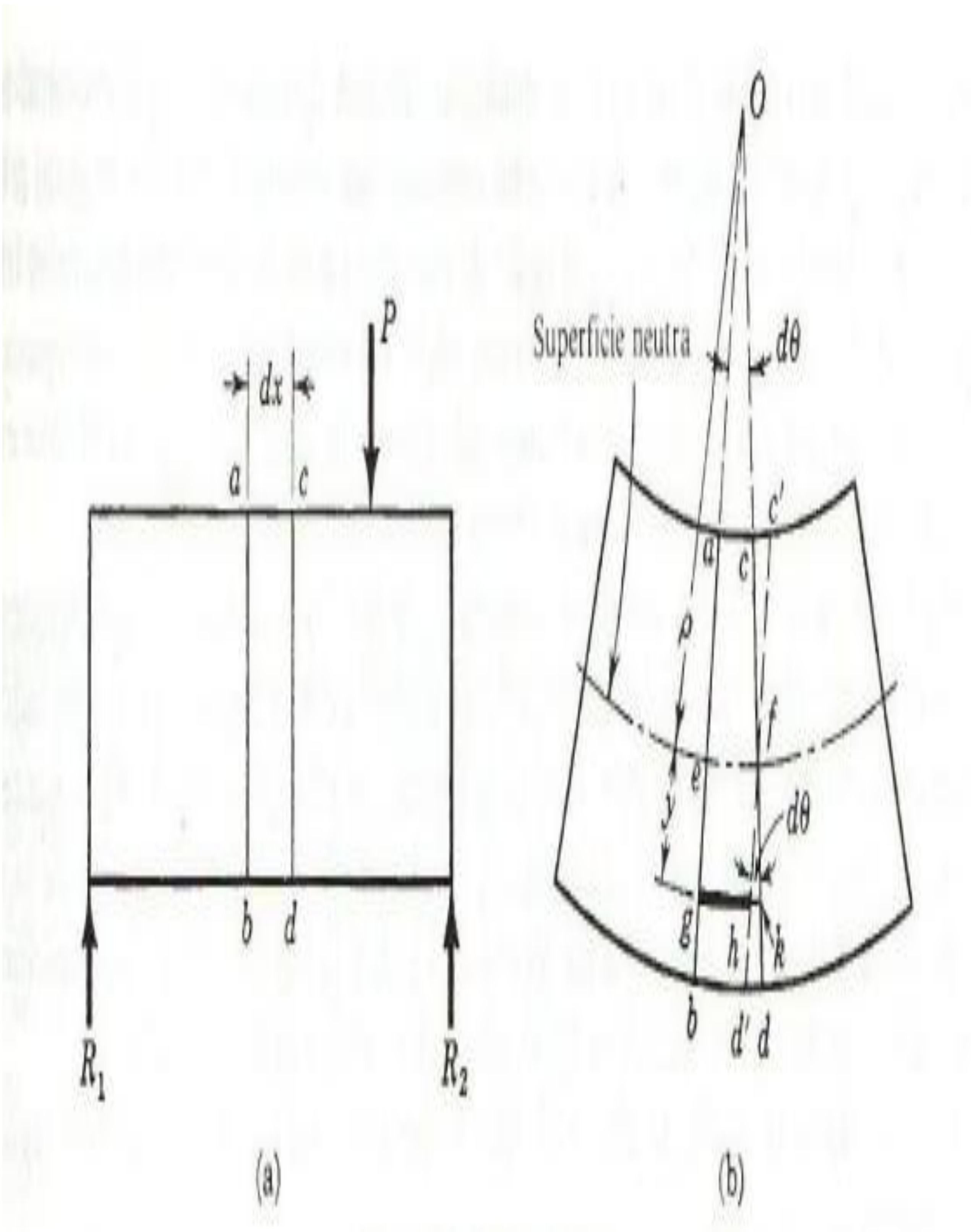
- La deformación que se presenta en el punto hg se presenta en la parte neutra (y)

- el alargamiento que se presenta en la parte hk que es el arco de la circunferencia de radio, y ()y Angulo dθ que se expresa de la siguiente forma:

$$\delta = hk = y\ d\theta$$

La deformación se obtiene dividiendo el alarg... re la longitud inicial(ef)

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{y\ d\theta}{ef}$$



- Llamaremos p al radio de la curva de la superficie neutra, la longitud ef es igual a p dθ por lo que la defor s:

$$\epsilon = \frac{y\ d\theta}{\rho\ d\theta} = \frac{y}{\rho}$$

Suponiendo que el material es homogéneo y obedece a la ley de Hooke, hipótesis 2 el es cción gh se representa en la siguiente formula:

$$\sigma = E\epsilon = \left(\frac{E}{\rho}\right)y$$

Esta expresión indica que el esfuerzo en cualquier espacio es directamente proporcional a su distancia (y) a la superficie neutra, ya que se ha supuesto que el modulo elástico es igual a tensión que a compresión , hipótesis 3 y el radio de curvatura p de la superficie neutra es independiente de la ordenada (y)

- Los esfuerzos no deben sobre pasar el limite de proporcionalidad puesto que en caso contrario dejara de cumplirse la ley de Hooke en la que se ha basado la determinación de la forma de distribución de los esfuerzos.

- Para completar la deducción de la formula de la flexión se aplican las condiciones de equilibrio, donde las fuerzas exteriores que actúan a un lado de la sección en estudio quedan equilibradas por la fuerza cortante y el momento flexionante resistentes.

- Para que se produzca este equilibrio un elemento diferencial cualquiera de la sección de exploración es sometido a las fuerzas que indica la figura 5-2

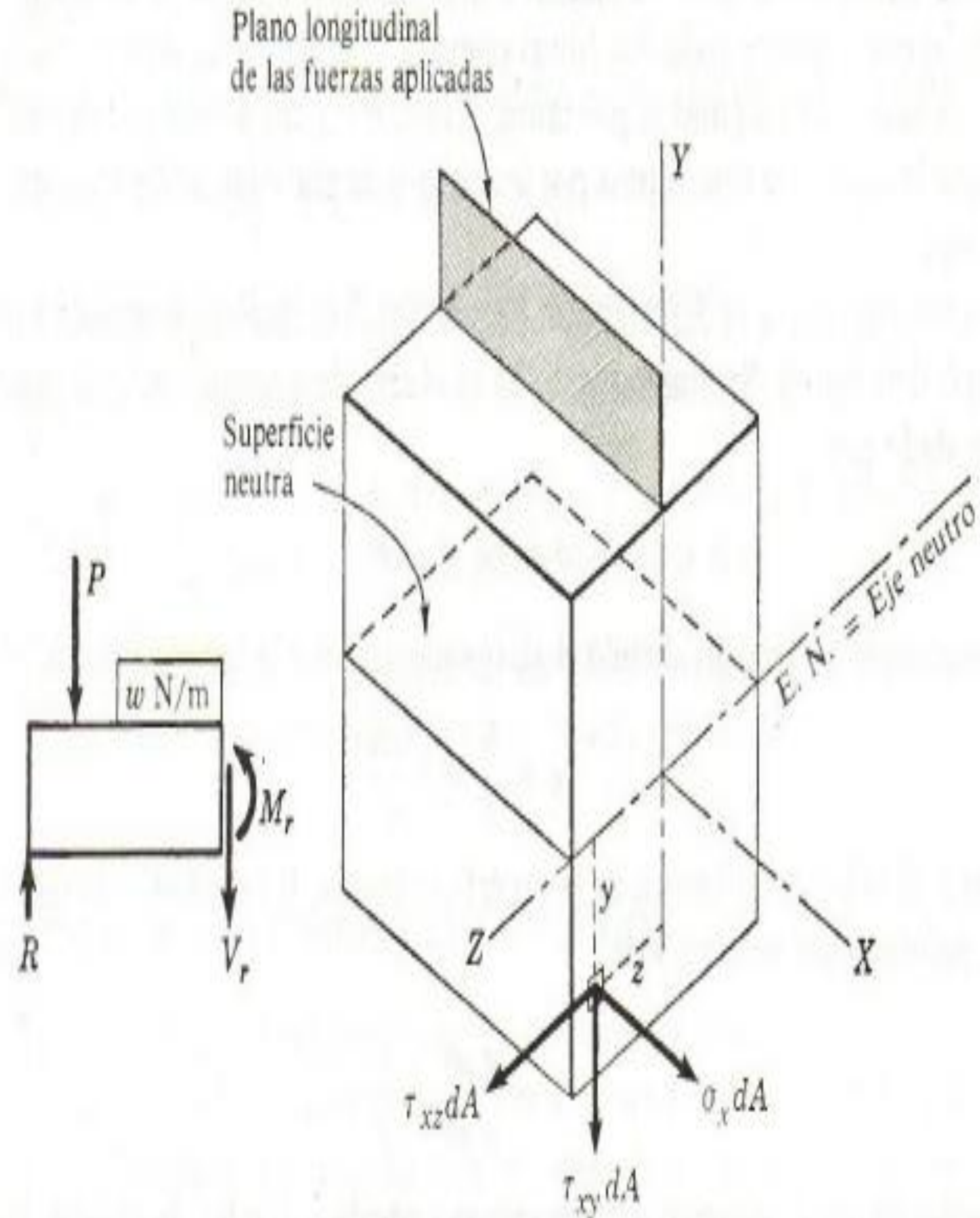


Figura 5-2. Fuerzas que actúan sobre un elemento de área de la sección recta.

- La intersección de la superficie neutra con la sección se llama eje neutro abreviadamente E.N, para satisfacer la condición de que las fuerzas exteriores no tengan componente según el eje x, hipótesis 5 se tiene:

$$[\Sigma X = 0] \qquad \int \sigma_x \, dA = 0$$

en donde σ_x equivale a σ de la ecuación (a). Sustituyendo σ_x por su valor Ey/ρ y resulta,

$$\frac{E}{\rho}\int y \, dA = 0$$

Los términos E y p son constantes y se han sacado de la integral, como ydA es el momento estático del área difer … on respecto al … , la

$$\frac{E}{\rho} A\bar{y} = 0$$

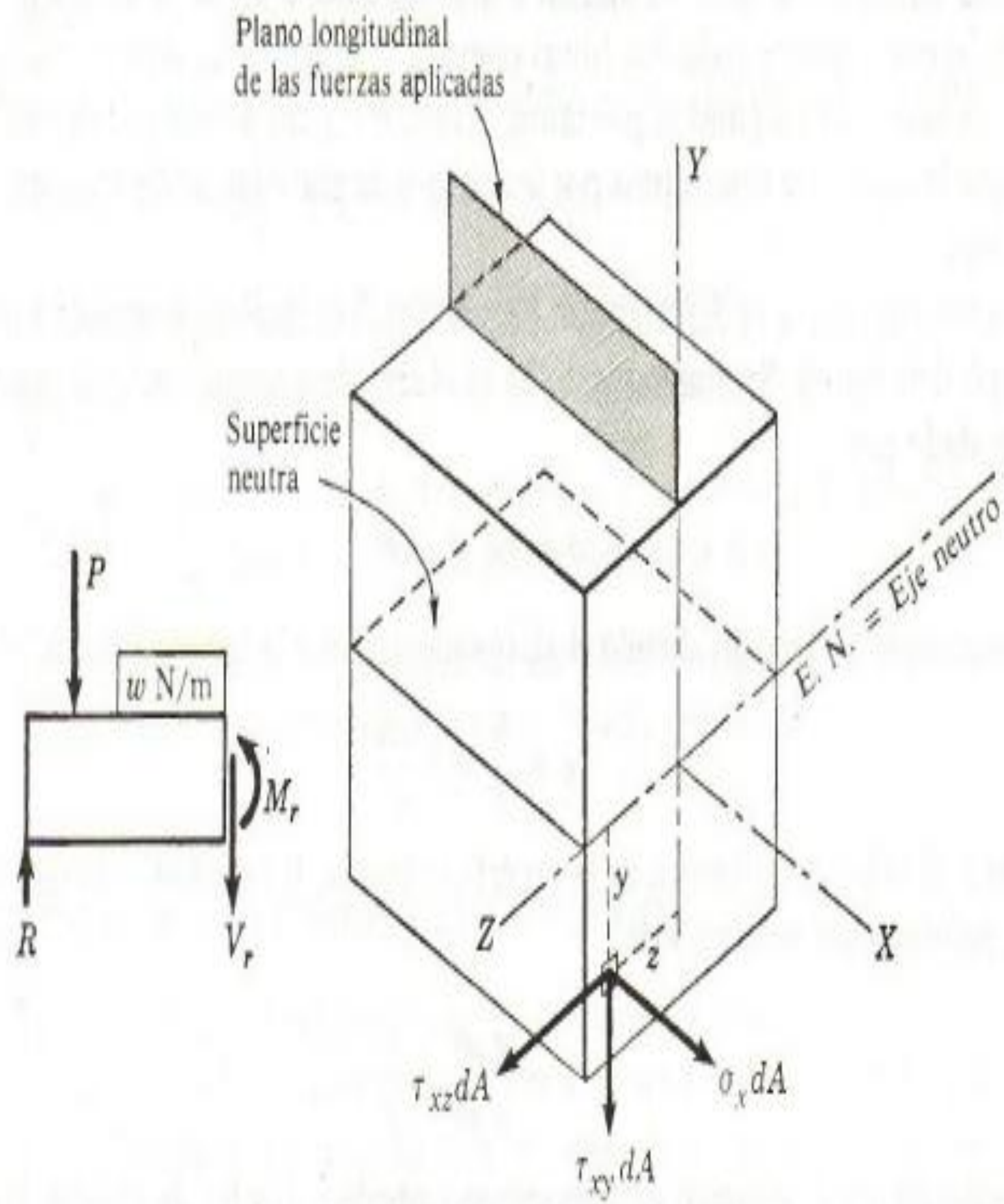


Figura 5-2. Fuerzas que actúan sobre un elemento de área de la sección recta.

- Y en esta expresión es nulo, deduce que la distancia al eje neutro de la sección recta debe ser cero, es decir que la línea neutra pasa por el centroide del área de la sección transversal.

- La condición $\Sigma y=0$ y da V=V la cual conduce ala formula del esfuerzo cortante, se hace observar que la fuerza cortante resistente v es la suma de todas las fuerzas cortantes Txy dA $Vr=\int Txy\, dA$.

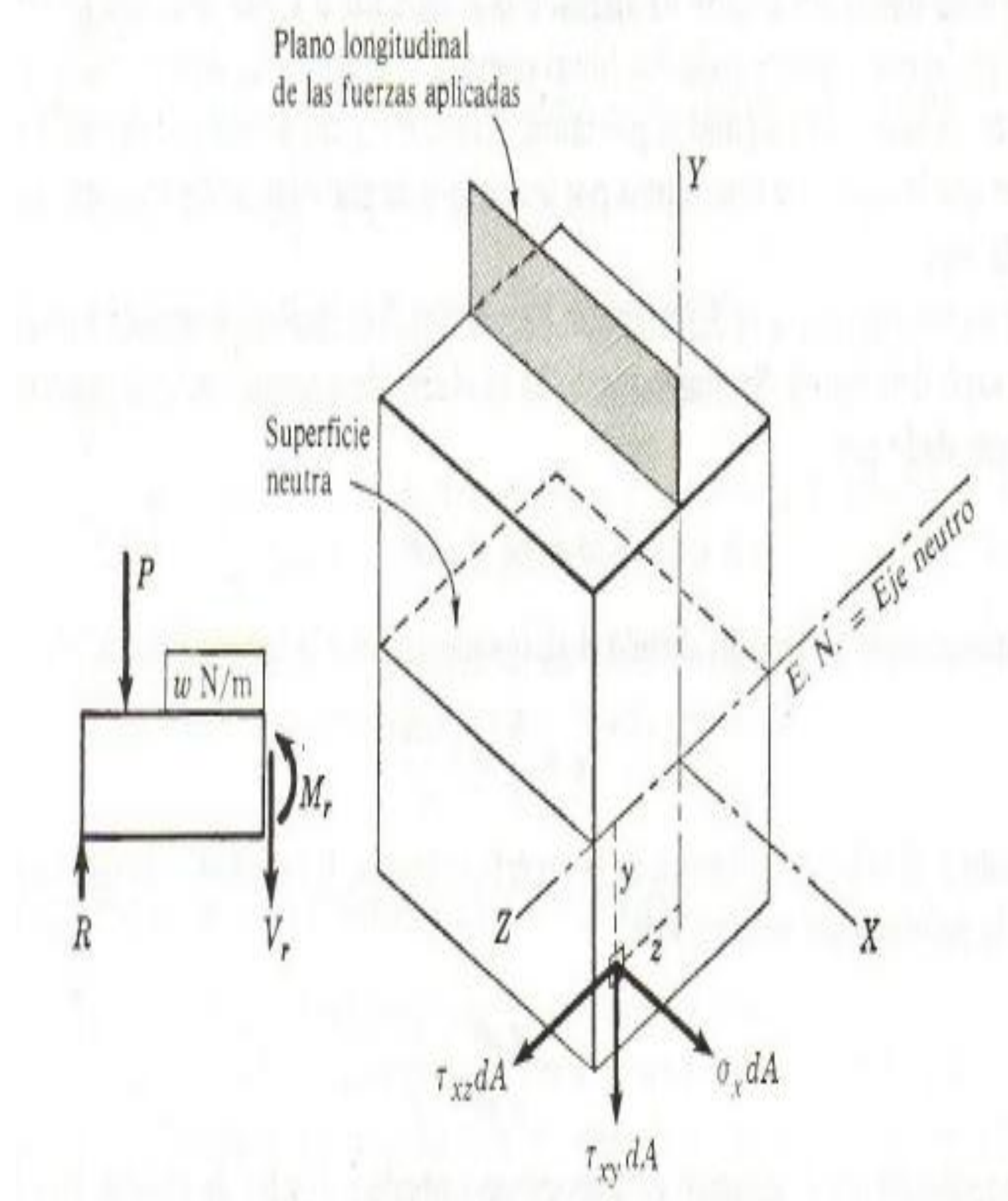


Figura 5-2. Fuerzas que actúan sobre un elemento de área de la sección recta.

- La condiccion $\sum Z=0$ conduce $\int Txz \; dA=0$ puesto que las fuerzas exteriores no tienen componentes en el eje Z en el sistema de fuerzas cortantes Txz dA esta en equilibrio.

$$[\Sigma M_y = 0] \qquad \int z(\sigma_x \, dA) = 0$$

- Consideremos la ... las ... no ... con respecto al eje Y ni tampoco las fuerzas interiores por tanto.

Sustituyendo σ_x por Ey/ρ, resulta,

$$\frac{E}{\rho}\int zy \, dA = 0$$

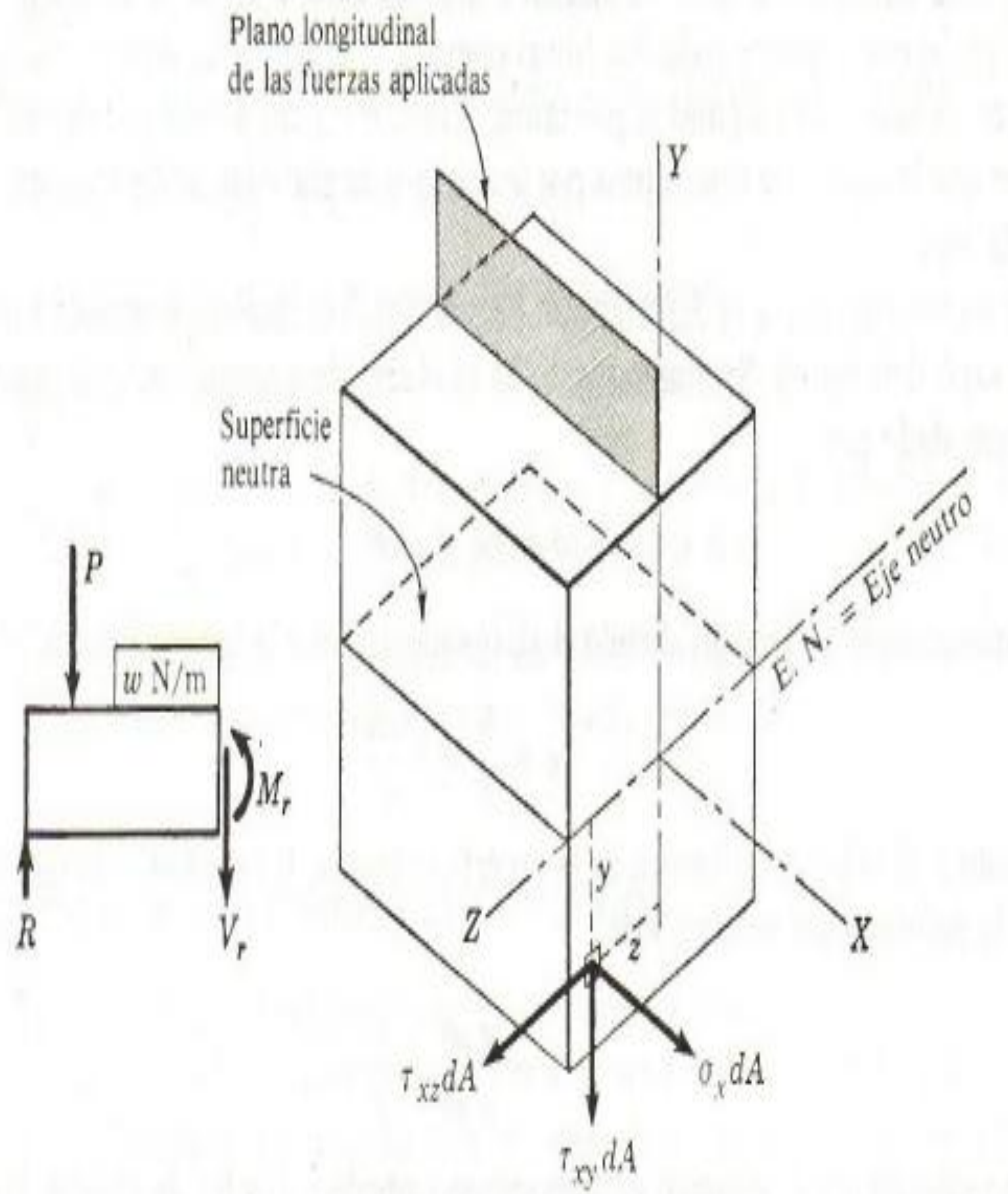


Figura 5-2. Fuerzas que actúan sobre un elemento de área de la sección recta.

- La integral ∫zy dA es el producto de inercia Pzy, que es nulo solamente si Y y Z son ejes de simetría o eje principal de la sección, esto comprueba la hipótesis 5.

- La condiccion de equilibrio ΣMz=0 esto requiere que el momento flexionante sea equilibrado por el momento resistente, M= Mr.

- El momento resister $y(\sigma_x dA)$ y, respecto al eje neutro es:

Por tanto es queda

$$M = \int y(\sigma_x\, dA)$$

co...:

Sustituyendo σ_x por Ey/ρ, resulta

$$M = \frac{E}{\rho}\int y^2\, dA$$

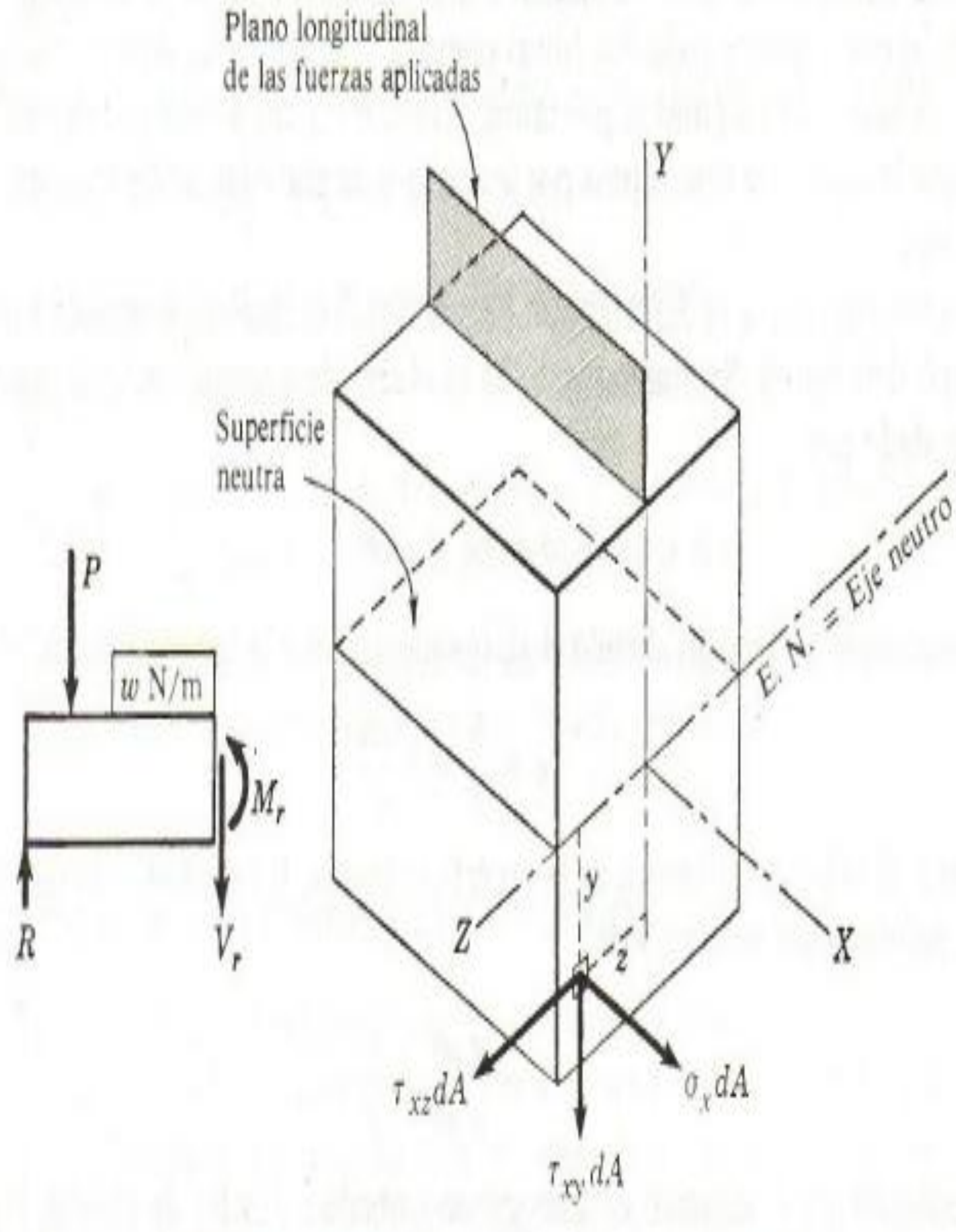


Figura 5-2. Fuerzas que actúan sobre un elemento de área de la sección recta.

Puesto que ∫y2 dA es el momento de inercia I del área con respecto al eje de referencia qu

$$M = \frac{EI}{\rho}$$

este caso es el eje neutro que pasa por el centro de gravedad y s e.

Una forma mas formal de describir esta

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

a es:

Esta formula indica que la curva es directamente proporcional

$$\frac{E}{\rho} = \frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}$$

al momento fle e. Igualando la relación de E/p deducida en esta

- Que conduce directamente ala formula de la flexión también llamada formula de escuad

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

Esta expresión indica que el esfuerzo debido a al flexión en cualquier sección es directamente proporcional a la distancia del punto considerado ala línea neutra. Una forma mas cor

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I}$$

a formula de flex obtiene sustituyendo y por la distancia c del elemento

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M}{I/c} = \frac{M}{S}$$

- El cociente I/C se llama modulo de resistencia de la sección o simplemente. Modulo de sección y se suele asignar por S por lo que la formula de la flexión adquiere la forma:

VIGAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS

- Deflexiones y pendientes
- Deflexiones por integración y por áreas de momentos
- Vigas estáticamente indeterminadas

VIGAS ASIMETRICAS

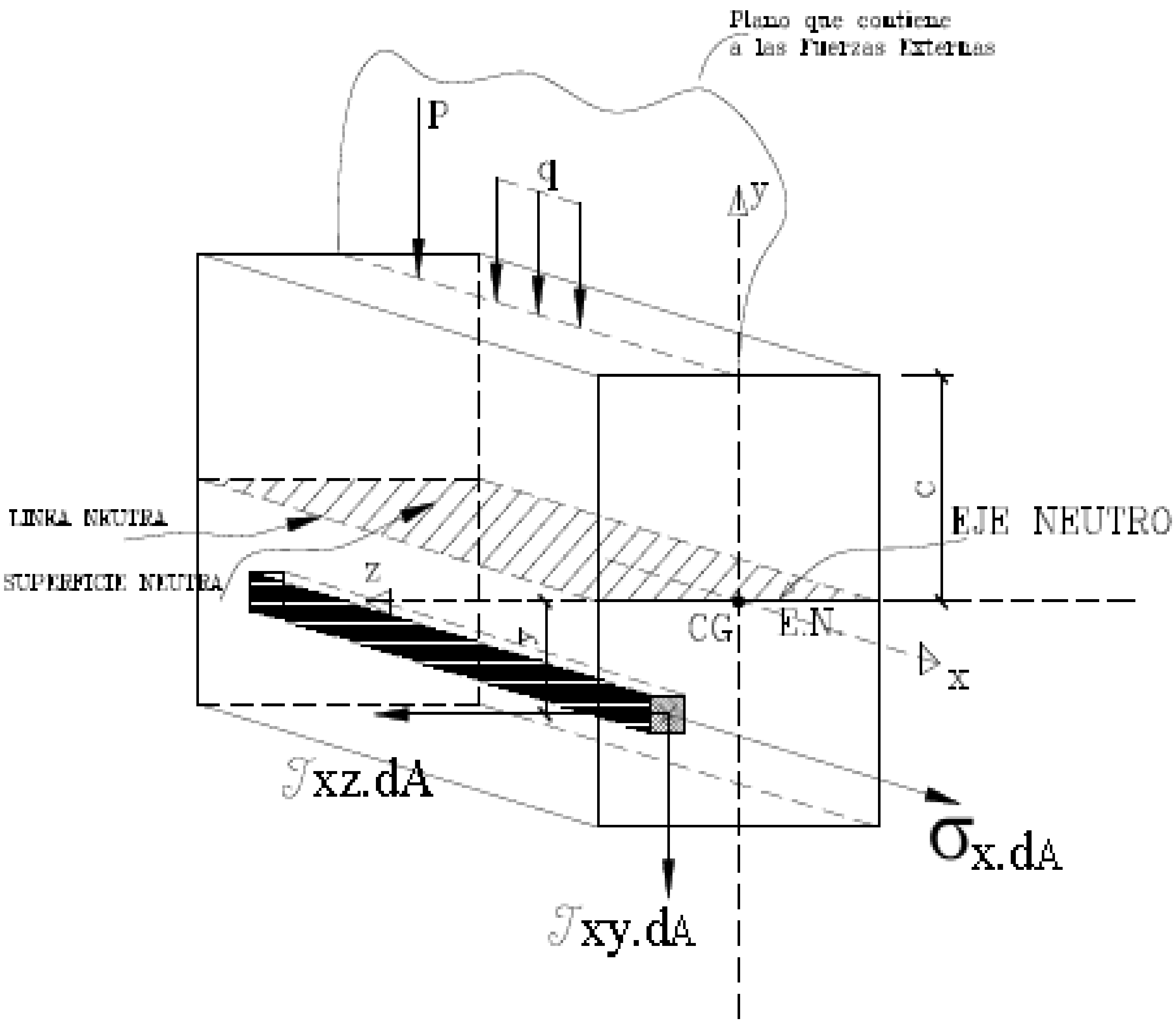
Vigas

Son elementos cuya disposición en las estructuras es principalmente horizontal, aunque también pueden ser inclinadas, pero que en todo caso tienen la importante función de servir de apoyo de otros miembros estructurales que le transmiten las cargas verticales generadas por la gravedad, las cuales actúan lateralmente a lo largo de su eje.

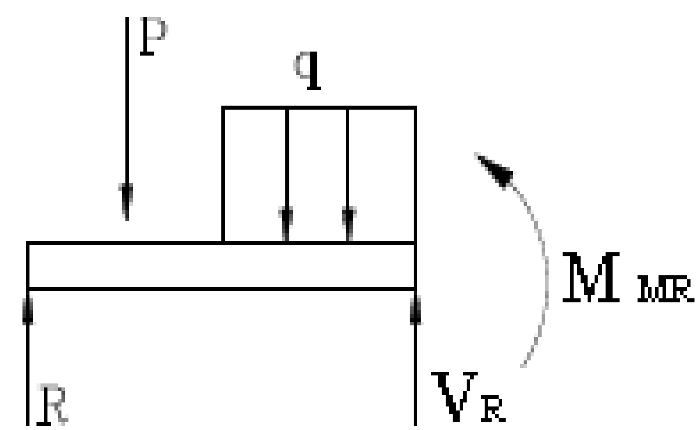
Vigas Simetricas

- Todas las vigas examinadas hasta ahora eran de sección simétrica con respecto a la línea neutra.

- Como el esfuerzo por flexión varia linealmente con la distancia al eje neutro que pasa por el centro de gravedad



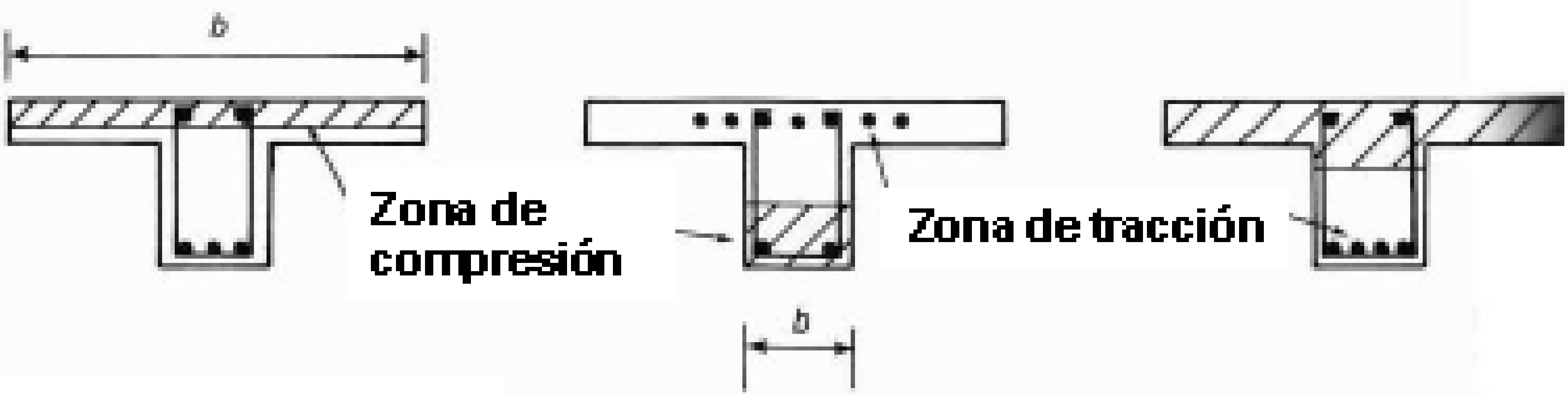
Plano que contiene
a las Fuerzas Externas
P
q
y
LINEA NEUTRA
SUPERFICIE NEUTRA
z
c
EJE NEUTRO
CG
E.N.
x
𝒯xz.dA
σx.dA
𝒯xy.dA



P
q
M MR
R
VR

Vigas Asimetricas

Emplean secciones asimétricas con respecto al E. N. Con esta forma de sección, las fibras de gran resistencia pueden colocarse a mayor distancia de la línea neutra que las fibras más débiles. La sección ideal sería aquella en la que el centro de gravedad, o sea la línea neutra, se colocaba en tal posición que la relación de distancias a las fibras que van a quedar sometidas a la máxima tensión y compresión, fuera de la misma que la relación de los esfuerzos admisibles para cada caso.

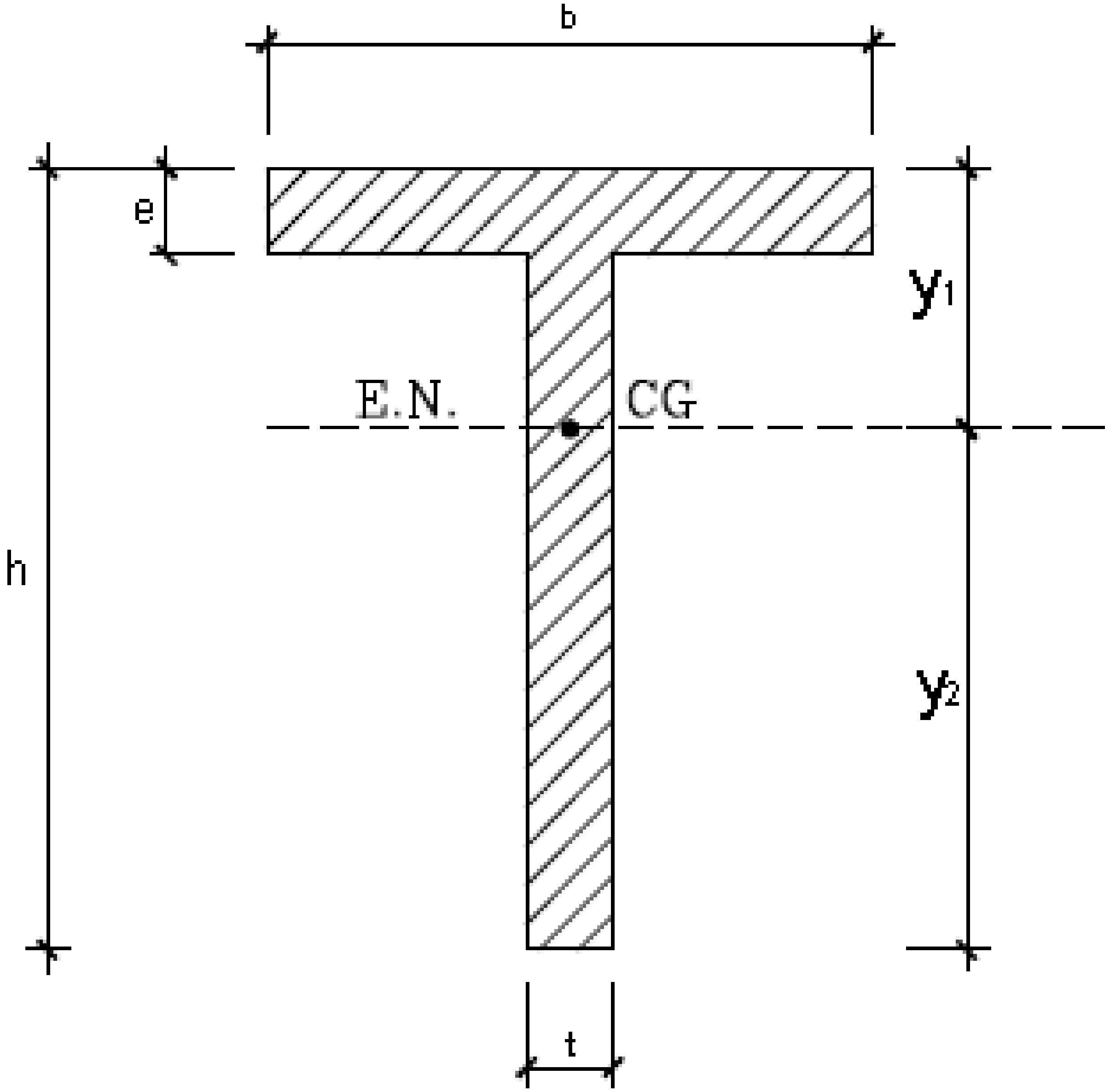


Sección A-A (sección rectangular – zona compresión)

Sección B-B (momento negativo)

Sección A-A (sección T – zona compresión)

- En los casos de materiales que tienen diferente capacidad admisible a compresión que a tracción, como el caso del concreto armado, puede ser necesario encontrar alguna dimensión de la sección, para hacer que se alcance las resistencias admisibles simultáneamente a tension y compresión



$$\sigma^{T}_{ADM} \neq \sigma^{C}_{ADM}$$

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I}$$

$$\sigma^{C}_{ADM} = \frac{M \cdot y_1}{I} \quad ; \qquad \sigma^{T}_{ADM} = \frac{M \cdot y_2}{I}$$

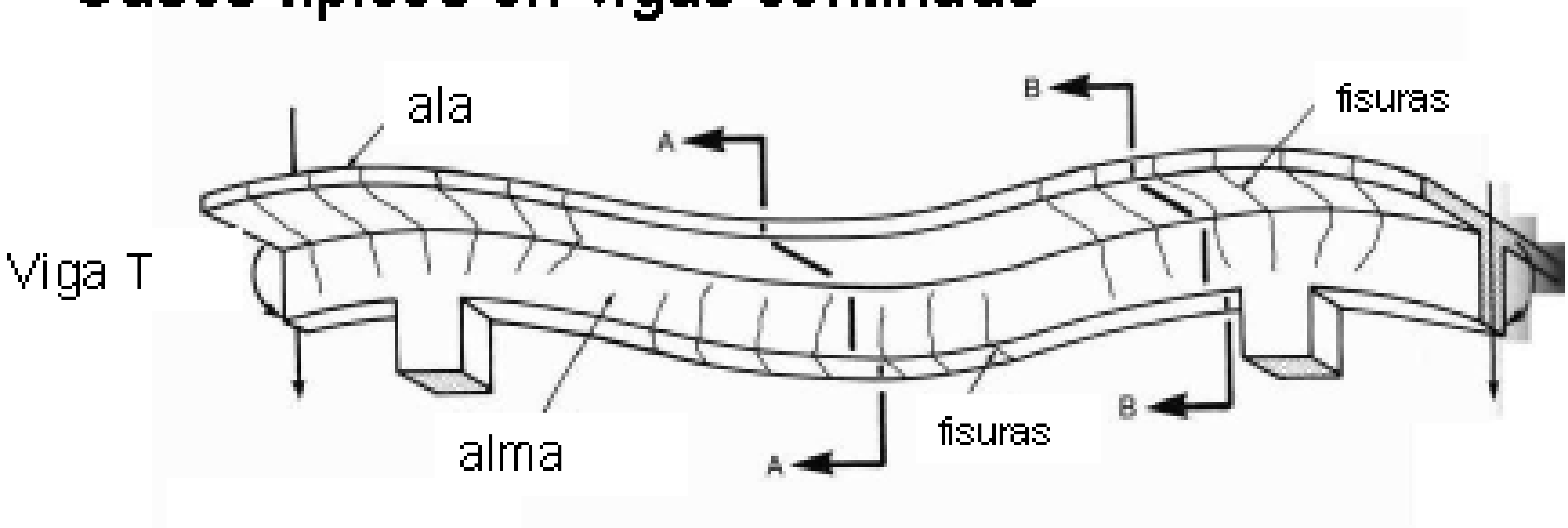
① ②

$$\boxed{\frac{\sigma^{C}_{ADM}}{\sigma^{T}_{ADM}} = \frac{y_1}{y_2}} \qquad \boxed{y_1 + y_2 = h}$$

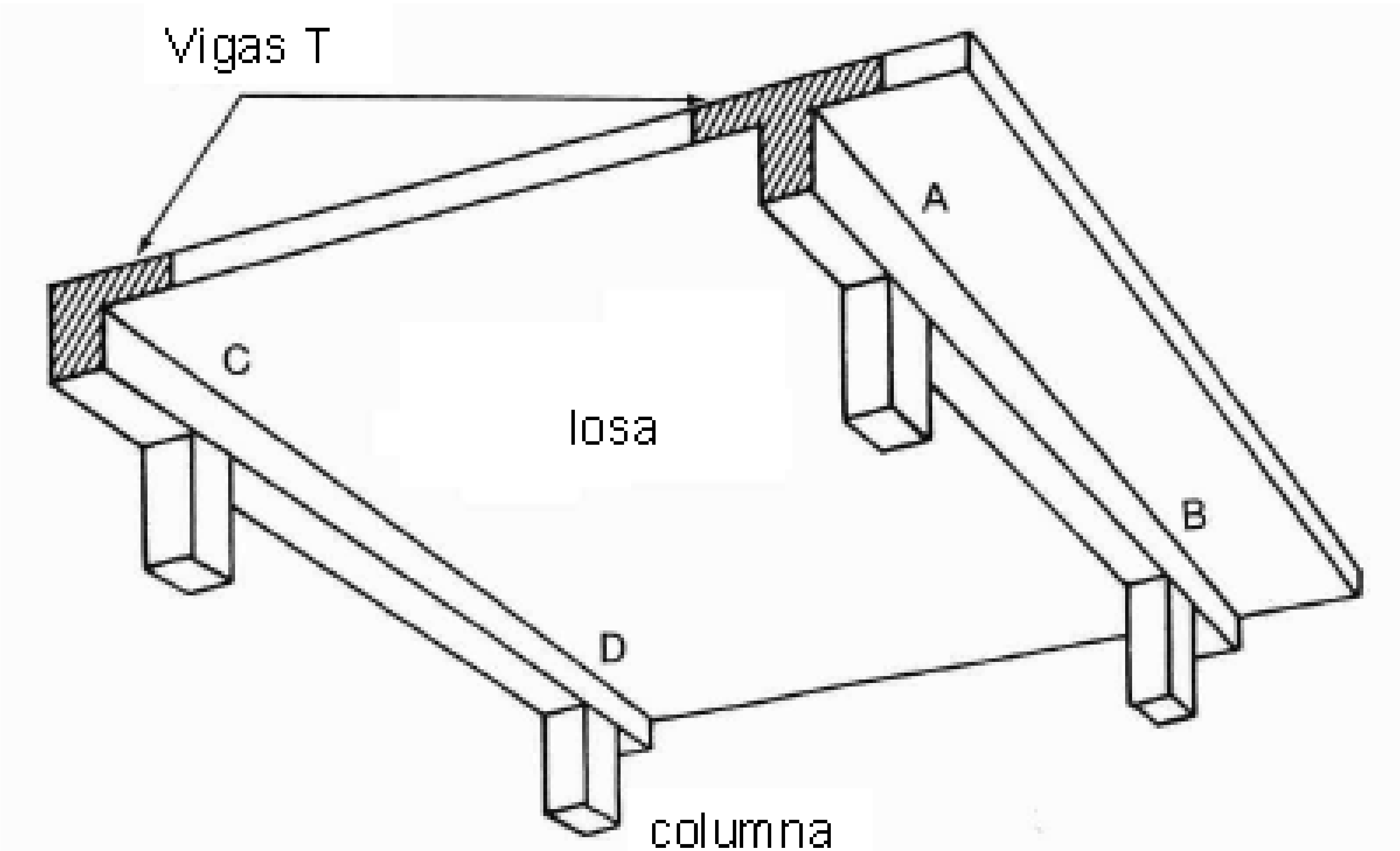
- Para calcular alguna de las dimensiones b, t, ò e: Se igualan los Momentos Estáticos respecto a un eje común: $A \cdot Y = \Sigma A_i \cdot y_i$

- $[(h - e)\, t + e \cdot b\,]\, y_2 = e/2 \cdot b\,(\, h - e/2) + (h - e) \cdot t = (h - e)$

– Casos típicos en vigas continuas



– Usualmente son vigas con colaboración de losas (elemento monolítico)



TRANSFORMACIONES DE ESFUERZOS

- Esfuerzo normal y de corte en planos inclinados
- Esfuerzos principales
- Esfuerzo cortante máximo
- Representación gráfica de un elemento esforzado
- Circulo de Mohr
- Recipientes a presión

- Bibliografia: Singer y Young, Resistencia de Materiales, pp