Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Escuela Superior de Tizayuca

Ingeniería en Tecnologías de Automatización

Vectores

Dr. Farid García Lamont

Enero-Junio de 2012

Tema: Vectores

Abstract

These slides introduce the definition of vector, besides the vectors' characteristics and operations.

Keywords: Euclidean norm, vector space, vector operations.

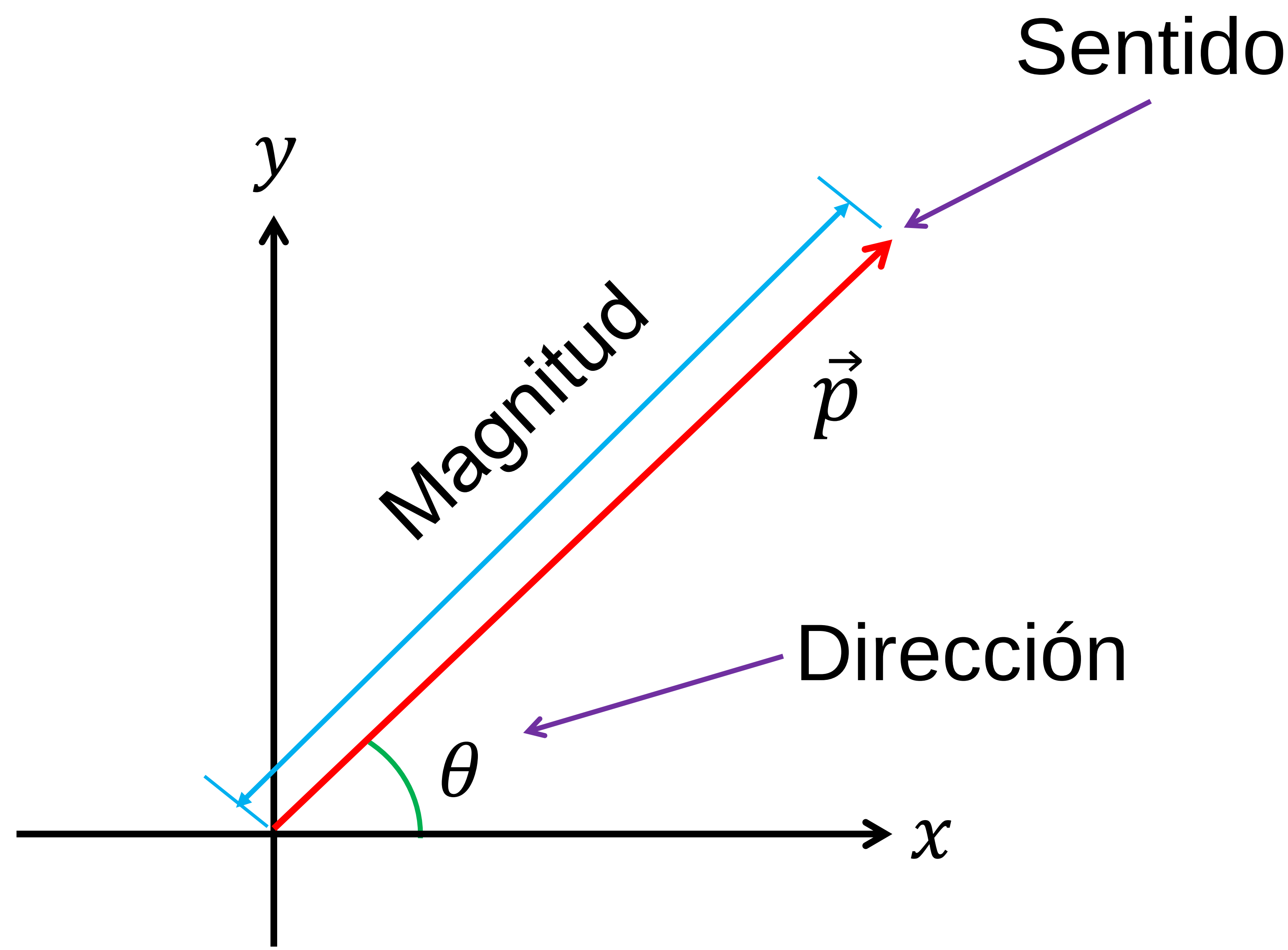
Contenido

- Definiciones
- Notación
- Operaciones vectoriales

Definición de vector

- Es una herramienta geométrica que se emplea para representar magnitudes físicas, definida por:
    - Magnitud (módulo o longitud)
    - Dirección (orientación)
- Pueden representarse como segmentos de recta dirigidos en el plano $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.
- Para nuestro caso nos limitaremos al plano $\mathbb{R}^2$ y al espacio $\mathbb{R}^3$.

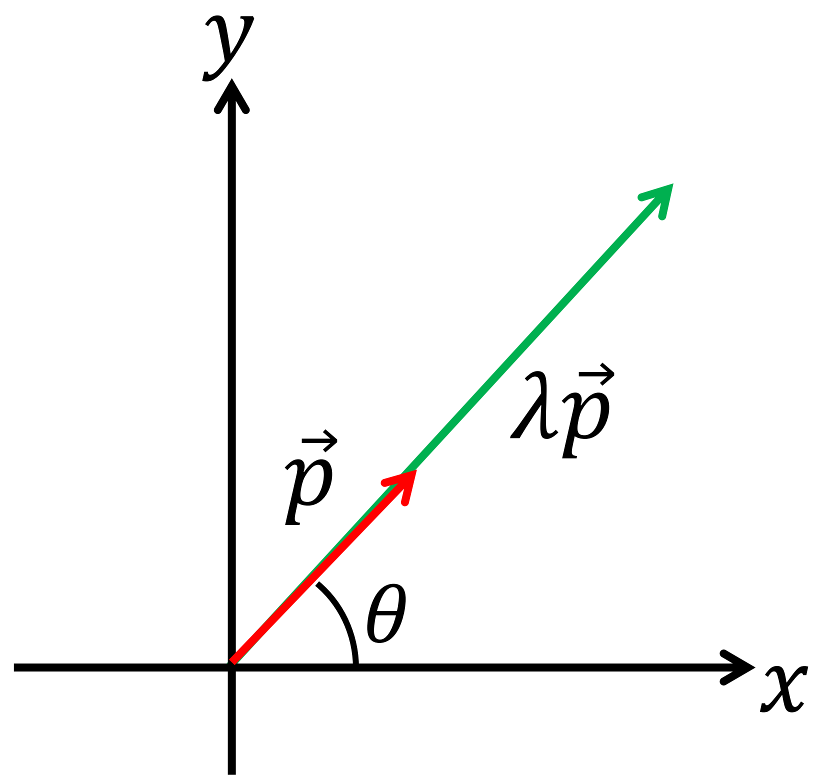
Características de los vectores



Los vectores por lo general se denotan con letras minúsculas, y de las siguientes maneras:

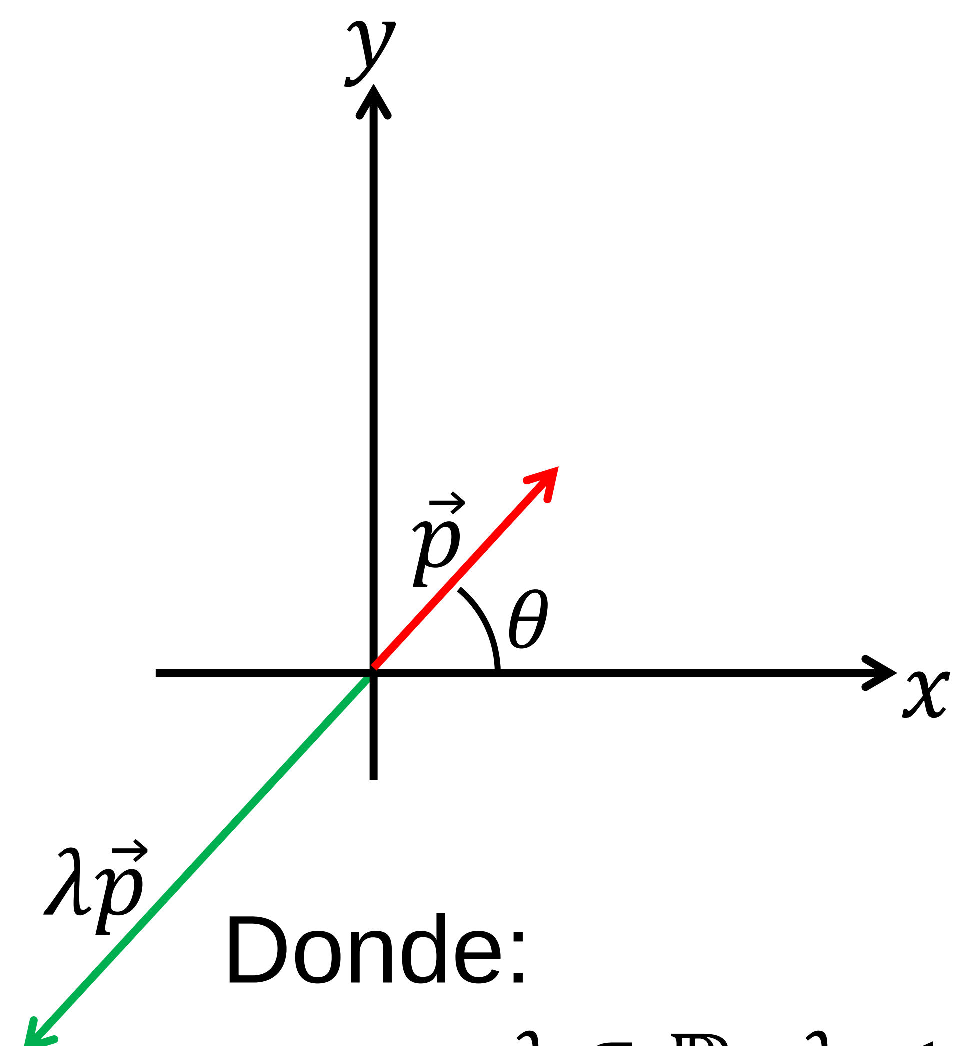
$$\boldsymbol{p} = (a, b\ ),\ \vec{p} = (a, b\ )$$

Vectores y escalares



Donde:

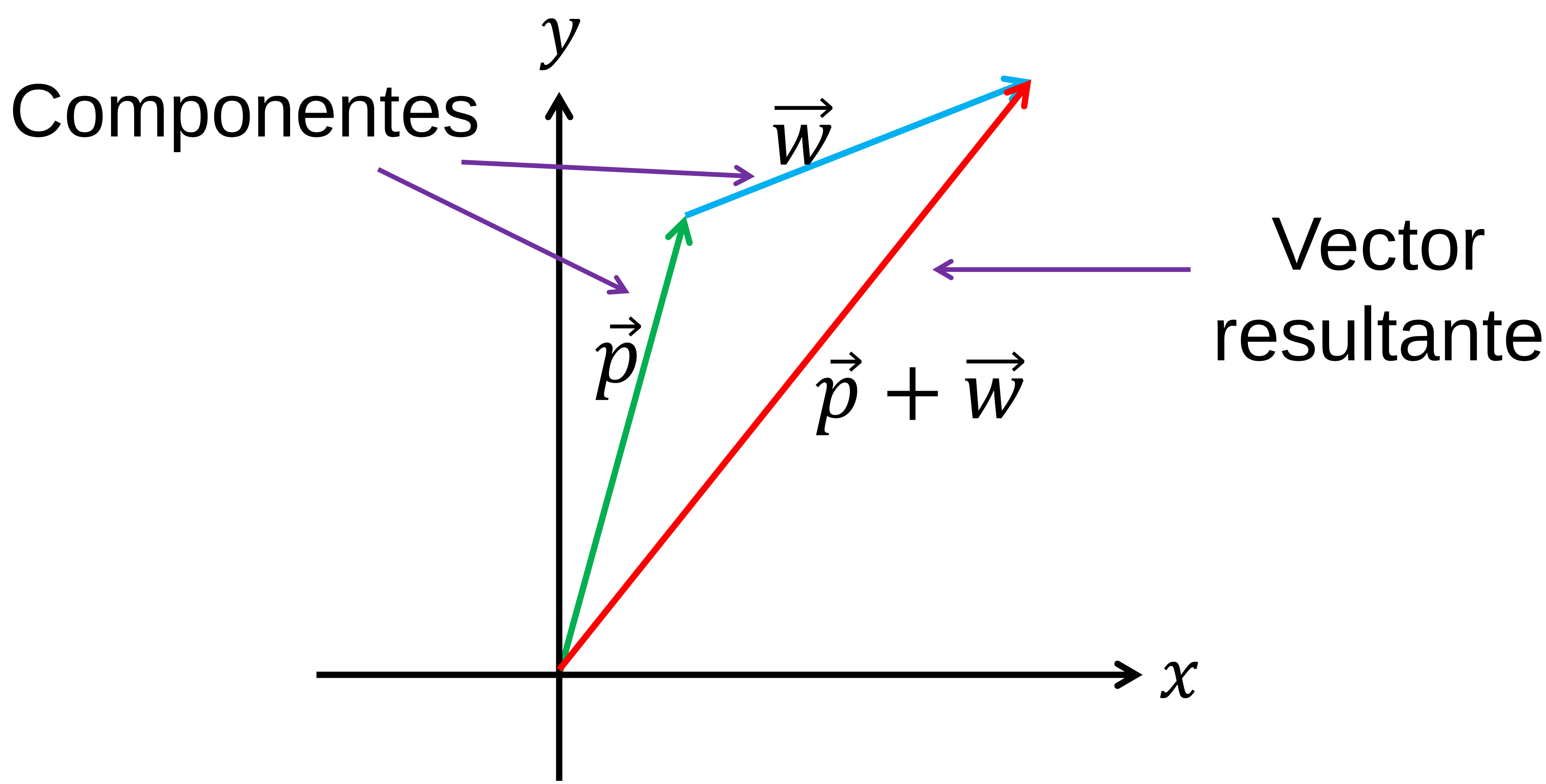
$$\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda > 0$$



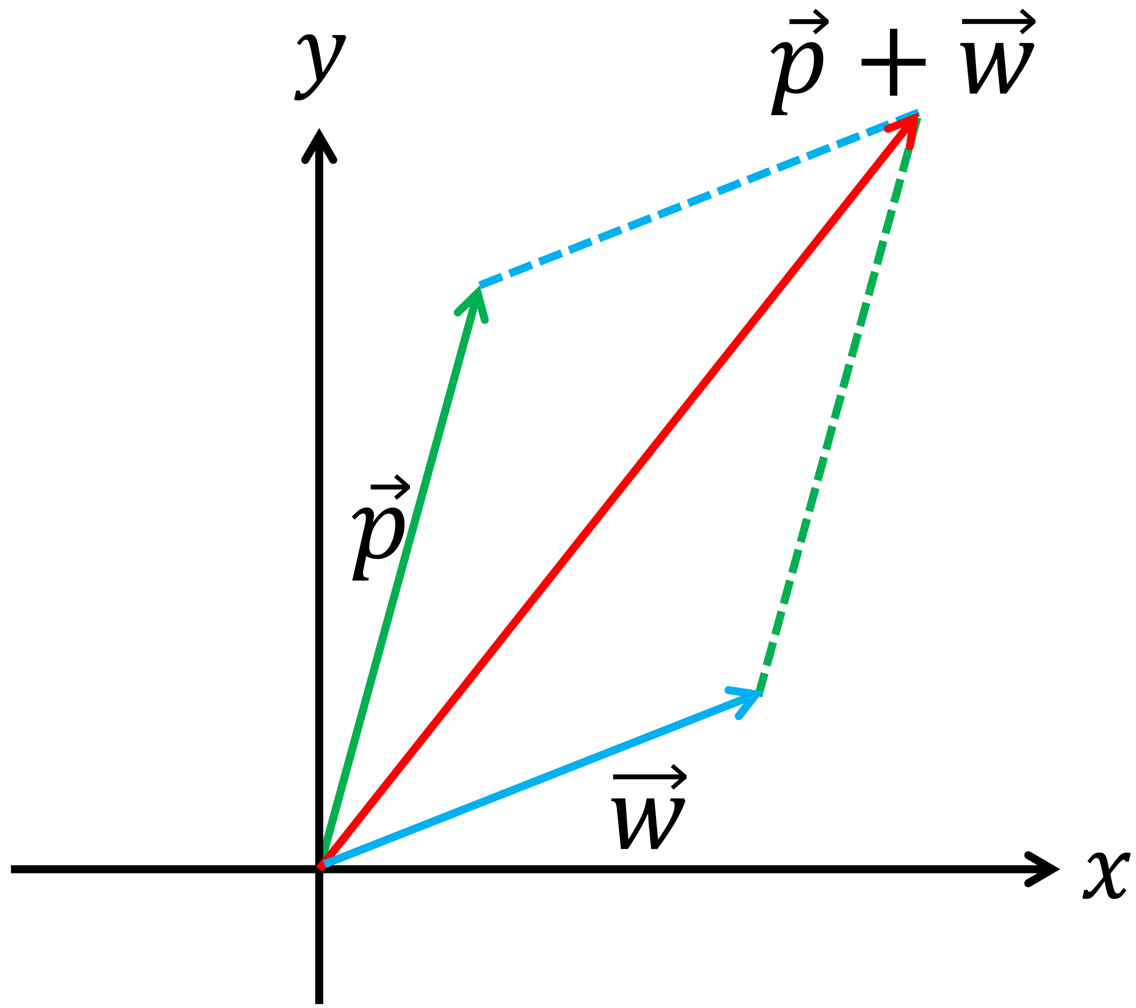
Donde:

$$\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda < 0$$

Suma vectorial

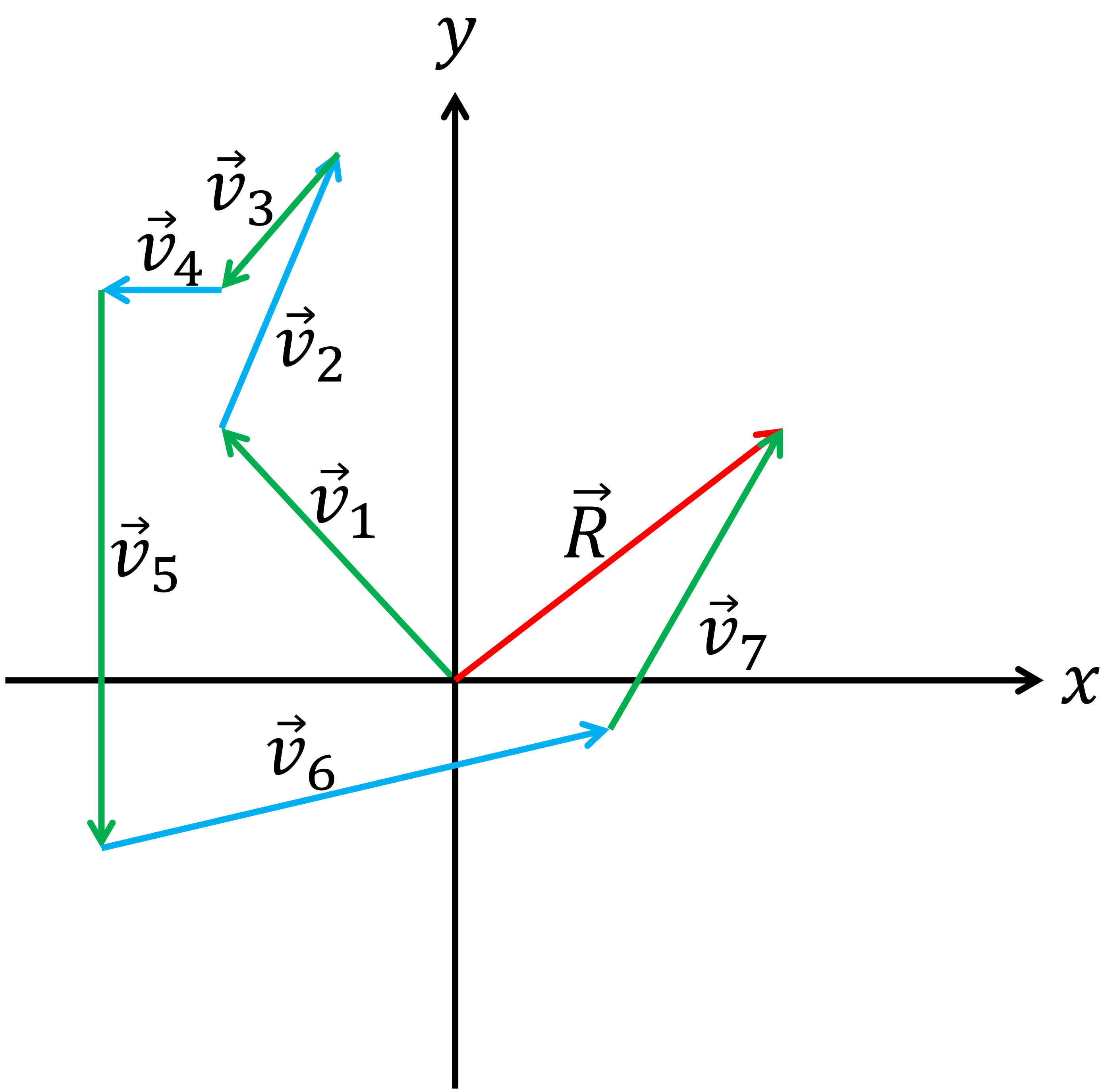


Método del paralelogramo (Método grafico)



Este método se limita a vectores en el plano.

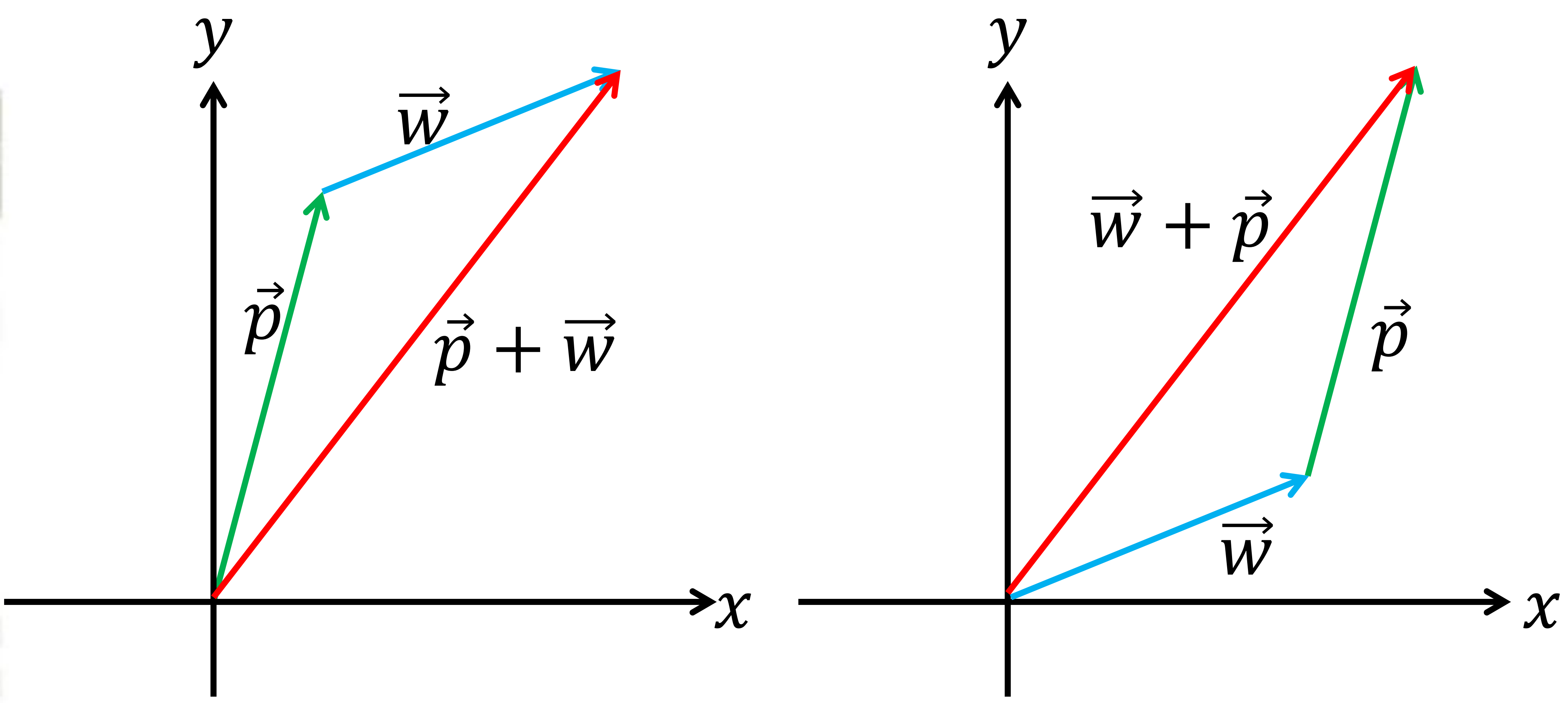
Método del polígono



Donde:

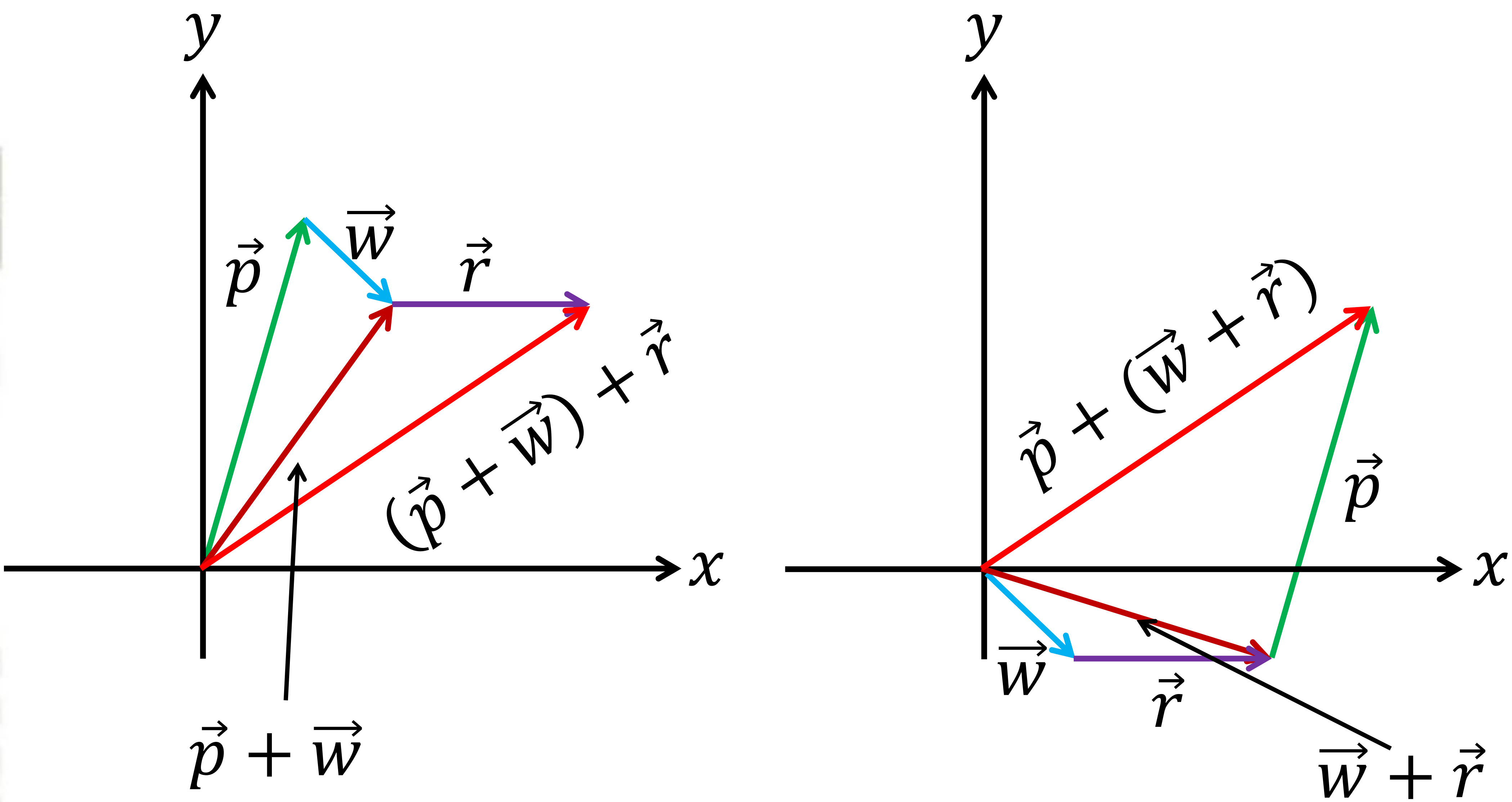
$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{7} \vec{v}_1$$

Conmutatividad



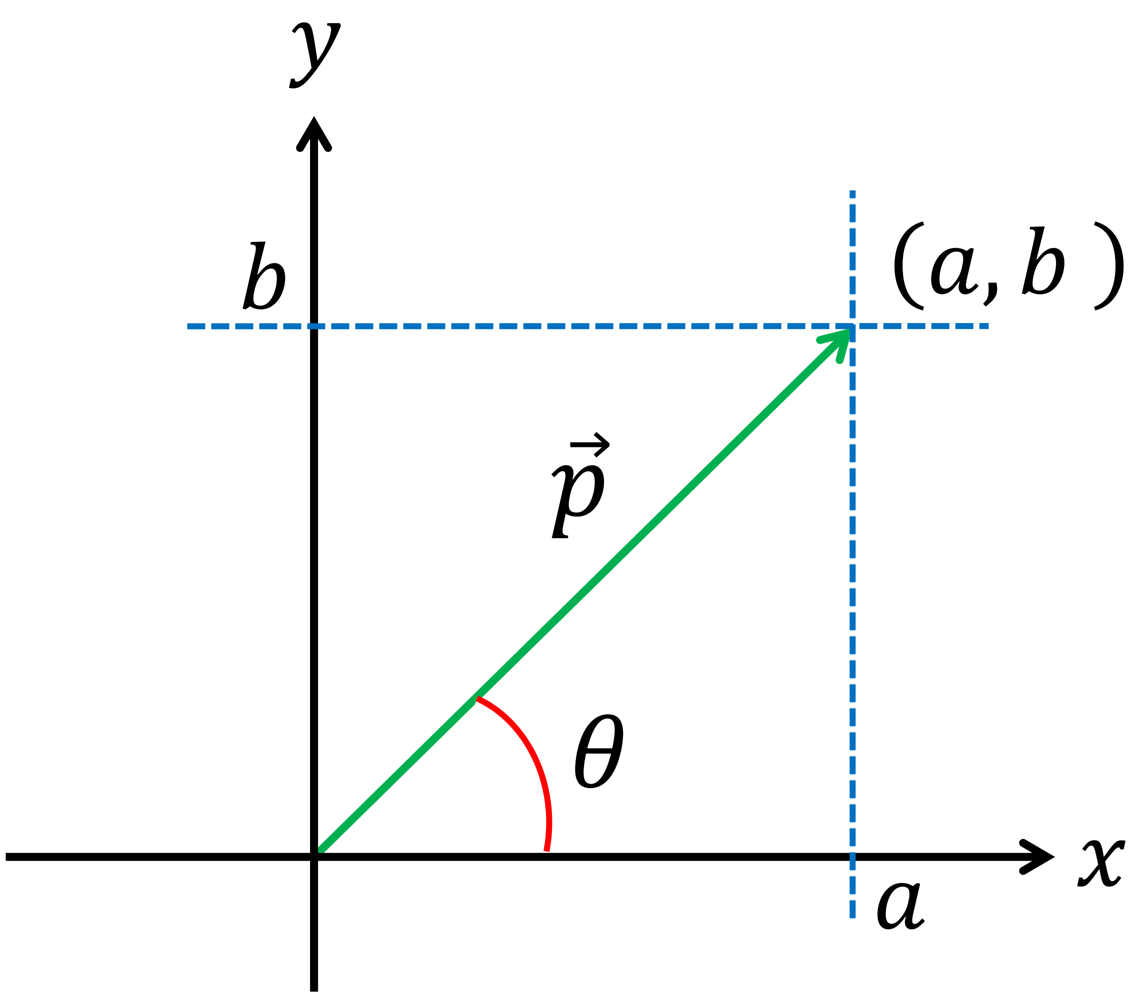
$$\vec{p} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{p}$$

Asociatividad



$$(\vec{p}+\overrightarrow{w})+\vec{r}=\vec{p}+(\overrightarrow{w}+\vec{r})$$

Representación geométrica y algebraica en $\mathbb{R}^2$



Coordenadas Cartesianas

Magnitud y orientación vectorial en $\mathbb{R}^2$

- La magnitud y orientación de un vector $\vec{p} = (a, b)$ se definen con:

$$\|\vec{p}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Norma Euclideana

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

Ejemplos

- Sea $\vec{p} = (4,3)$,

$$\|\vec{p}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

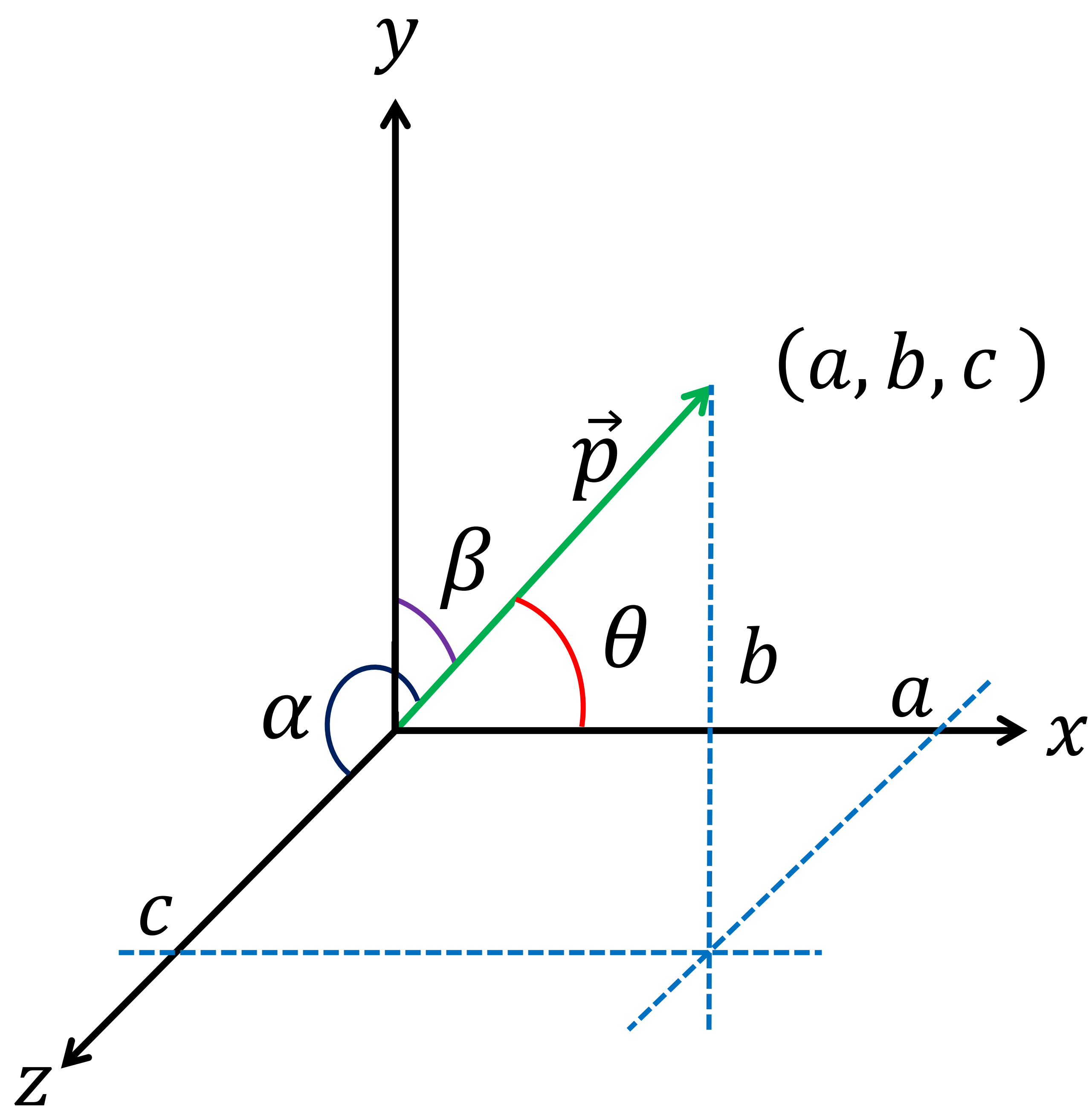
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 36.87°$$

- Sea $\vec{p} = (-1,2)$,

$$\|\vec{p}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{-1}\right) \approx 116.57°$$

Representación geométrica y algebraica en $\mathbb{R}^3$



Magnitud y orientación vectorial en $\mathbb{R}^3$

- La magnitud y orientación de un vector $\vec{p} = (a, b, c)$ se definen con:

$$\|\vec{p}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Cosenos directores

$$\cos\theta = \frac{a}{\|\vec{p}\|}$$

$$\cos\beta = \frac{b}{\|\vec{p}\|}$$

$$\cos\alpha = \frac{c}{\|\vec{p}\|}$$

Escuela Superior de Tizayuca

Cosenos directores

- Los cosenos directores de cualquier vector en $\mathbb{R}^3$ cumplen lo siguiente:

$$\cos^2\theta + \cos^2\beta + \cos^2\alpha = 1$$

Ya que $\|\vec{p}\|^2 = a^2 + b^2 + c^2$, entonces:

$$\frac{a^2}{\|\vec{p}\|^2} + \frac{b^2}{\|\vec{p}\|^2} + \frac{c^2}{\|\vec{p}\|^2} = 1$$

Por lo tanto:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 1$$

Ejemplo

- Sea $\vec{p} = (4,3,1)$,

$$\|\vec{p}\| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{26}}\right) \approx 38.29°$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{26}}\right) \approx 53.96°$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{26}}\right) \approx 78.69°$$

Norma Euclideana

- Sean $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$, $n = \{2,3\}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, la norma Euclideana cumple con lo siguiente:

  - $||\vec{p}|| \geq 0$

  - $||\vec{p}|| = 0$ si y solo si
    - $\vec{p} = (0,0)$
    - $\vec{p} = (0,0,0)$

  - $||\lambda\vec{p}|| = |\lambda| \cdot ||\vec{p}||$, donde $|\cdot|$ es el valor absoluto

Propiedades del producto de escalares y vectores

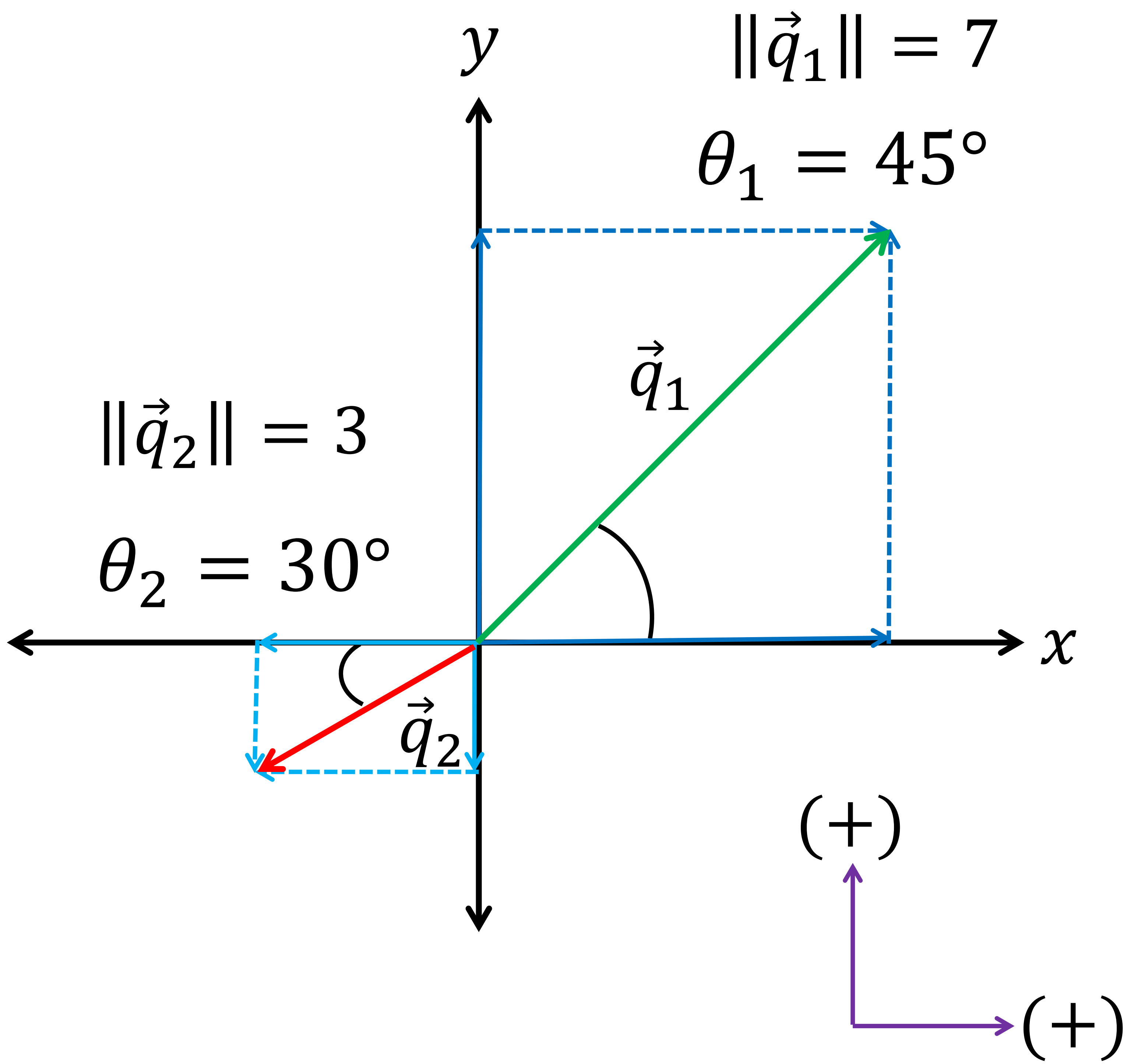
- Sean $\lambda, \phi \in \mathbb{R}$, y lo siguiente se cumple para cualquier vector $\vec{p}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$:
  - $(\lambda\phi)\vec{p} = \lambda(\phi\vec{p})$
  - $(\lambda + \phi)\vec{p} = \lambda\vec{p} + \phi\vec{p}$
  - $\lambda(\vec{p} + \vec{w}) = \lambda\vec{p} + \lambda\vec{w}$

- Sean $\lambda = -1$, $\phi = 3$, $\vec{p} = (4, -2,1)$ y $\vec{w} = (-2,5,7)$
  - $(-1 \cdot 3)(4, -2,1) = (-1)(12, -6,3)$
  - $(-1 + 3)(4, -2,1) = (-4,2, -1) + (12, -6,3)$
  - $(-1)\big((4, -2,1) + (-2,5,7)\big) = (-4,2, -1) + (2, -5, -7)$

Suma vectorial
(Método analítico)

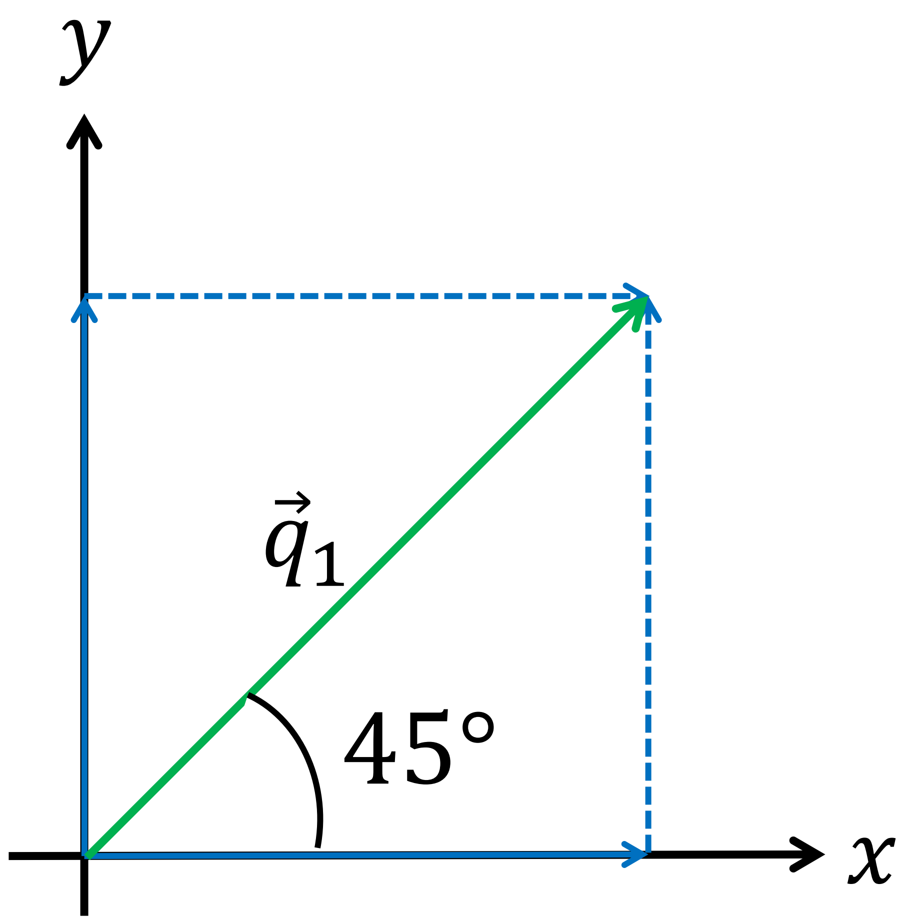
- Establecer convención de signos.
- Los vectores se descomponen en sus componentes rectangulares.
- Se suman las componentes en su respectivas direcciones.
- Se calcula la magnitud y dirección de la resultante.

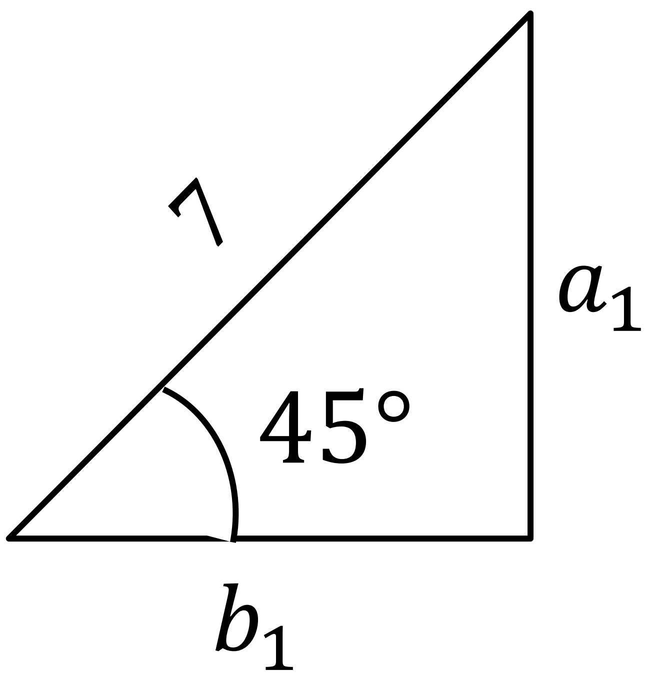
Ejemplo



Convención de signos

Ejemplo

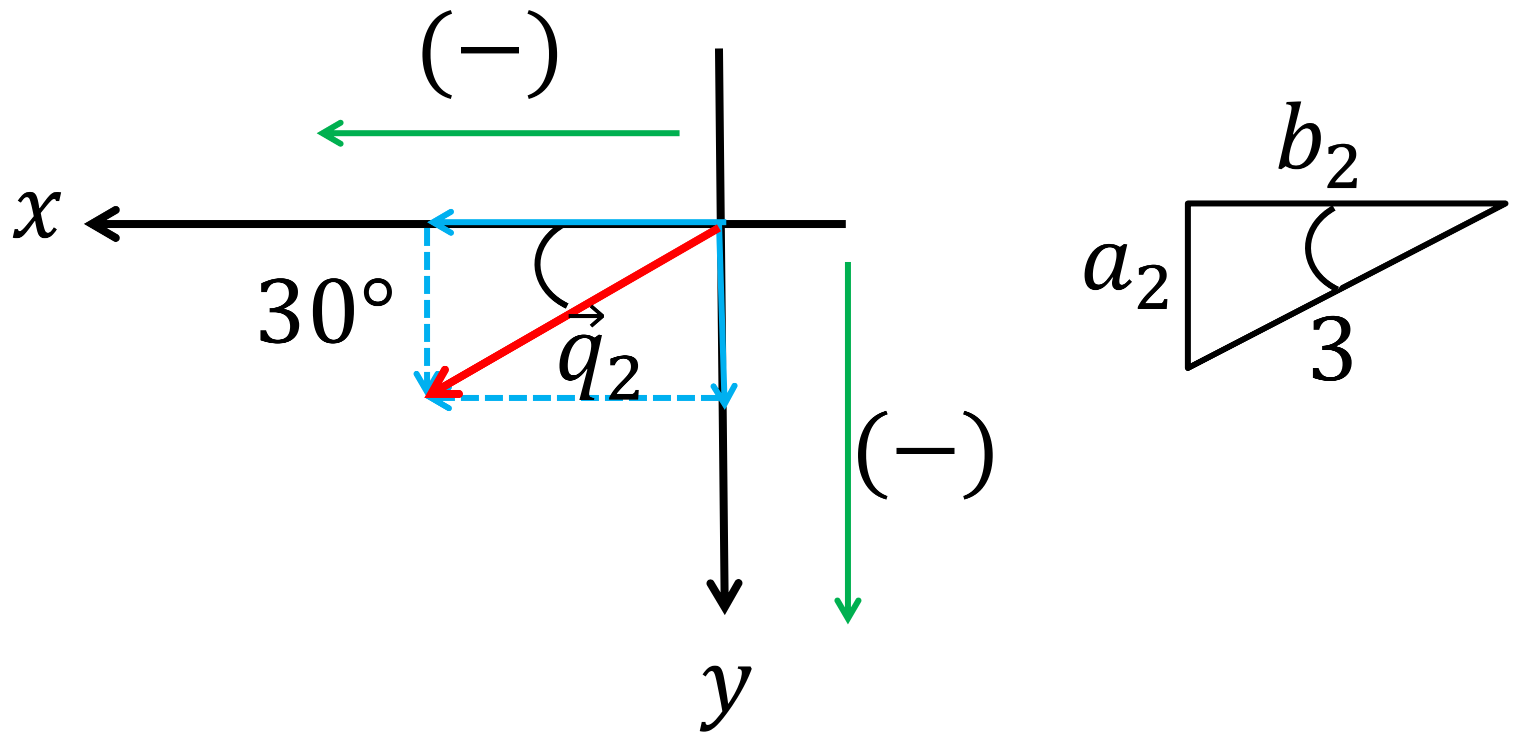




$$a_1 = 7\sin 45 = 4.95$$
$$b_1 = 7\cos 45 = 4.95$$

$$\vec{q}_1 = (4.95, 4.95)$$

Ejemplo



$$a_2 = 3\sin 30 = 1.5$$
$$b_2 = 3\cos 30 = 2.59$$

$$\vec{q}_2 = (-2.59, -1.5)$$

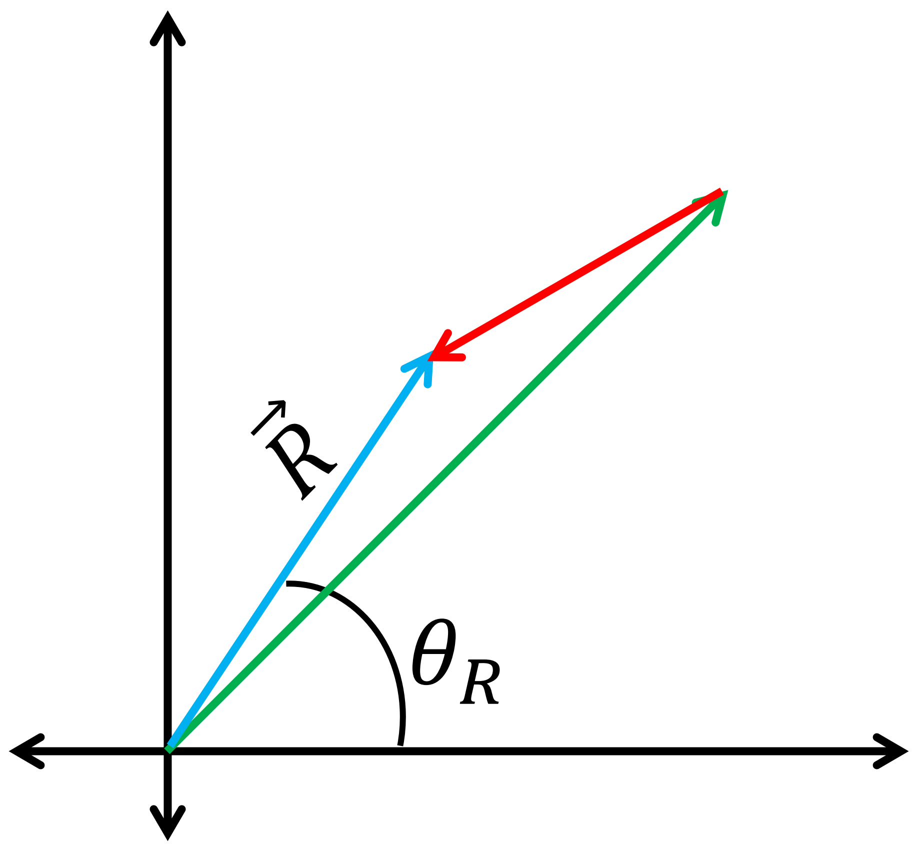
Ver convención de signos

Ejemplo

$$\vec{R} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2$$
$$\vec{R} = (4.95,4.95) + (-2.59,-1.5)$$
$$\vec{R} = (2.36,3.45)$$

$$\tan\theta_R = \frac{3.45}{2.36}$$
$$\theta_R = 55.62°$$

$$\|\vec{R}\| = 4.18$$



Vector unitario

- También conocido como vector normalizado, es aquel vector cuya magnitud es igual a 1.

- Es decir, un vector $\vec{p}$ es unitario si $\|\vec{p}\| = 1$.

- Sea el vector $\vec{p}$, su vector unitario se obtiene con:

$$\vec{e}_{\vec{p}} = \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|}$$

Ejemplo

- Sea $\vec{p} = (4,3,1)$,

$$\|\vec{p}\| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

El vector unitario es:

$$\vec{e}_{\vec{p}} = \frac{(4,3,1)}{\sqrt{26}}$$

$$\vec{e}_{\vec{p}} = \left(\frac{4}{\sqrt{26}}, \frac{3}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{26}}\right)$$

Vectores base

- La notación mas común es el de combinación lineal de los vectores base
  - $\hat{\imath} = (1,0,0)$ Eje x
  - $\hat{\jmath} = (0,1,0)$ Eje y
  - $\hat{k} = (0,0,1)$ Eje z

Donde:

$$\|\hat{\imath}\| = \|\hat{\jmath}\| = \|\hat{k}\| = 1$$

- Combinación lineal en el plano

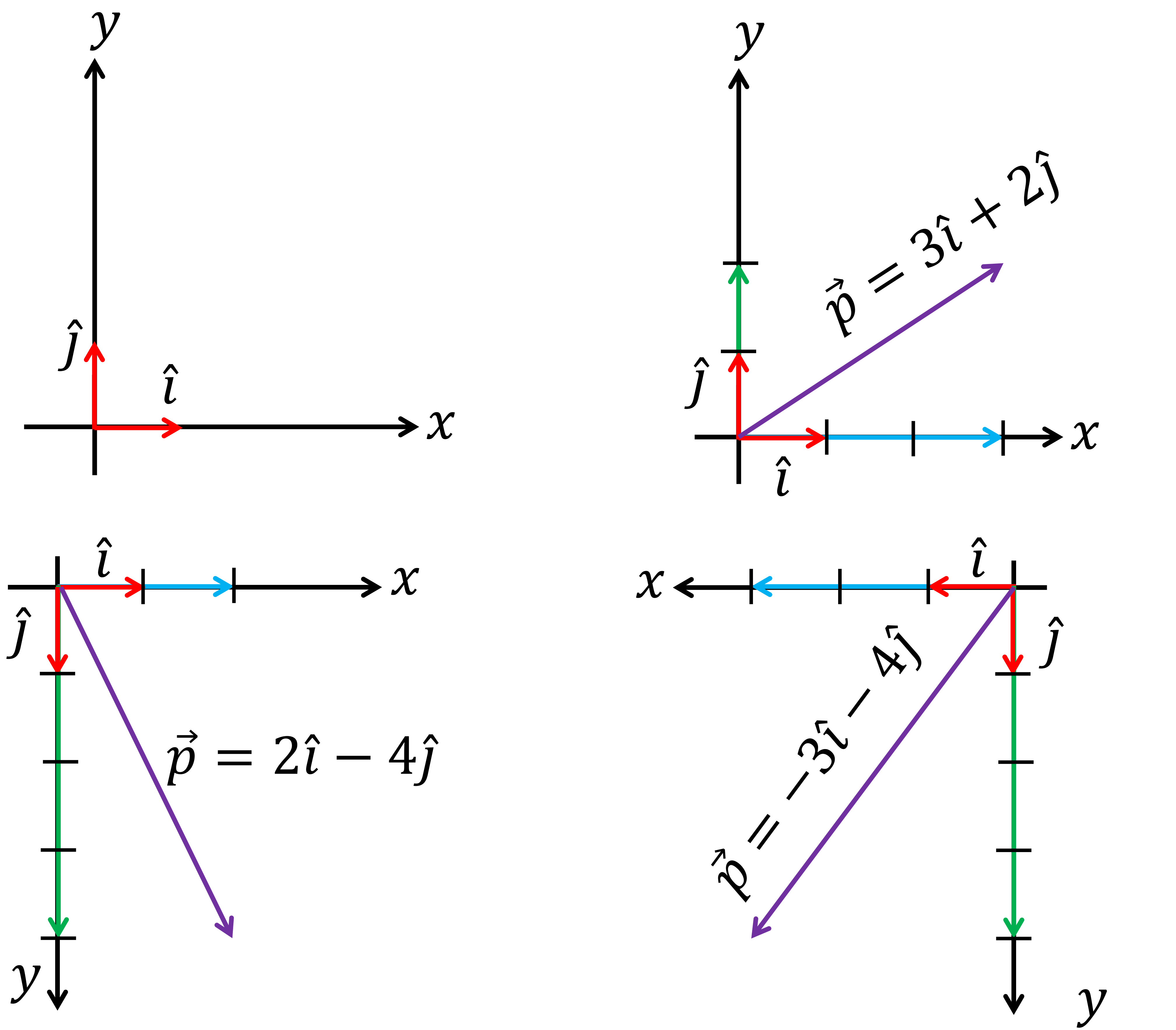
$$\vec{p} = \phi\hat{\imath} + \varphi\hat{\jmath}$$

- Combinación lineal en el espacio

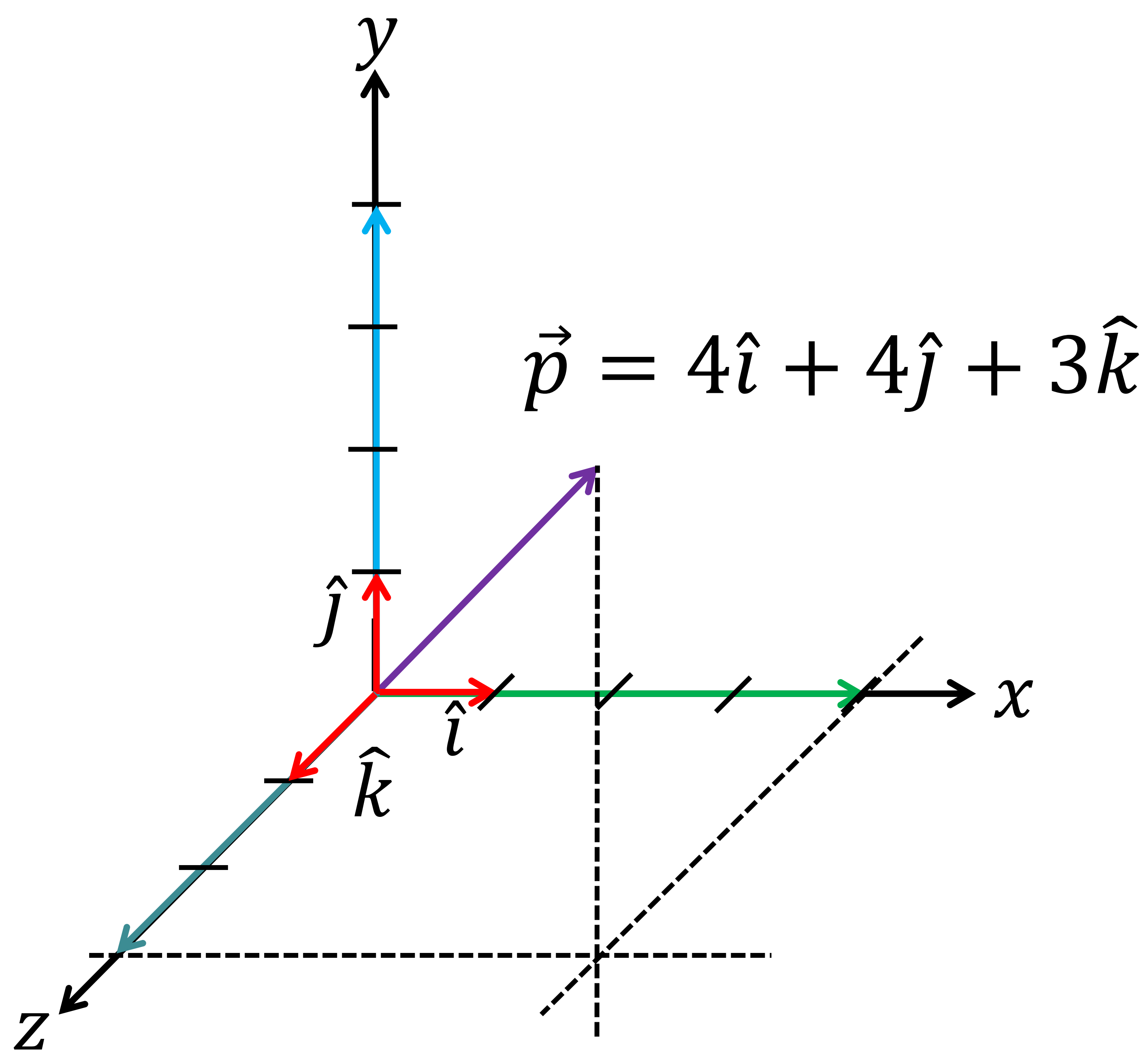
$$\vec{p} = \lambda\hat{\imath} + \omega\hat{\jmath} + \delta\hat{k}$$

Donde $\phi, \varphi, \lambda, \omega, \delta \in \mathbb{R}$.

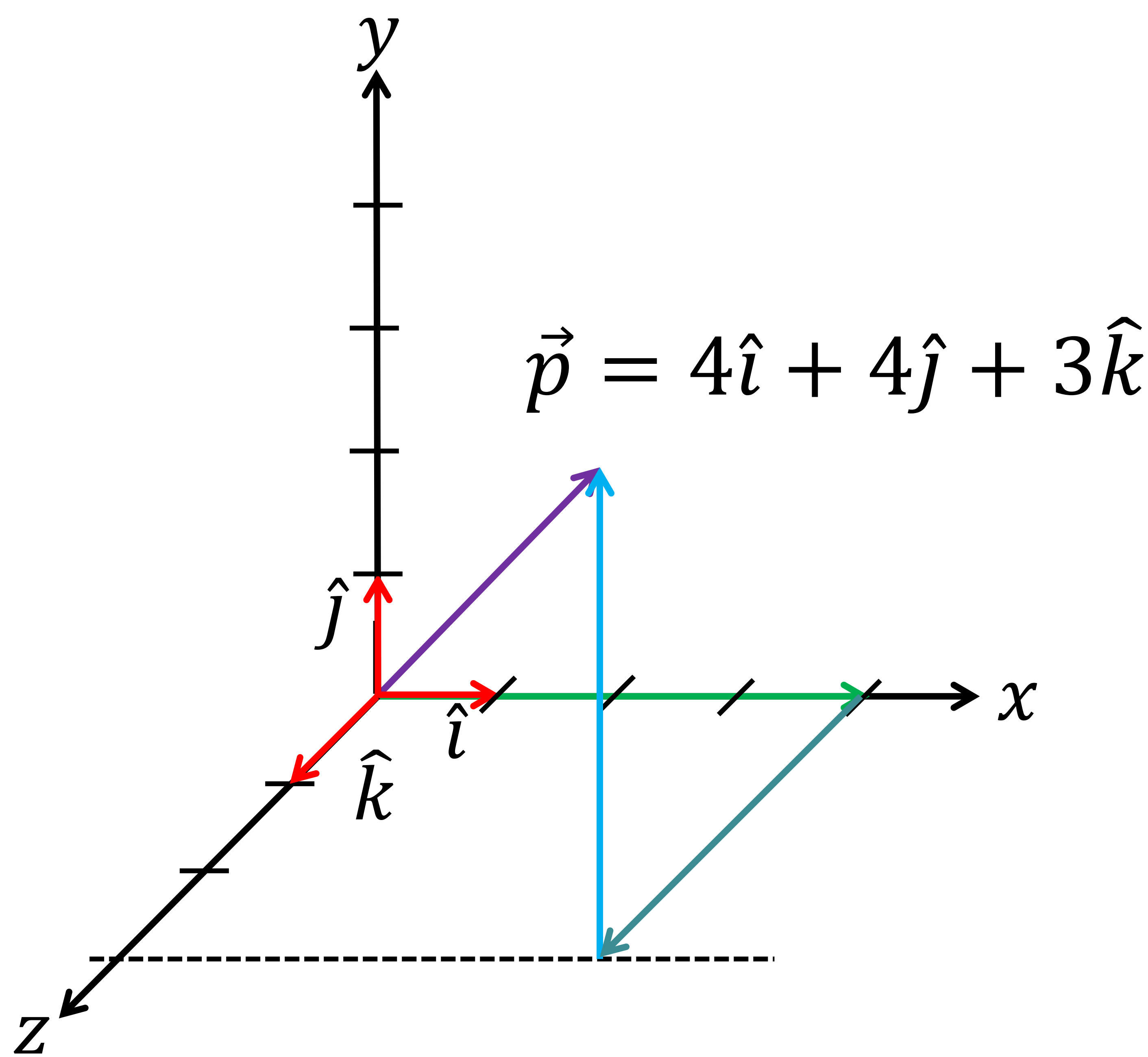
Vectores base en el plano



Vectores base en el espacio



Vectores base en el espacio



Producto punto

- Sean los vectores $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ y $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_n)$.

- El producto punto se define como:

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = \sum_{k=1}^{n} (p_k \cdot q_k)$$

- Por ejemplo, sean $\vec{p} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ y $\vec{q} = -\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$, el producto punto es:

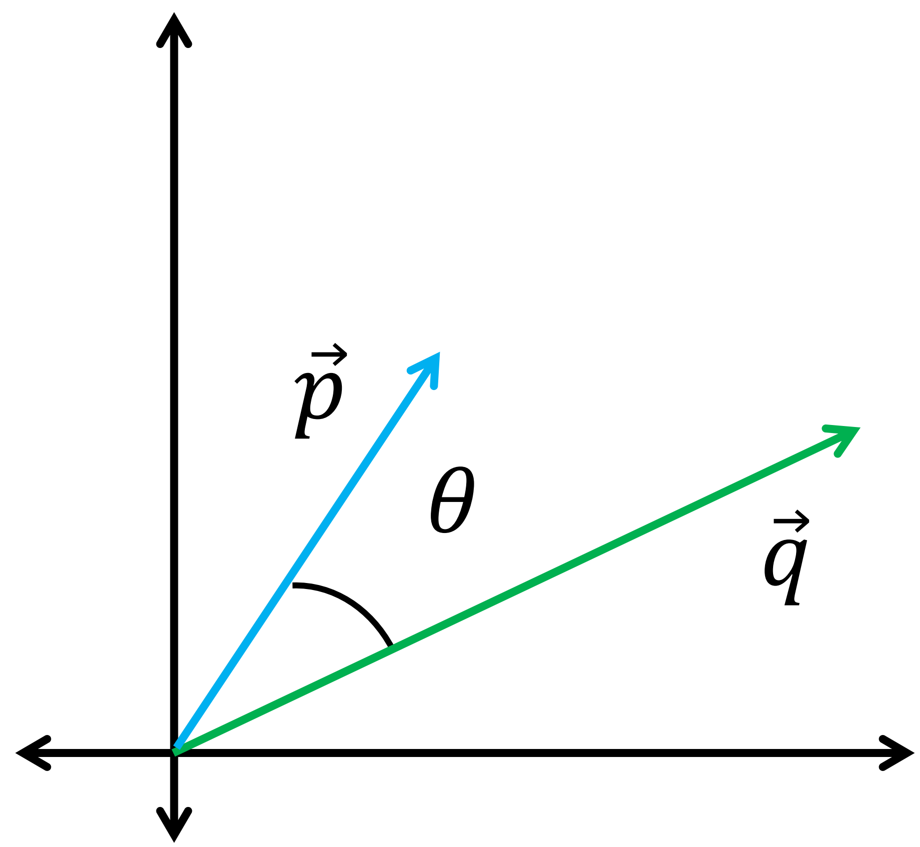
$$\vec{p} \cdot \vec{q} = (2 \cdot -1) + (3 \cdot 5)$$
$$\vec{p} \cdot \vec{q} = -2 + 15 = 13$$

Producto punto

- Sean los vectores $\vec{p}$ y $\vec{q}$.

- El ángulo θ que forman ambos vectores al intersectarse, se puede obtener con:

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = \|\vec{p}\| \|\vec{q}\| \cos\theta$$



Ejemplo

- Sea los vectores $\vec{p} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 3\hat{k}$ y $\vec{q} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3\hat{k}$.
- Calcular el ángulo θ que forman ambos vectores al intersectarse.

$\vec{p} \cdot \vec{q} = (-1 \cdot 2) + (2 \cdot 1) + (-3 \cdot -3)$
$\vec{p} \cdot \vec{q} = -2 + 2 + 9 = 9$
$||\vec{p}|| = \sqrt{14}$, $||\vec{q}|| = \sqrt{14}$;

$$9 = \sqrt{14}\sqrt{14}\cos\theta$$

Despejando θ:

$$\theta = 49.99°$$

Producto cruz

- Sean los vectores $\vec{p} = p_x\hat{\imath} + p_y\hat{\jmath} + p_z\hat{k}$ y $\vec{q} = q_x\hat{\imath} + q_y\hat{\jmath} + q_z\hat{k}$.

- El producto punto cruz se define como:

$$\vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{vmatrix}$$

- El producto se obtiene al calcular el determinante de la matriz con la regla de Cramer.

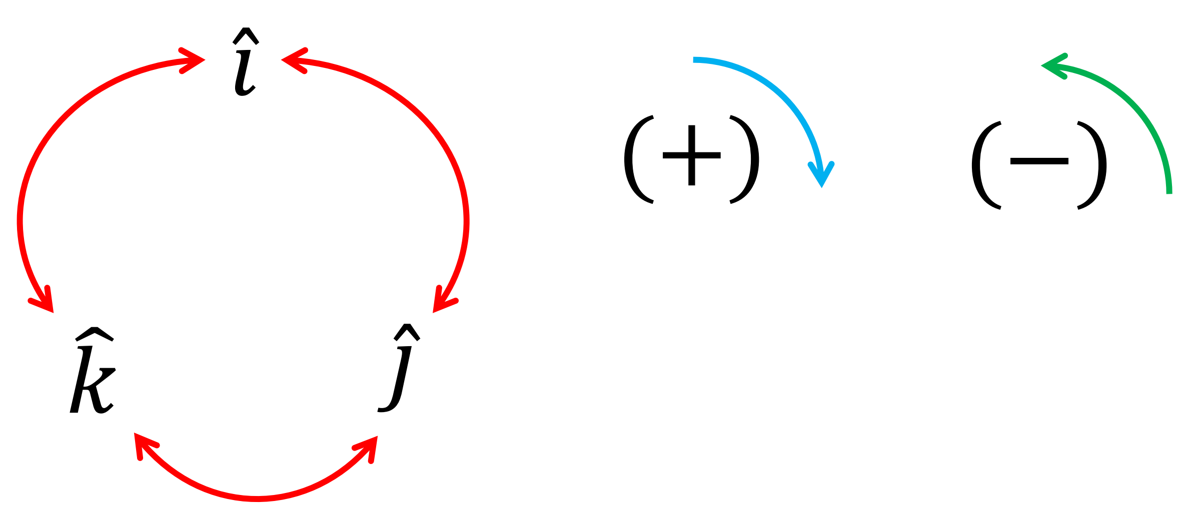
Producto cruz

- En términos de componentes rectangulares:

$$\hat{\imath} \times \hat{\imath} = 0 \qquad \hat{\jmath} \times \hat{\imath} = -\hat{k} \qquad \hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$$

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \qquad \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = 0 \qquad \hat{k} \times \hat{\jmath} = -\hat{\imath}$$

$$\hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath} \qquad \hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath} \qquad \hat{k} \times \hat{k} = 0$$



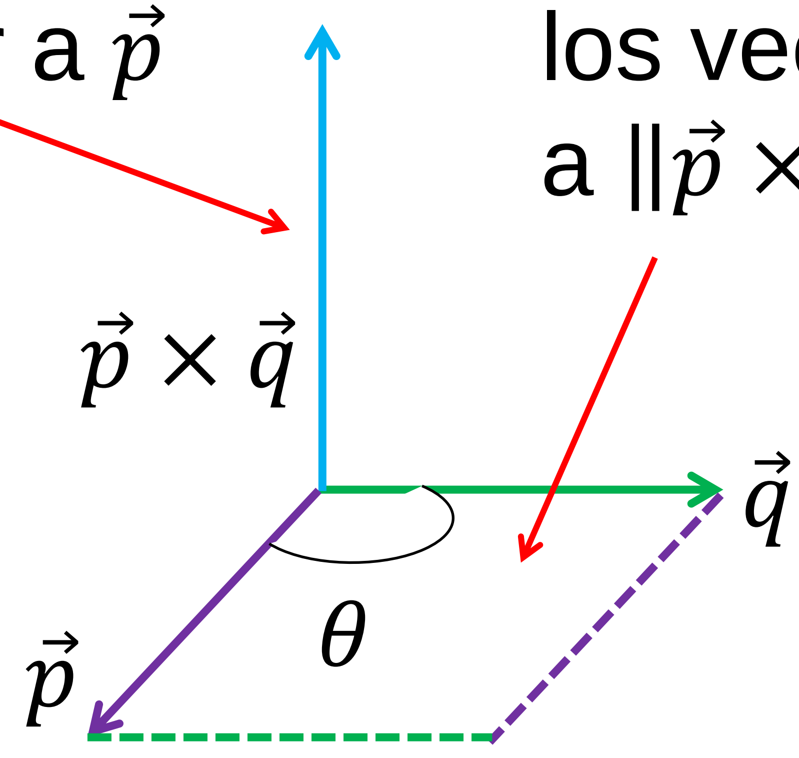
Producto cruz

- Sean los vectores $\vec{p}$ y $\vec{q}$.
- El ángulo θ que forman ambos vectores al intersectarse, se puede obtener con:

$$\|\vec{p} \times \vec{q}\| = \|\vec{p}\|\|\vec{q}\| \sin\theta$$

El vector es perpendicular a $\vec{p}$ y $\vec{q}$.

El área que forman los vectores es igual a $\|\vec{p} \times \vec{q}\|$



Ejemplo

- Sean los vectores $\vec{p} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 3\hat{k}$ y $\vec{q} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3\hat{k}$.

$$\vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

- $(2 \cdot -3)\hat{\imath} - (-3 \cdot 1)\hat{\imath} = -3\hat{\imath}$
- $(2 \cdot -3)\hat{\jmath} - (-3 \cdot -1)\hat{\jmath} = -9\hat{\jmath}$
- $(-1 \cdot 1)\hat{k} - (2 \cdot 2)\hat{k} = -5\hat{k}$

- De esta forma, el vector resultante es:

$$\vec{p} \times \vec{q} = -3\hat{\imath} - 9\hat{\jmath} - 5\hat{k}$$

Escuela Superior de Tizayuca

Ejemplo

- El ángulo que forman los vectores es:
  - $\|\vec{p}\| = \sqrt{14}$, $\|\vec{q}\| = \sqrt{14}$;
  - $\|\vec{p} \times \vec{q}\| = \sqrt{115}$
- Se sustituyen los datos:

$$\sqrt{115} = \sqrt{14}\sqrt{14}\sin\theta$$

- Se despeja θ:

$$\theta = 49.99°$$

- Se puede verificar que el vector resultante es perpendicular a $\vec{p}$ y $\vec{q}$, ya que:

$$\vec{p} \cdot (\vec{p} \times \vec{q}) = 0$$
$$\vec{q} \cdot (\vec{p} \times \vec{q}) = 0$$

Producto punto y cruz

- Nótese que:

  - El producto punto $(\cdot)$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, donde $n \in \mathbb{N}$.

  - El producto cruz $(\times)$: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Referencias

- Marsden, J.E., Tromba, A.J.: Cálculo vectorial, Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.
- Beer, F.P., Johnston, E.R.: Mecánica vectorial para ingenieros, Estática, McGraw-Hill, 2000.