# MODELO CÍCLICO DE LOS SISTEMAS RENOVABLES CON EL TÉRMINO DE REPRODUCCION EN LA FORMA INTEGRAL

**Anna Tarasenko, Manuel González Hernández, Oleksandr Karelin**
*Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo*
*Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería*
*karelin@uaeh.edu.mx, anataras@uaeh.edu.mx, mghdez@uaeh.edu.mx*

**Abstract**

*We continue on studying of systems whose state depends on time and whose resources are renewable based on functional operators with shift. In previous articles, we consider the term which describe results of reproductive processes as a linear expression or as a shift summand. In this work the reproductive term is represented with the help of an integral which contains a degenerate kernel. A cyclic model of evolution of the system with a renewable resource is developed, obtained equilibrium proportion is analyzed. We propose a method of solution of the balance equation, we determine an equilibrium state of the system. The inverse operator of equation and it approximations are constructed. In what follows, we program to use their forms to observe modifications of our system period by period. Having applied this model , we can investigate problems of nature systems and production.*

*Keywords: renewable resources, functional equations with shift, reproduction in the integral form, equilibrium state.*

En los trabajos [1, 3, 4] se propusieron modelos matemáticos de sistemas con recursos recuperables en base a ecuaciones funcionales con desplazamientos. Este medio matemático es apropiado para simular y analizar tales sistemas siguiendo los principios de modelación

I. En la descripción de un sistema $S$ todos los cambios que ocurren en el intervalo

$$j_0 = [t_0, t_0 + T]$$

se sustituyen por los resultados finales;

II. Es de interés la dependencia $\nu(x,t)$ que muestra la apreciación cuantitativa de objetos con parámetro $x$ los cuales están en el sistema en el momento $t$. El parámetro $x$ se llama parámetro individual,

$$x \in [x_{\min}, x_{\max}],$$

la función $\nu(x,t)$ se llama parámetro de grupo.

Estos principios se quedan como instantes principales en nuestro enfoque de modelado. Aquí se presta atención al término de reproducción. En lugar de aplicar un operador funcional con desplazamiento a la densidad de distribución del parámetro de grupo por el parámetro individual, se propone usar una descripción en la forma integral.

El documento contiene un método de solución *de ecuación de balance del sistema con un recurso recuperable que es una ecuación con un operador funcional con desplazamiento y un operador integral.*

También, se propone la estructura del operador inverso para la parte izquierda de la ecuación de balance del sistema.

## 1. Método

Idea principal del método proviene del esquema de la solución de ecuaciones integrales de Fredholm de segundo tipo con núcleos degenerados [2], cuando una ecuación integral se transforma a un sistema algebraico.

La construcción del operador inverso se realiza como una serie funcional con desplazamientos y corresponde a la serie de Neumann [2].

## 2. Resultados

### 2.1. Sistema con un recurso y término de reproducción en la forma integral

En breve se aclaran los términos que ocurren en la proporción de balance del modelo cíclico del sistema $S$ con recursos recuperables.

El estado del sistema $S$ en el momento inicial $t_0$ se describe por la distribución continua del parámetro de grupo por el parámetro individual, esto es, por la función de densidad $\nu(x,t_0)=\nu(x)$.

En el transcurso del tiempo los elementos del sistema pueden cambiar su parámetro individual (los peces aumentan su peso, la forma de las partículas sufren modificaciones etc). En general las modificaciones de los parámetros individuales se describen con un desplazamiento $\beta(x)$.

El estado del sistema $S$ en el momento $t=t_0+T$ es

$$\nu(x,t_0+T)=\nu[\beta(x)]\frac{d}{dx}\beta(x).$$

Durante el periodo $j_0=[t_0,t_0+T]$ se puede extraer $g(x)$ como el resultado de la utilidad del proceso y tendremos una nueva distribución de densidad:

$$\nu(x,t_0+T)=\nu[\beta(x)]\frac{d}{dx}\beta(x)-g(x)$$

Sí en los procesos se disminuye el volumen por la mortalidad natural u otro específico se tomará en cuenta indicándolo con la función coeficiente $d(x)$

$$\nu(x,t_0+T)=d(x)\nu[\beta(x)]\frac{d}{dx}\beta(x)-g(x),$$

Las entradas, salidas naturales y artificiales del sistema se identifican con el sumando $p(x)$.

Ahora vamos a centrarnos en el término integral que describe los procesos responsables de la reproducción y generalizando en comparación con [1,3,4]

$$(R\nu)(x)=$$

$$r(x)\nu(x)+\int_{x_{\min}}^{x_{\max}}\sum_{m=1}^{k}\delta_m(x)\rho_m(\tau)\nu(\tau)d\tau$$

Cuando $k=1$

$$(R\nu)(x)=$$

$$r(x)\nu(x)+\int_{x_{\min}}^{x_{\max}}\delta(x)\rho(\tau)\nu(\tau)d\tau .$$

En adelante se considera este caso.

El estado final del sistema $S$ en el tiempo $t_0+T$ y se escribe como:

$$\nu(x,t_0+T)=$$

$$d(x)\nu[\beta(x)]\frac{d}{dx}\beta(x)+$$

$$r(x)\nu(x)+\int_{x_{\min}}^{x_{\max}}\delta(x)\rho(\tau)\nu(\tau)d\tau$$

$$-g(x)+p(x)$$

Sí nuestra meta es conservar el estado del sistema $S$, se mantendrá dentro y fuera en el tiempo $t=t_0$ como en el tiempo $t=t_0+T$ por lo cual es necesario dar una proporción de equilibrio

$$\nu(x,t_0)=\nu(x,t_0+T)$$

para funciones de densidad continuas.

Sustituyendo las expresiones para los puntos extremos, se obtiene una ecuación de balance para el modelo cíclico del sistema $S$

$$\nu(x)=$$

$$d(x)\nu[\beta(x)]\frac{d}{dx}\beta(x)+$$

$$r(x)\nu(x)+\int_{x_{\min}}^{x_{\max}}\delta(x)\rho(\tau)\nu(\tau)d\tau$$

$$-g(x)+p(x).$$

Rescribiendo la ecuación en la forma

$$a(x)\nu(x)-b(x)\nu[\beta(x)]+$$

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}}\delta(x)\rho(\tau)\nu(\tau)d\tau=f(x)$$

donde

$$a(x)=1-r(x),$$

$$b(x)=d(x),$$

$$f(x)=p(x)-g(x),$$

o en la forma operador

$$\left(A\nu\right)(x)+\int_{x_{\min}}^{x_{\max}}\delta(x)\rho(\tau)\nu(\tau)d\tau=f(x)$$

siendo

$$A\equiv aI-bW_\beta ,$$

$$\left(I\nu\right)(x)\equiv\nu(x) ,$$

$$\left(W_\beta\nu\right)(x)=\beta'(x)\nu[\beta(x)].$$

## 2.2. Operador inverso del operador de proporción de balance, aproximación de $A^{-1}$

No agotando el caso general contamos

$$x_{\min}=0,\ x_{maz}=1;\quad J=[0,1].$$

Sea el operador $A$ actuar en espacio de Holder

$$\overset{0}{H}_\mu(J,\rho) ,$$

$$\rho=(x-1)^{\mu_0}(x-1)^{\mu_1} .$$

Las restricciones de parámetros y la definición de norma para el espacio de Banach $\overset{0}{H}_{\mu}(J,\rho)$ se pueden encontrar en [5,6].

Tiene lugar un teorema [1] sobre la invertibilidad del operador $A$:

El operador funcional

$$A \equiv aI - bW_{\beta}$$

es invertible si se cumple:

$$\sigma_{\beta}[a(x), b(x)] \neq 0$$

donde la función

$$\sigma_{\beta}[a(x), b(x)] =$$

$$\begin{cases} a(x), \\ si\ |a(i)| > |\beta\ ´(i)|^{-\mu_i + \mu} |b(i)|, \\ i = 0,1 \\ \\ b(x), \\ si\ |a(i)| < |\beta\ ´(i)|^{-\mu_i + \mu} |b(i)|, \\ i = 0,1 \\ \\ 0, \quad en \quad otros \quad casos.. \end{cases}$$

El operador inverso se define por una afirmación:
Si existe un número natural $n$ tal que

$$\|N_{n-1}\| < 1,$$

donde

$$N_{n-1} = \prod_{j=0}^{n-1} u_j(x) B_{\beta}{}^{n}$$

y

$$u_j(x) = u[\beta_j(x)],$$

$$\beta_j(x) = B_{\beta}^{j}(x)(x),$$

$$(B_{\beta}\nu)(x) = \nu[\beta(x)],$$

entonces el operador

$$A \equiv aI + bB_{\beta}$$

es invertible en $\overset{0}{H}_{\mu}(J,\rho)$ y su inverso es

$$A^{-1} \equiv$$

$$\left( I + uB_{\beta} + ... + \left( \prod_{j=0}^{n-2} u[\beta_j(x)] \right) B_{\beta}^{n-1} \right) N^{-1}$$

donde

$$N^{-1} =$$

$$\left( I - \prod_{j=0}^{n-1} u[\beta_j(x)]\ B_{\beta}^{n} \right)^{-1},$$

Bajo de las condiciones del teorema las demandas de la afirmación se cumplen.

El operador $N^{-1}$ es el operador inverso de

$$N = I - \prod_{j=0}^{n-1} u[\beta_j(x)]\ B_{\beta}^{n},$$

$$N = I - N_{n-1},$$

$$N_{n-1} = \prod_{j=0}^{n-1} u[\beta_j(x)]\ B_{\beta}^{n}$$

se representa como una serie de Neumann

$$N^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(N_{n-1}\right)^i$$

Para obtener aproximaciones del operador inverso es suficiente cortar la serie de Neumann

$$\left(N^{-1}\right)_p = \sum_{i=0}^{p} \left(N_{n-1}\right)^i .$$

**2.3. Búsqueda del estado equilibrio del sistema**

La proporción de balance es una ecuación funcional

$$a(x)\nu(x) - b(x)\nu[\beta(x)] + \int_0^1 \delta(x)\rho(\tau)\nu(\tau)d\tau = f(x)$$

o con el operador $A$

$$\left(A\nu\right)(x) + \int_0^1 \delta(x)\rho(\tau)\nu(\tau)d\tau = f(x).$$

Suponiendo la existencia de el operador inverso
$A^{-1}$ obtenemos

$$\nu(x) = \left(A^{-1}f\right)(x) - C_1\left(A^{-1}\delta\right)(x)$$

Donde

$$C_1 = \int_0^1 \rho(\tau)\nu(\tau)d\tau .$$

Para encontrar la solución de la ecuación de balance se queda calcular la constante $C_1$.

Al multiplicar ambos partes por la función $\rho(x)$

$$\rho(x)\nu(x) =$$

$$\rho(x)\left(A^{-1}f\right)(x) - C_1\rho(x)\left(A^{-1}\delta\right)(x)$$

I al sacar integrales de ambos partes

$$\int_0^1 \rho(x)\nu(x)dx =$$

$$\int_0^1 \rho(x)\left(A^{-1}f\right)(x)dx - C_1\int_0^1 \rho(x)\left(A^{-1}\delta\right)(x)dx$$

recibimos una ecuación algebraica con respecto
de la constante $C_1$.

$$C_1 = \int_0^1 \rho(x)\left(A^{-1}f\right)(x)dx - C_1\int_0^1 \rho(x)\left(A^{-1}\delta\right)(x)dx$$

No hay problema en expresar y

$$C_1 = \frac{\int_0^1 \rho(x)\left(A^{-1}f\right)(x)dx}{1 + \int_0^1 \rho(x)\left(A^{-1}\delta\right)(x)dx}$$

y presentar

## Referencias


[1] Anna Tarasenko, Aleksandr Karelin, Gilberto Pérez Lechuga, Manuel González Hernández, *Modeliing systems with renewable resources based on functional operators with shifts*, Applied Mathematics and Computation, Vol.216, Editorial: Elsevier, EE.UU, 2010, pp. 1938-1944.

[2] A.N. Kolmlgorov, S.V. Fomin, Elementos de la teoria de funciones y análisis funcional, Editorial: Nauka, Moscú, 1974, 544 p.

[3] Oleksandr Karelin, Gilberto Pérez, Manuel González, Anna Tarasenko, *Observaciones y análisis al modelo cíclico de los sistemas renovables*, Memorias de VIII Simposio Internacional "Aportaciones de las Universidades a la Docencia, la Investigación, la Tecnología y el Desarrollo", Instituto Politécnico Nacional, la Ciudad de México, México, 2006, 5 pp.

[4] Oleksandr Karelin, Gilberto Pérez, Manuel González, Anna Tarasenko, *Modelos cíclicos y modelos abiertos de sistemas con recursos recuperables*, Memorias de VII Simposio Internacional "Aportaciones de las Universidades a la Docencia, la Investigación, la Tecnología y el Desarrollo", Instituto Politécnico Nacional, la Ciudad de México, México, 2005, 6 pp.

[5] Oleksandr Karelin, *Sobre un problema de contorno con un desplazamiento para un sistema de ecuaciones diferenciales de tipo elíptico – hiperbólico,* Soviet Math. Doklady, Vol.22, No.2, Moscú, 1980, pp. 507-512.

[6] Yuri Karlovich, *Sobre invertibilidad de los operadores con noncarleman desplazamiento en el espacio de Hölder*, Ecuaciones diferenciales, Vol.20, No.12, Minsk,1984, pp. 2165-2169.