UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DEL ESTADO DE HIDALGO

Funciones

Elaborado por: Ing. Juan Adolfo
Álvarez Martínez

Noviembre, 2014

http://www.uaeh.edu.mx/virtual

Conceptos introductorios.

El concepto de la definición de función tiene su origen en los escritos de Rene Descartes mediante la creación de la geometría analítica para representar expresiones algebraicas en el plano cartesiano y la teoría de las fluxiones de Isaac Newton.

Es muy común que hayamos alguna vez escuchado el término función en alguna ocasión en nuestra vida cotidiana, pero nos referiremos sobre todo a las matemáticas, describiéndola de una manera informal, para después precisar matemáticamente este término con el rigor que caracteriza a esta ciencia.

Si pensamos en alguna situación, o fenómeno que deseáramos estudiar, nos daremos cuenta de que en él hay factores (o variables) que intervienen para que éste suceda.

Por ejemplo si lanzamos un objeto hacia arriba, podemos medir y estudiar la altura que va alcanzando y el tiempo que va transcurriendo.

Tenemos en esta situación dos variables que son: el tiempo y la altura.

Por lo que para cada instante de "t" corresponde un valor de "h".

De esta forma decimos que la altura es una ***función*** del tiempo transcurrido.

Podemos hacer una serie de mediciones y en base a ello construir un modelo matemático o regla de correspondencia mediante el cual podemos representar gráficamente lo que sucede con el objeto estudiado.

En este problema, nos damos cuenta que tenemos un conjunto de datos que pertenecen al tiempo y otro conjunto que se refiere a las alturas alcanzadas, pero sin embargo para cada valor de "t", corresponderá un único valor de "h".

Es importante mencionar que los valores del tiempo pertenecen y generaran un conjunto el cual se denomina *dominio* y a su vez los valores de las alturas forman su propio conjunto llamado *contradominio.*

Estos valores en cada conjunto quedan determinados por las condiciones del problema.

Pensemos ahora en un terreno de forma cuadrada, al cual queremos calcularle el área que ocupa.

Entonces la fórmula es: $A= L^2$ de esta manera observamos que su área depende de lo que mide de lado.

Decimos entonces que el área es una función de su lado, es decir depende de esta medida, por lo que si el terreno disminuye la longitud de lado, el área será menor. En caso contrario el área aumentara si el lado es mayor.

Puede notarse que en esta situación abordada los valores que puede tener la longitud solo pueden ser valores positivos y el área solo puede tener también tener valores positivos.

Esto es importante mencionarlo ya que los valores que se emplean en el problema si bien pueden formar un conjunto muy grande, éstos quedan restringidos a qué tipo de valores se pueden emplear.

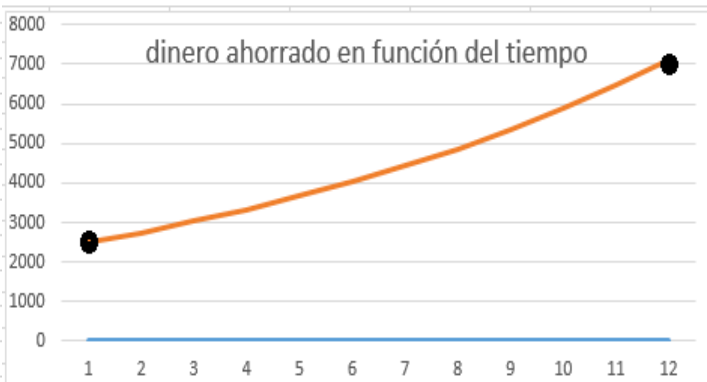
Para ello habrá que decir que en este curso solo se estudiaran funciones en las cuales solo se emplean números reales, es decir aquellos que se pueden representar en la recta numérica. Este tipo de funciones se conoce como funciones reales de variable real.

Para aclarar este concepto mencionamos el siguiente ejemplo que corresponde a un ahorrador que coloca en una cuenta de ahorros una cantidad de 2500 pesos en el mes de enero a un plazo de un año y de donde recibe 10% por concepto de intereses. Dicho monto se va reinvirtiendo en este tiempo de manera mensual y al final decide sacar su dinero.

Luego la función queda definida con los valores de la siguiente tabla y su representación gráfica.

Evidentemente el monto del ahorro depende del tiempo transcurrido.

tiempo	monto ahorrado
1	2500
2	2750
3	3025
4	3327.5
5	3660.25
6	4026.275
7	4428.9025
8	4871.79275
9	5358.972025
10	5894.869228
11	6484.35615
12	7132.791765



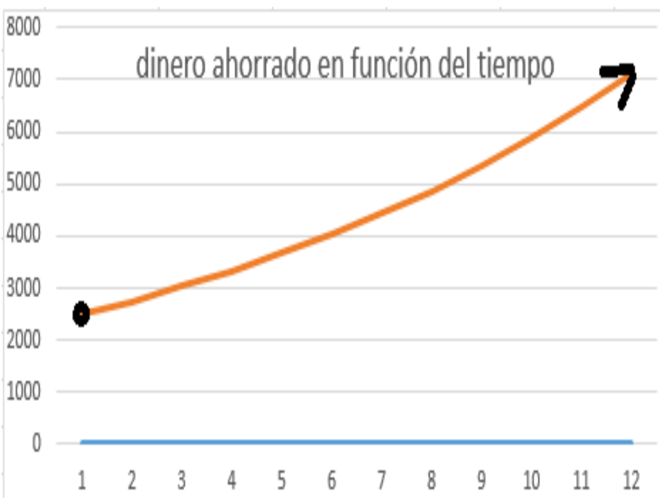
En este caso se dice que el dominio; es decir el conjunto de valores de la variable independiente es [1,12] y el contradominio es [2500, 7132.79] **estos conjuntos son los intervalos en los que la función existe o está definida.**

Nota que la forma de indicarlo es en paréntesis cuadrados llamados corchetes y la gráfica está dibujada con la terminación en dos puntos en negro.

Ahora bien si el ahorrador decide **no** retirar su dinero entonces quedara indeterminado el tiempo, que puede considerarse hasta el infinito, es decir abierto en cuyo caso se dice que el intervalo del dominio es semiabierto, y a su vez el intervalo del monto es también semiabierto, y eso se define como: $[1, \infty)$ y el contradominio es $[2500, \infty)$.

Gráficamente existe una diferencia, en que el límite inferior del intervalo del dominio está definido en 1 con un punto claramente conocido y el límite superior o derecho del intervalo no es conocido por lo que se representa con una flecha que indica que continúa hasta el infinito como se observa a continuación.

tiempo	monto ahorrado
1	2500
2	2750
3	3025
4	3327.5
5	3660.25
6	4026.275
7	4428.9025
8	4871.79275
9	5358.972025
10	5894.869228
11	6484.35615
12	7132.791765
13	....
14	....
20	....
50	....
......	.....



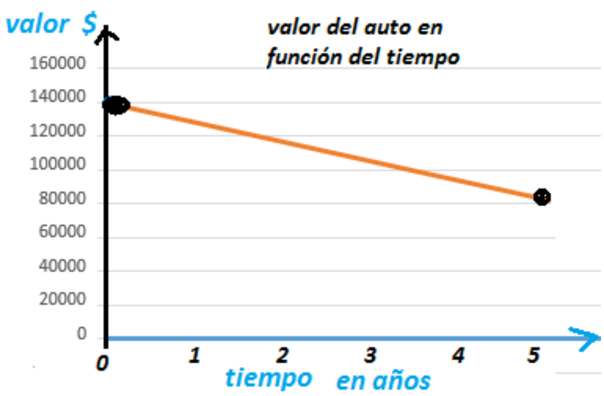
No está por demás decir en este momento aunque más adelante se explicará que este tipo de función es una exponencial ***creciente***, y debe su nombre a que a medida que los valores del dominio aumentan también los de la variable dependiente (del contradomino también se incrementan), y de manera inversa cuando los valores de "x" disminuyen, los de "y" también.

Veamos el caso de un comprador de un automóvil nuevo, el cual lo adquiere actualmente en la cantidad de 140,000 pesos, y después de cierto tiempo decide venderlo, y como ha de poderse saber, existe en estos casos una situación en donde a medida que el tiempo pasa, el valor del auto disminuye, a esto se conoce en términos de contabilidad como *depreciación* de los bienes, y supongamos que este auto disminuye su valor a razón de 10% de su valor inicial por cada año que transcurre.

Puede notarse evidentemente que se trata de una función ***decreciente*** porque ahora a medida que los valores de la variable independiente aumentan en este caso el tiempo, ahora los valores de la variable dependiente (el valor del auto) disminuyen.

Esto puede observarse en la siguiente tabla y gráfica.

tiempo en años	valor $
0	140,000
1	126000
2	112000
3	98000
4	84000
5	70000



En este caso el dominio está plenamente definido por los límites el intervalo, asi también el contradominio y se definen como:
Dominio: [0, 5] y el contradominio es: [140 000, 70 000].
Este tipo de función es lineal decreciente.

Puede mencionarse otros casos más como el de la presión atmosférica, la cual depende de la altitud, ya que a mayor altura respecto al nivel del mar la presión disminuye.

En estos ejemplos hemos visto que hay variables relacionadas en todo problema o situación a estudiar entre sí: altura y tiempo, lado y área, tiempo y dinero, presión, altitud, etc.

Como en este y en toda situación, la función que relaciona las variables es un caso en particular y por ello es diferente de las demás, y para representarlas gráficamente se puede identificar de manera clara conociendo sus propiedades y que puede ser de tipo lineal cuadrática, polinomial, racional, exponencial.

Podemos citar una gran cantidad de ejemplos más en donde haya situaciones de variables relacionadas entre si para estudiar lo que nos interesa.

En cualquier caso lo que nos debe quedar claro que en todo fenómeno se puede hallar variables y relacionarlas entre sí para estudiarlo.

A este tipo de casos en donde existen variables relacionadas entre sí por medio de una expresión algebraica se les conoce como ***funciones.***

En matemáticas es muy común que las funciones empleen las variables x,y para poder graficarlas en un plano cartesiano, pero como puede verse, en la vida real las variables pueden cambiar, pero el proceso de estudio es el mismo; en todo momento se debe distinguir cual es la variable independiente y cuál es la dependiente.

Las funciones son entonces:

Definición:

Una función es la correspondencia de un conjunto “X” de números reales a un conjunto “Y” de números reales, donde para cada valor de “x” existe un único valor de “y”.

Es importante mencionar que aquí en este curso solo se estudiaran funciones en donde se relacionan solo dos variables, pero debe entenderse que existen situaciones y fenómenos mucho más complejos en donde hay muchos otros factores (variables) relacionadas entre sí.

Dicho esto, regresemos a los ejemplos mencionados.

Se observó que existen variables las cuales al identificarlas y medirlas nos permitirá construir un modelo matemático para poder tener inclusive más datos y hacer cálculos sobre lo que estamos estudiando.

Con este modelo matemático, y por medio de un plano cartesiano, podemos representar dichas variables (pares de valores) y obtener una grafica para analizar con mayor detalle el comportamiento de dicho fenómeno.

Ahora veremos como se hace la grafica de una función.

Ante todo, debemos tener en cuenta que en plano cartesiano podemos representar como ya nos podremos dar cuenta funciones en donde hay dos variables relacionadas entre sì: una de ellas llamada variable independiente y otra variable dependiente, por lo que entonces un punto en este plano deberá tener en consecuencia dos coordenadas o valores de estas variables: uno para “x” y otro para “y”, las cuales podrán ser positivas, negativas, facciones e inclusive nulas.

Esto matemáticamente, es un punto de dos coordenadas x,y : P(x,y), que representa una posición o punto en el plano.

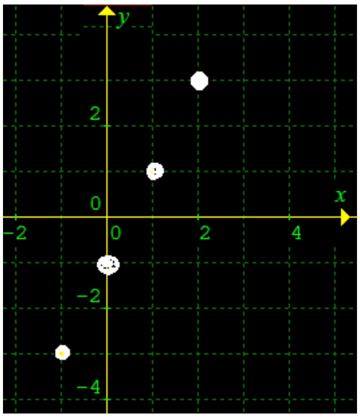
Entonces para poder tener la grafica de una función, debemos contar con una cantidad suficiente de puntos que nos permitan identificar de una manera mas o menos precisa el tipo de función que representa, y se unen por medio de un trazo suave, el cual puede ser continuo o no, según se estudiara mas adelante cuando se hayan definido mas conceptos relativos a las funciones.

Cuando en una gráfica no se encuentra limitada por algunos puntos, se entenderá que la función tiene como dominio [∞,∞]

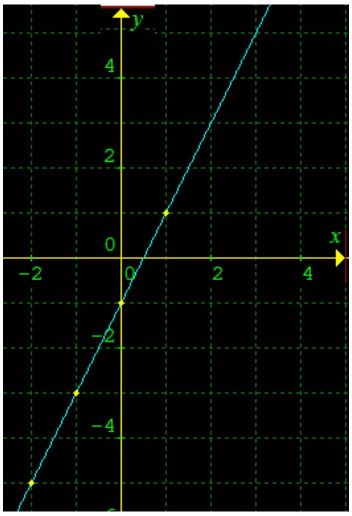
Ejercicio resuelto:

Identifique cada uno de los siguientes puntos en el plano cartesiano y el cuadrante en el que se encuentran y únelos por medio de un trazo continuo.

A (-1,-3)
B (0, -1)
C (1,1)
D (2,3)



Se puede observar que el tipo de función que se obtiene es una lineal creciente.



Ahora graficaremos una función, por medio de una tabla de valores y la regla de correspondencia.

El procedimiento consiste ***en sustituir*** en la regla de correspondencia (que es la función) ***los valores de "x" para obtener en cada caso el correspondiente valor de "y"***, no olvidando que a cada valor de "x" solo le corresponde un solo valor de "y", y que evidentemente al cambiar "x", también cambia "y".

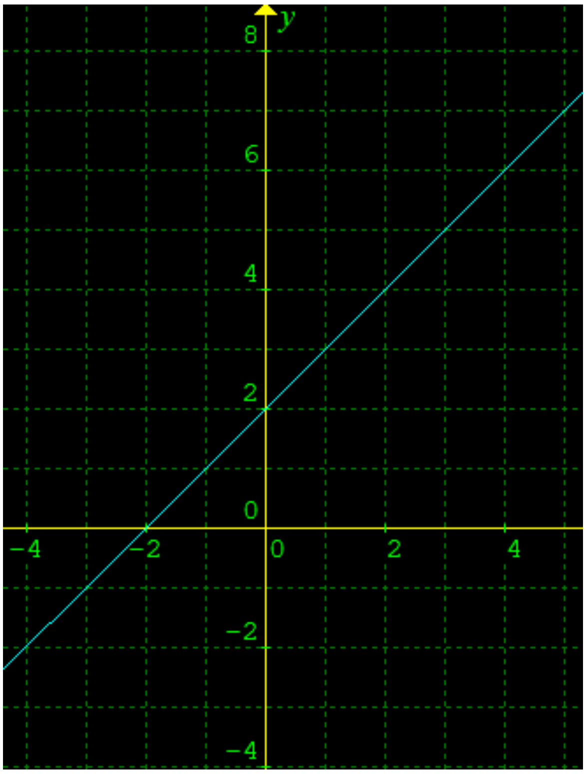
Ejemplo:

Utilizando la siguiente tabla de valores (x,y) y la expresión dada (función **y = x+2**), completa los espacios que corresponde y trace la grafica en el plano cartesiano uniendo los puntos.

Variable independiente **(x)**	Regla de correspondencia (FUNCIÓN) : **y = x+2**	Variable dependiente **(y)**	**Punto (x,y)**
-3	Y= -3+2 =	-1	-3 ,-1
-2	Y= -2+2 =	0	-2 , 0
-1	Y= -1+2 =	1	-1, 1
0	Y= 0+2 =	2	0, 2
1	Y= 1+2 =	3	1, 3
2	Y= 2+2 =	---	2, ____
3	Y= 3+2 =	---	3, ____

Siguiendo el proceso cuales son los últimos valores de "y"

El resultado de la gráfica se muestra a continuación:



Podrás observar que la grafica que resulta al unir los puntos dados y los que se calcularon es una línea recta, la cual es una función lineal creciente ya que la regla de correspondencia **y = x+2**

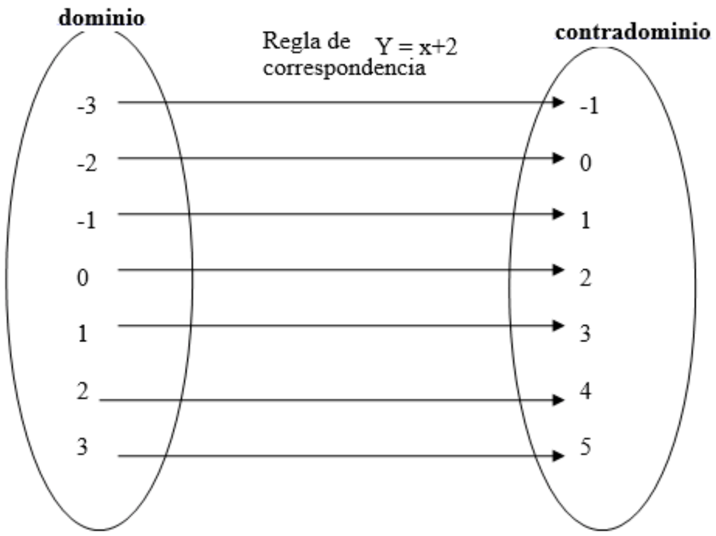
RESUMEN.

Con lo que se ha explicado hasta el momento podemos decir lo siguiente:

- A la expresión que relaciona las dos variables (x,y) se le denomina regla de correspondencia.
- A la variable "x" se le llama variable independiente
- A la variable "y" se le llama variable dependiente
- Al conjunto de valores que toma la variable independiente X, se le llama dominio
- Al conjunto de valores que toma la variable dependiente Y, se le llama contradominio o codominio.

→ Es importante mencionar que los valores que se le han dado a las variables en estos ejemplos, no son los únicos, sino que el conjunto de valores de cada uno es mucho más amplio, ya que pueden tener cualquier otro valor dependiendo del problema, y aquí solo se han dado algunos valores que pertenecen a estos conjuntos.

A continuación se presenta gráficamente parte del dominio y contradominio de esta última función descrita.



En este dibujo puede observarse de una manera mas clara el concepto de función, el cual dice que es la relación que existe entre dos conjuntos de variables, a través de una regla de correspondencia, mediante la cual a cada valor de la variable independiente "x" le corresponde uno y solo un valor de "y".

Matemáticamente las funciones en donde la variable independiente es "x" y la dependiente es "y", como en el ejemplo dado se denotan mediante:

y = f(x) ……………… que significa: la variable "y" es una función de "x".

ELEMENTOS DE UNA FUNCIÒN.

Una vez visto el concepto de función, procederemos a definir algunos términos que nos permitirán estudiar con mayor detalle este tipo de expresiones matemáticas.

DOMINIO DE UNA FUNCION.

Anteriormente se menciono que todo el conjunto de valores que pueden asignarse a la variable independiente "x" se le llama **dominio de la función.**

Con frecuencia el dominio de una función f no se especifica, sino que solo se da la regla de correspondencia que define a la función, en estos casos se dice que el dominio de f es el conjunto mas grande de números reales para los cuales tiene sentido la regla. En otras palabras el conjunto es infinito.

Ejemplos de funciones cuyo dominio es un conjunto infinito son: las lineales, cuadráticas y polinomios.

Sin embargo algunos tipos de funciones tienen restricciones en las que su dominio no es un conjunto infinito, ejemplos de ellas son las ***funciones racionales***. Veamos un ejemplo:

Determine el dominio de la función

$$y = \frac{3x}{x-2}$$

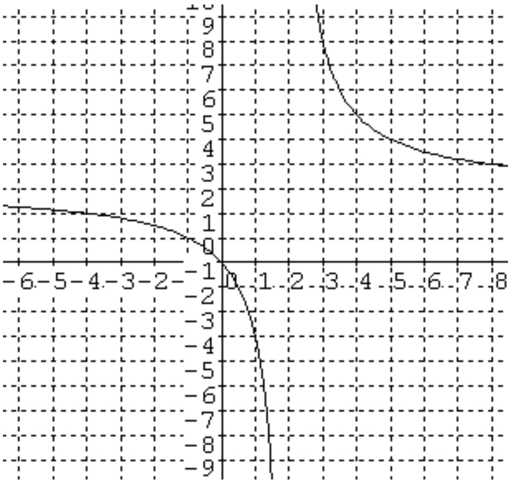
la regla de correspondencia indica que debemos dividir 3x entre x-2. y como no es posible la división entre cero, el denominador no puede anularse.

De esta forma vemos entonces que la variable "x" que se encuentra en el denominador debe tener cualquier valor excepto el 2 ya que en este caso el denominador se anula.

Por lo tanto el dominio de esta función es: $(-\infty,\infty)$ excepto $x = 2$

Que significa: el dominio de la función es: todos los valores de "x" (números reales) tales que sean diferentes de 2. Es decir cualquier valor, excepto el 2.

En la siguiente figura se observa la grafica de esta función. Se puede identificar como ya se explico que, cuando el valor de x es igual a 2, no hay valor para "y", es decir, no esta definida en este punto la función.



<u>Segundo ejemplo</u>:

Determine el dominio de la función:

$$y = \sqrt{x - 1}$$

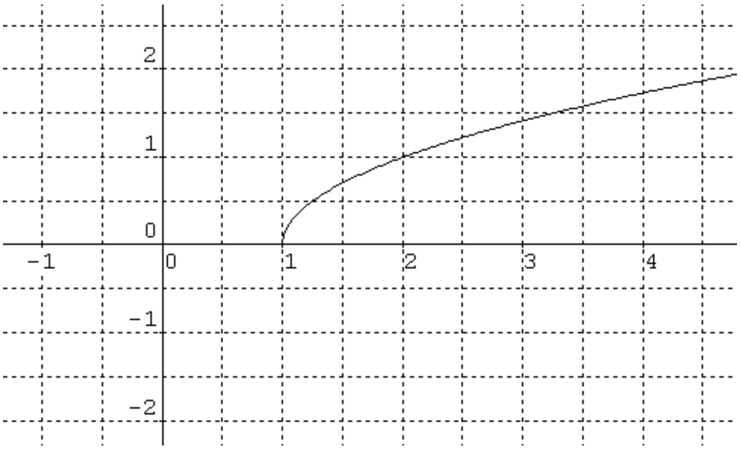
En este caso vemos que los valores de la variable "x" deberán cumplir con la condición de que la raíz cuadrada de x-1 sea mayor o por lo menos igual a cero, y quedan excluidos aquellos valores que nos den como resultado raíces negativas, ya que estas no son números reales para la variable "y".

Matemáticamente esto es: $\mathbf{x - 1 > 0}$

Que es una desigualdad cuya solución es: $\mathbf{x > 1}$

Es decir el **dominio de la función** es: todos los números reales que sean mayores o igual a 1. O sea: $(1 , \infty)$

En la grafica siguiente se observa la función, que esta definida como ya se demostró para valores de x > 1



Tercer ejemplo:

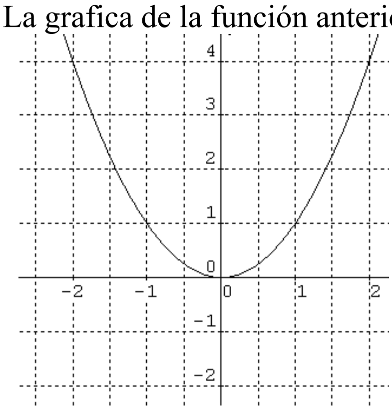
Determine el dominio de la función

$$y = x^2$$

en este caso se tiene una función cuadrática, en donde no hay ningún tipo de restricción, ya que la variable independiente "x", puede tomar cualquier valor, y en consecuencia siempre para cada valor de "x", habrá un valor de "y".

Entonces el dominio de la función es: (- ∞, ∞) que significa que el dominio de f es desde menos infinito hasta infinito. Y en cuanto al contradominio puede verse que la función está definida en los valores de "y" siendo el menor valor y= 0 que es donde se encuentra colocado el vértice. Es decir el contradominio es: [0, ∞)

La grafica de la función anterior es:



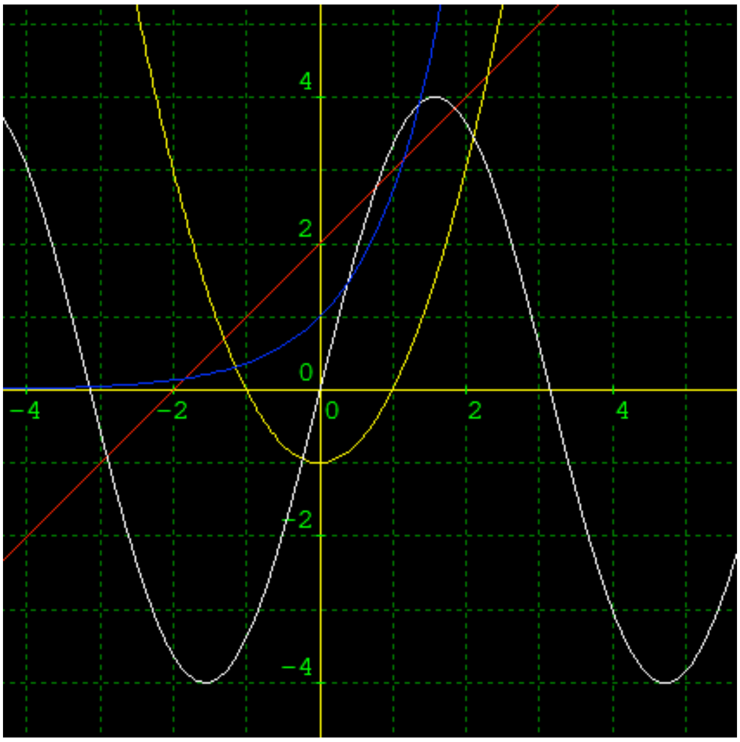
FUNCIONES CONTINUAS Y FUNCIONES Y DISCONTINUAS.

Las funciones continuas son aquellas que están definidas en todo su dominio, es decir al graficarlas, se tiene un trazo continuo, las discontinuas son aquellas que para alguno o algunos valores de la variable “x” no se tiene un valor para “y”, es decir no está definida en ese punto como por ejemplo la función:

$$Y = \frac{2}{x-1}$$

la cual es discontinua en el punto “x” = 1 ya que para este caso existe una división entre cero y no se puede realizar, el resultado se define como ***infinito***

Ejemplos de funciones continuas son todas las mostradas en las gráficas siguientes; unas son algebraicas, otras son trascendentes.

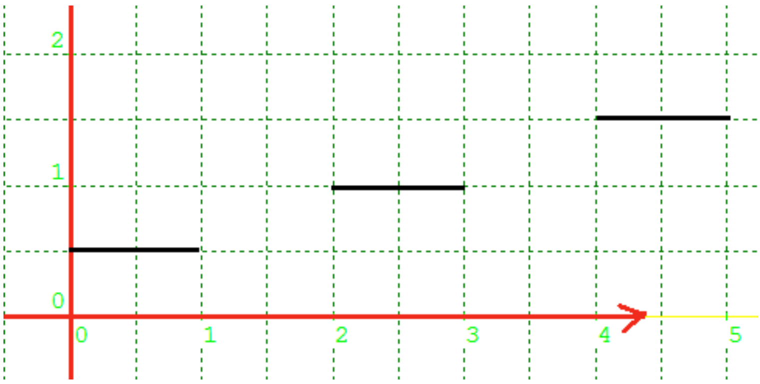


Ejemplos de funciones discontinuas como las que se muestran a continuación.

Existen algunos tipos de funciones discontinuas que son casos particulares y son denominadas funciones continuas a trozos.

Ejemplos de estos casos se describen a continuación; considere una situación en la que se conecta una bomba de agua para suministrar líquido a un tanque elevado, pero dicha bomba se conecta durante una hora y está funcionando en ese periodo de tiempo, y en la siguiente hora se desconecta, para volver a repetir el proceso.

Entonces al representar en una gráfica dicha función se obtiene la imagen siguiente.

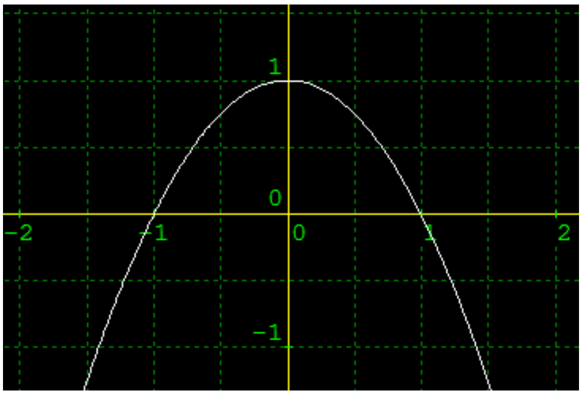


MAXIMOS, MINIMOS Y CEROS DE UNA FUNCIÓN.

Las funciones tienen propiedades y comportamientos gráficos característicos los cuales pueden determinarse ya sea a partir del conocimiento de su expresión analítica o bien de su gráfica.

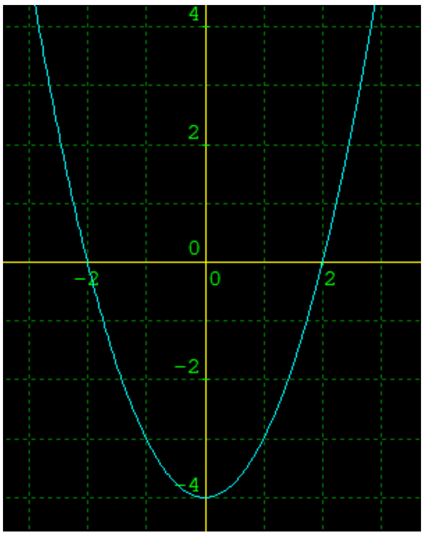
MAXIMOS DE UNA FUNCIÓN.

Se define un punto máximo en una función cuando en su representación por ejemplo grafica antes de ese valor los demás tienen un valor menor y también los que le suceden. Por ejemplo en la siguiente grafica la función y= 1- x^2 tiene un máximo en el punto x= 1. En este mismo caso se dice que la función es cóncava hacia abajo. ***En esta grafica solo se tiene un punto máximo***, y se denomina máximo absoluto porque no existen valores mayores que x= 1 donde la función tenga un mayor valor.



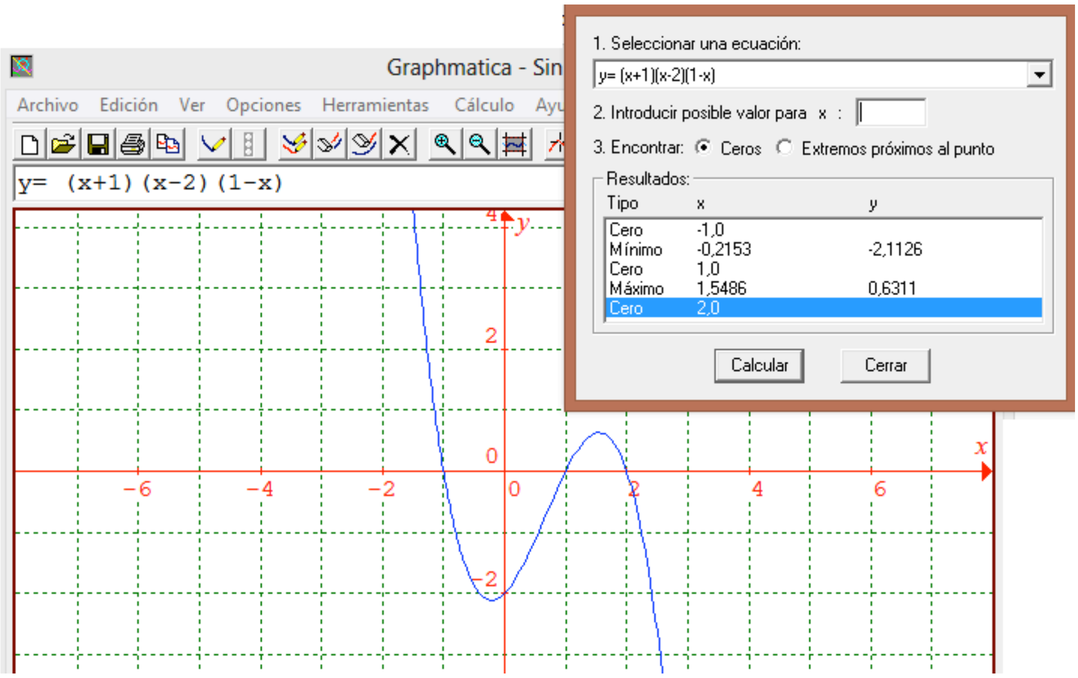
MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN

Podemos ejemplificar de la misma forma que el caso anterior con una función cuadrática, ahora para un mínimo como en la función y = x^2 - 4 en donde la función tiene un mínimo que es el punto x= - 4 en donde para valores anteriores y posteriores a este valor la función no tiene mayor valor. En este caso la función se denomina que es cóncava hacia arriba.
Este punto mínimo coincide con el vértice de la función.



MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS

Existen funciones en las que se tienen varios máximos y mínimos en una zona determinada, por lo que se pueden conocer a partir de procedimientos que se explicaran en las unidades posteriores, un ejemplo de estas son las funciones polinomiales como la mostrada que es de tercer grado que tiene un máximo en x = 1.5 y un mínimo en x= - 0.2.



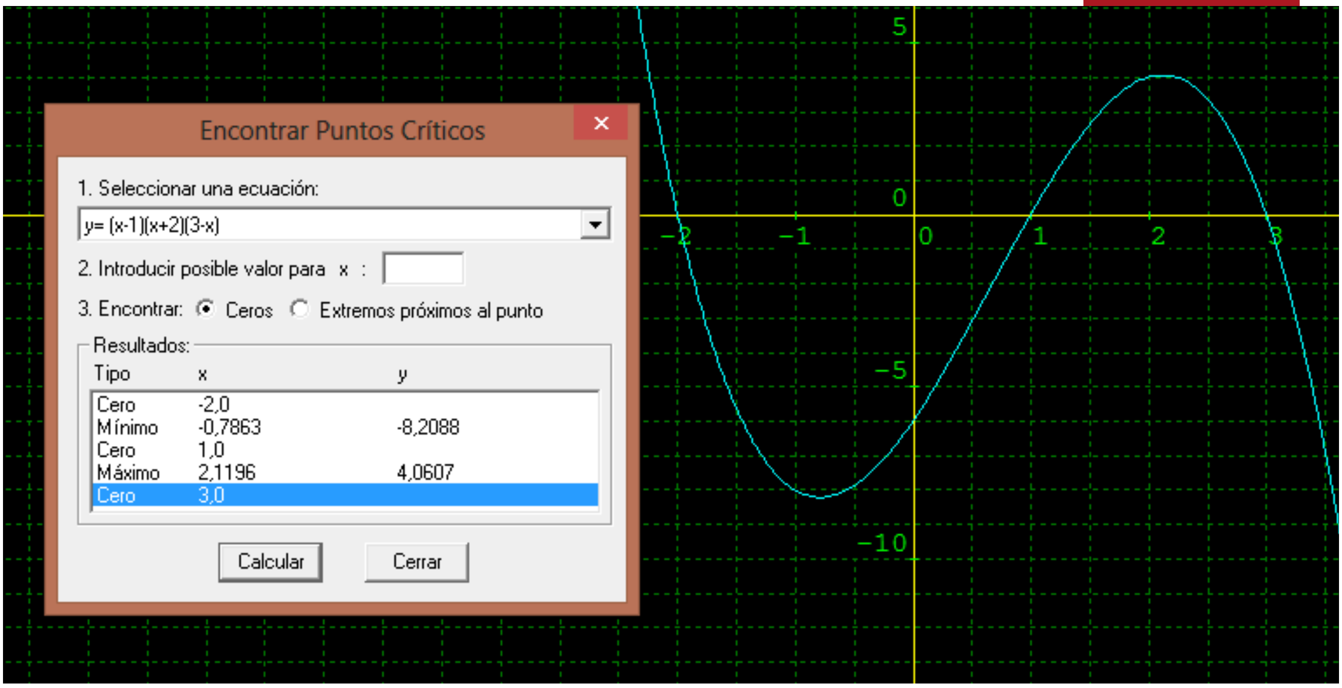
CEROS DE UNA FUNCIÓN.

Aprovechando la oportunidad de la gráfica anterior para definir que los ceros de una función o bien también llamadas raíces son aquellos valores en los que la gráfica cruza al eje de las abscisas, es decir el eje “x”, en este caso la función tiene como ***raíces o ceros*** los puntos x= -1, x= 1 y x = 2

Formalmente se define un cero como el valor de “x” para el cual el valor de la variable “y” es en efecto cero. Puede comprobarse al sustituir en la función que corresponde a la gráfica que cuando x= 2 se tiene y= (x+1)(x-2)(1-x) =

y= (2+1)(2-2)(1-2) = (3)(0)(-1)= 0, lo mismo sucede para los otros dos casos en que x= 1, y x= -1

La siguiente grafica también es una función polinomial, la cual tiene tres raíces, en x= -2, x= 1 y
x= 3 y con un máximo relativo en x= 2.1 y un mínimo relativo en x= - 0.7

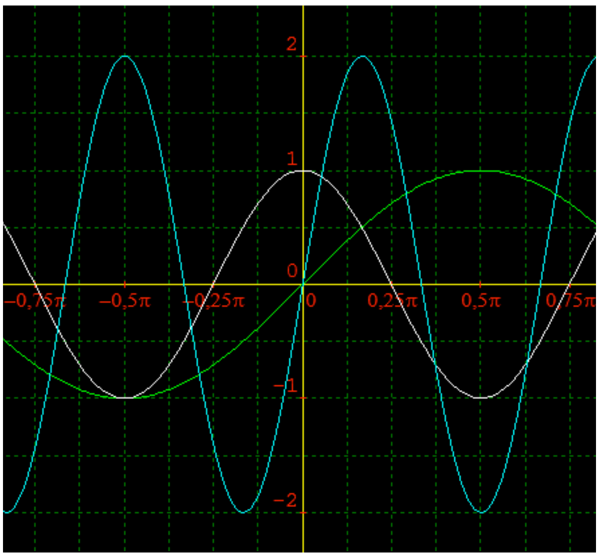


TIPOS DE FUNCIONES.

Existen diversas maneras de clasificar las funciones según sus caracteristicas, por ejemplo pueden ser algebraicas, trascendentes, continuas, discontinuas, crecientes o decrecientes.

Algunos ejemplos de funciones lineales, cuadraticas, polinomiales o racionales son resultado de casos, situaciones o problemas que cotidianamente se presentan en nuestro alrededor, los casos de funciones trigonomericas por ejemplo son resultados de procesos tecnologicos como por ejemplo la corriente alterna la cual varía su polaridad de positiva a negativa por cada periodo de un segundo, es decir, tiene infinito numero de valores maximos y minimos, por ello se llama ***periodica*** porque se repite su grafica y comportamiento de manera indefinida. Estos tipos de funciones periodicas se muestran en la imagen siguiente.

La azul es: y= 2 sen x, la grafica blanca es y= cos 2x, la grafica verde es y= sen 3x

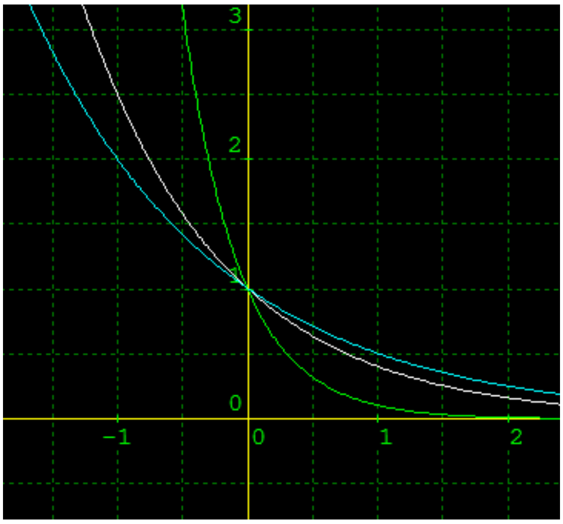


Las funciones exponenciales por ejemplo son aquellas cuyo comportamiento tiene la caracteristica de que una de las variables "la dependiente" puede aumentar muy rapidamente o disminuir muy rapidamente, en cuyo caso se denominan exponencial positiva o exponencial negativa.

La tipología de este tipo de funciones es $y = a^x$ donde a es conocida como base y "x" es el exponente.

Algunos de las areas en que aparecen este tipo de funciones exponenciales negativas o decrecientes son por ejemplo en lo que se denomina decaimiento radiactivo el cual es un proceso de desintegracion de elementos radiactivos como el uranio que tienen la caracteristica de irse desintegrando a medida que transcurre el tiempo, y preentan una vida media de varios años, lo que quiere decir que si un elemento tiene una vida media de desintegración de 50 años, significa que se requiere de 50 años para que desaparezca la mitad de ese elemento.

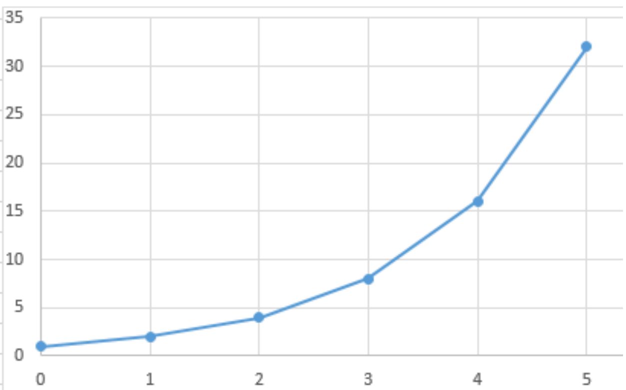
Un ejemplo de estas graficas son las siguientes: $y= 0.2^x$, $y= 0.4^x$, $y = 0.5^x$



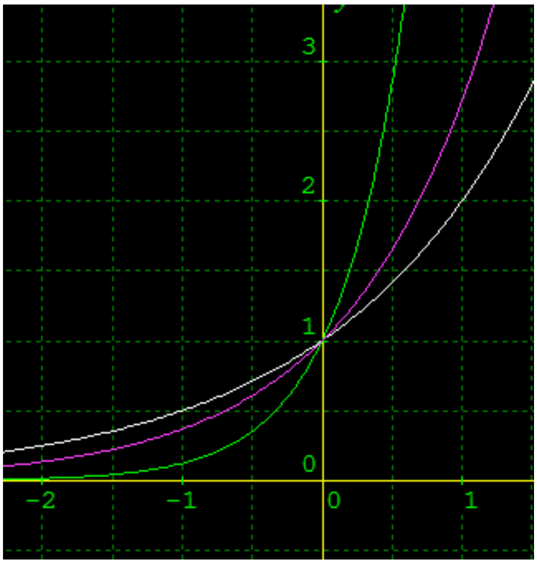
Las funciones exponenciales crecientes o positivas son aquellas como la del proceso biológico de la mitosis que genera la division y reproduccion celular en donde una sola celula da origen a dos celulas idénticas, y a su vez cada una da origen a dos celulas más y repitiendose el proceso una y otra vez.

Una tabla del proceso de la mitosis y su respectiva grafica se muestra a continuación, la expresión analitica es: $y= 2^x$

paso	numero de celulas
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32



Otro tipo de funciones exponenciales son: $y= 3^x$, $y= 10^x$, $y= e^x$

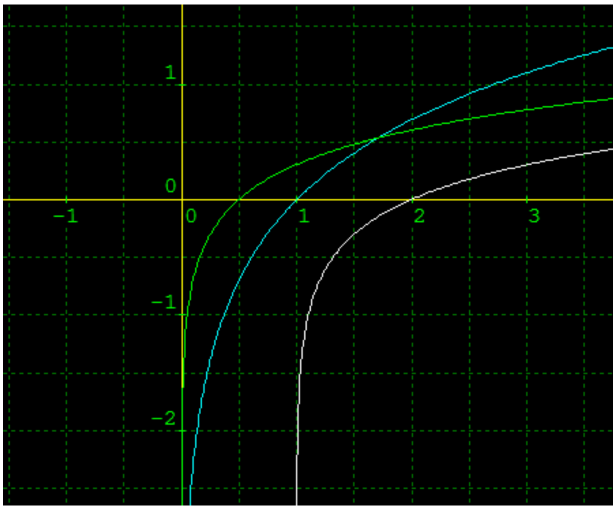


Si se pone un poco de atencion en la ultima función, esta definida por una letra que es la “e” conocida en el area de la matematica como un numero irracional, el cual es la base de los logaritmos naturales y cuyo valor se aproxima a 2.712818……..

Las funciones logaritmicas se definen por medio de expresiones como:

y= Log x, y= Log 2x, Y= Ln x, donde de igual forma ésta ultima es la función logaritmo natural en la cual la base de dicha función es el número “e” que se ha mencionado anteriormente.

Ejemplos típicos de estas graficas de funciones logaritmicas se muestran a continuación.



OPERACIONES CON FUNCIONES.

Así como se llevan a cabo las operaciones aritméticas con los numeros reales de adicion, resta, multiplicación y division, es posible aplicarlas a las funciones de manera que a partir de una o dos funciones se pueden obtener otra u otras funciones como se verá en los siguientes ejemplos.

Pare ello es importante tener en cuenta la representacion grafica de cada una de ellas para poder visualizar el resultado de una operación entre funciones.

Ejemplos.

Sean las funciones

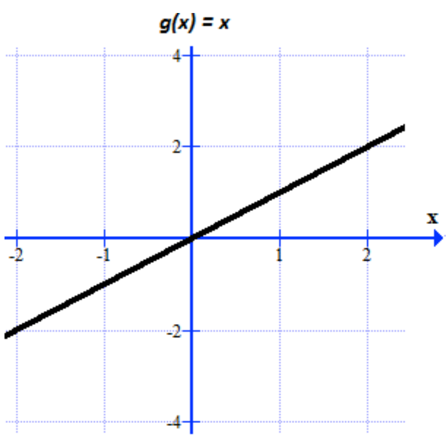
1) **$f(x) = -2$** funcion constante, es una recta horizontal en x= -2

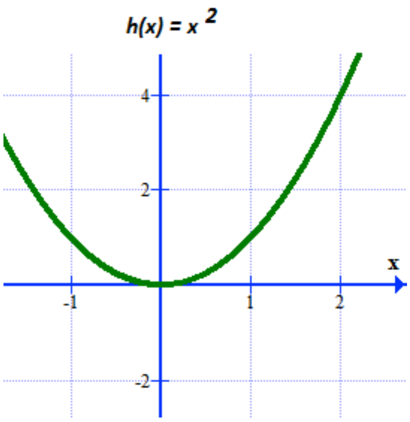
2) **$g(x) = x$** funcion lineal creciente

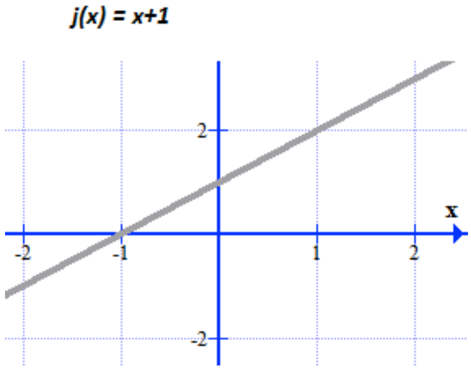
3) **$h(x) = x^2$** funcion cuadratica

4) **$j(x) = x+1$** funcion lineal con intersección en x= - 1

Para explicar y poder comprender las operaciones con las funciones dadas, es conveniente que primero puedan visualizarse cada una de ellas de manera individual, para luego conocer el resultado de la operación. En las siguientes imágenes se muestra cada una de ellas.



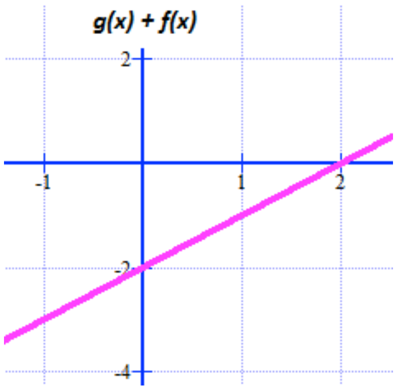




Ahora definimos las operaciones:

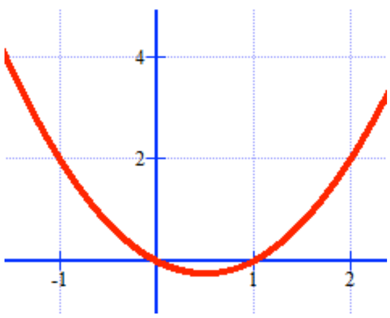
a) $g(x) + f(x)$ lo cual representa una suma, de forma que el resultado es: $x-2$

esta funcion es continua, y por lo tanto su dominio es $[-\infty, \infty]$ y el rango es $[-\infty, \infty]$

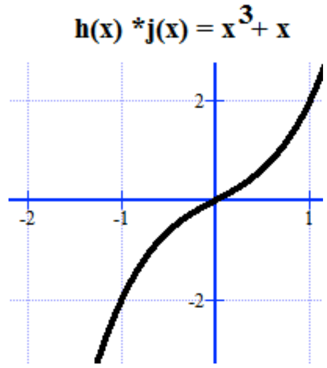


b) $h(x) - g(x)$ lo que representa una resta cuyo resultado es: $x^2 - x$, que es una función cuadrática de concavidad positiva o bien que abre hacia arriba.
Es una funcion continua cuyo dominio es $[-\infty, \infty]$ y el rango es $[- 0.25, \infty]$
El menor valor para "y" es precisamente el mínimo que esta en:
$x= 0.5$, $y= - 0.25$

$h(x) - g(x) = x^2 - x$



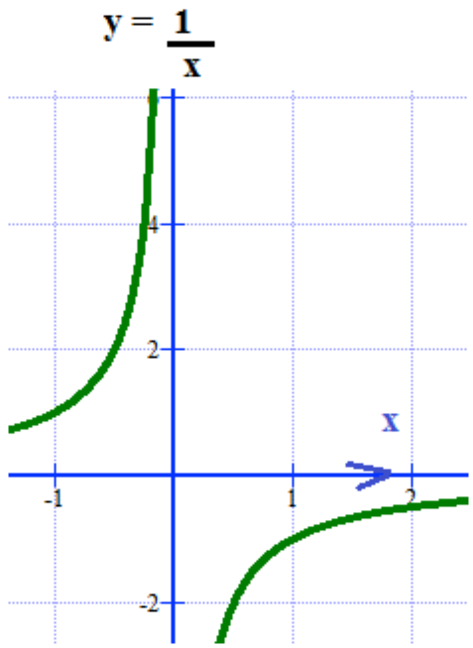
c) $h(x) *j(x)$ = que representa una multiplicación cuyo resultado es: $(x^2)(x+1) = x^3 + x$
que es una función polinomial de grado 3.



Es una función continua para todo valor de "X" en los números reales, es decir no existe ninguna restricción para asignar cualquier valor a "x" el cual siempre tendrá su correspondiente valor de "y"

d) g(x) / h(x) = x / x^2 que representa una división cuyo resultado es: 1 / x

En este caso hay que enfatizar que esta función resultante es una función racional y es discontinua porque para el valor de x= 0 no existe valor de "y"



REFERENCIAS.

Larson (2000). Precalculo. Editorial Pearson. México D. F.
Leithold (2002). Calculo. Editorial Oxford. México D.F.

Lectura

Colaborador: Ing. Juan Adolfo Alvarez Martínez
Nombre de la Asignatura: Cálculo Diferencial e integral
Programa educativo: Bachillerato Virtual