UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DEL ESTADO DE HIDALGO

Apuntes de cálculo diferencial

Elaborado por: Ing.Juan
Adolfo Álvarez Martínez

Noviembre, 2014

http://www.uaeh.edu.mx/virtual

CONCEPTOS BÁSICOS DE CÁLCULO.

SISTEMA DE UNIVERSIDAD VIRTUAL

Las variables y las funciones

Un concepto muy importante en el estudio de la variación es el de variable y función.

La conexión entre sus expresiones analíticas y representaciones gráficas es utilizada para *manipular* los procesos de cambio, pues se considera que es muy difícil realizar operaciones con los cambios si no se cuenta con una fórmula matemática y una gráfica que ayude a representar el comportamiento de esos cambios. Sobre esta base se aborda el cambio y su medición.

Es necesario enfatizar que la noción de **función** no siempre es comprendida por el alumno, y es necesario conseguir una comprensión total de este concepto fundamental.

La tabulación como tal debe ser utilizada para registrar datos numéricos experimentales para estudiar la variación, esto con el fin de recalcar el papel de las variables dependientes y las independientes.

Un rasgo importante que debe estudiarse en lo referente a las funciones y sus gráficas es el comportamiento cualitativo de la función;

Para cuantificar cuanto cambia una función utilizamos el método de ***la variación***; esto es un procedimiento que nos permite saber cuánto aumenta o disminuye en función de la variación de cualquiera de las variables involucradas.

Sobra decir la gran importancia que tienen las variables y funciones en la descripción del mundo que nos rodea, ya que existe infinidad de fenómenos naturales, en donde se encuentran involucradas dos o más variables entre sí.

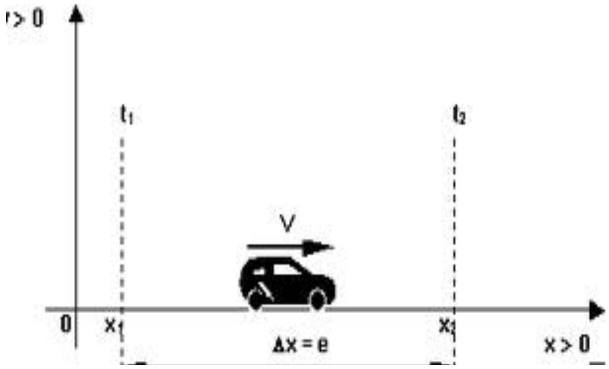
Nos introducimos pues al estudio de la variación por medio de modelos matemáticos simples para determinar cuánto cambia una variable en un fenómeno dado en un instante inicial y en uno posterior utilizando la expresión de diferencias: $\Delta x = x_f - x_i$

Podemos encontrar en la naturaleza diferentes fenómenos y problemas en donde se presenta una relación entre variables, por ejemplo podemos decir que el área de un círculo es una función de su radio: " A= f(r) " ,

Al cambiar el valor de éste, en consecuencia habrá también un cambio en el área. Es decir: el incremento del radio repercutirá en un incremento del área:

$$\Delta A = f(\Delta r)$$

NOTA: El símbolo Δ se emplea para indicar "un incremento" de la variable



Otro caso es el que la distancia recorrida por un atleta es una función del tiempo: d = f(t) ; al cambiar la variable tiempo también se verá modificada la variable distancia.

Podemos citar una cantidad enorme de problemas donde se puede observar la relación entre dos variables, pero cabe señalar sin embargo que existe una infinidad de fenómenos en donde las variables no son únicamente dos, sino 3 o más; por ejemplo si *deseamos estudiar el crecimiento de una planta* podemos decir por simple inspección que depende de muchos factores (variables) entre los que podemos mencionar al clima, el tipo de suelo, la cantidad de agua, la cantidad de fertilizante, el tiempo de exposición al sol, la genética de la planta entre otros factores más.

Puede verse a simple vista que este es tan solo un ejemplo de la cantidad de variables que implica el estudio de un fenómeno, lo que en consecuencia aumenta el nivel de complejidad en el análisis.

Este tipo de fenómenos que presentan muchas variables, se conoce como calculo de varias variables y el tipo de problemas que se abordan en donde solo hay dos de ellas, se conoce como **calculo de una variable,** que como ya es de tu conocimiento es muy común representar matemáticamente mediante: y = f (x).

En el curso se estudiaran por lo tanto, las relaciones entre los cambios de las variables de una función considerando que estos cambios (que pueden ser incrementos o decrementos) en los valores de las variables *se dan en términos muy pequeños (infinitesimales)* y el cociente de la relación que hay entre estos cambios de cada variable es lo que conocemos como derivada.

En términos matemáticos esto es:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

…………….. que se lee como:

El límite del incremento de la variable dependiente (y) con respecto a la variable independiente (x) cuando el incremento de la variable independiente tiende a ser cero **es equivalente a la derivada**.

Los cambios relativos se miden por medio de razones o cocientes entre cambios. Este es un concepto fundamental en el Cálculo Diferencial, ya que siempre que se estudia un fenómeno de la variación lo importante no es sólo determinar los cambios, sino determinar qué tan rápido cambia lo que está cambiando, y la mejor forma de averiguarlo es por medio de las razones entre los cambios.

LA DERIVADA.

El cálculo se fortaleció a raíz de cuatro clásicos problemas sobre los que los matemáticos europeos trabajaron durante el siglo XVII. Estos problemas fueron:

(1) El problema de la recta tangente.

(2) El problema de la velocidad y la aceleración.

(3) El problema de los máximos y mínimos.

(4) El problema del área.

Conceptos básicos.

Derivada de una función

El concepto de derivada no implica un término difícil de comprender, dado lo que ya se ha explicado al inicio del curso en cuanto a sucesiones, límites y la misma derivada que son términos intrínsecamente relacionados entre sí.

Explícitamente tenemos que: **dada una función *y = f(x)*, la derivada mide la variación de *y*, cuando hay una pequeña variación de *x*.** Esto es, dada una función y = f (x), si hallamos su derivada se obtiene una nueva función llamada derivada de la anterior. Es decir:

Función:		Operación derivada:		Función derivada:
$y = f(x)$	$\rightarrow$	$\frac{dy}{dx}$	$=$	$y' = f'(x)$

El procedimiento para obtener dicha derivada se llama ***"derivación".***

Por otro lado es importante mencionar que: *para que exista la derivada de una función en un punto, tiene que existir ese límite. Cuando no existe este límite, se dice que la función no es derivable en ese punto.*

Para representar la derivada de una función se utilizan los símbolos: y', $f'(x)$ y $\frac{dy}{dx}$

Es muy importante darse cuenta que en ésta notación: "$\frac{dy}{dx}$" es un símbolo y no una fracción.

Los otros símbolos que también se usan para denotar una derivada fueron introducidos por algunos matemáticos que también hicieron aportaciones muy importantes a esta ciencia del cálculo.

La notación $\frac{dy}{dx}$ de la derivada, se llama notación de Leibniz quien la utilizó para indicar simbólicamente el paso al límite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cambiando Δ por *d.*

Para hallar el resultado de la función derivada basta con aplicar la definición del concepto derivada que es:

La derivada *de una función es el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando este tiende a cero.*

Matemáticamente se representa por:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Hay una fórmula que se conoce como "regla general ó de los 4 pasos" para obtener dicha derivada de acuerdo con la definición dada anteriormente. La aplicación de esta fórmula se observa a continuación, hay que poner espacial atención a cada uno de los pasos.

EJEMPLO.

Obtener por medio de la definición, la derivada de la función **$y = x^2$**

PASO 1 : se sustituye en la función x por "$x + \Delta x$" , como también y por "$y + \Delta y$".

PASO 2 : se resta el valor dado de la función del nuevo valor y se obtiene Δy (que es el incremento de la función".

PASO 3 : se divide Δy (incremento de la función) entre Δx (incremento de la variable independiente).

PASO 4 : se calcula el límite del cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando Δx "tiende" a cero, y el límite que se ha obtenido es la derivada que se estaba buscando.

MATEMÁTICAMENTE ESTO ES:

Sea la función $\mathbf{y = x^2}$

Paso 1: suma de incrementos:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$$
$$= x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2$$

Paso 2: resta de la función:

$$\begin{array}{lrcl} & \cancel{y} + \Delta y & = & \cancel{x^2} + 2x\,\Delta x + \Delta x^2 \\ - & \cancel{y} & = & \cancel{x^2} \\ \hline & \Delta y & = & 2x\,\Delta x + \Delta x^2 \end{array}$$

Paso 3 división entre el incremento de la variable independiente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\,\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \quad \text{es decir:} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\,\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} + \frac{\Delta x^2}{\Delta x} \quad \text{o sea:} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

Paso 4: calculo del límite cuando Δx tiende a cero:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + 0) = 2x$$

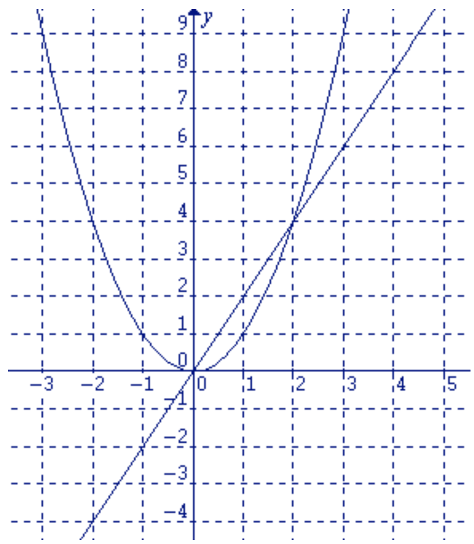
Por lo que finalmente La función derivada es: $\frac{dy}{dx} = 2x$

Ahora veamos gráficamente el resultado obtenido.

Sabemos que la grafica de la función a derivar **$y = x^2$** es una parábola.

Asimismo la grafica de la función derivada $f'(x)$ o bien

$\frac{dy}{dx} = 2x$ Es una recta, que observamos a continuación.



Podemos interpretar con estos datos como se ve en la figura, que *la derivada* representa una recta secante, la cual al tomar el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, se viene a transformar en una **recta tangente** debido a que como se ha de recordar del tema de geometría analítica, el cociente que estamos analizando:

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es una diferencia de coordenadas $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ que representa como ya sabemos

La pendiente "m" de una recta.

Ahora bien, si nos proponemos sustituir el valor de x=3 en la función derivada nuestro resultado es:

$$\left.\frac{dy}{dx} = 2x\right|_{\text{pto } x=3} = 2(3) = 6$$

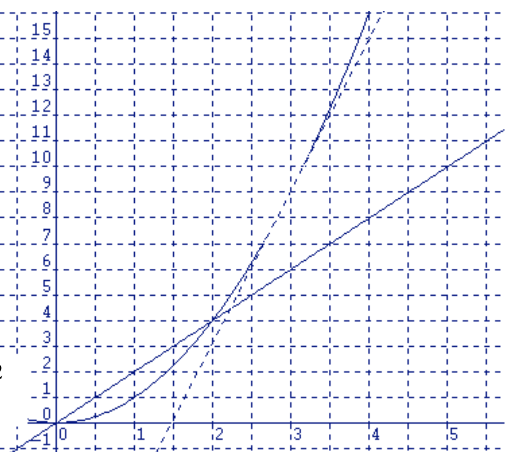
es decir queda: **m= 6** que viene a ser el valor de la pendiente de la recta que pasa por este punto.

SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DE LA DERIVADA.

Finalmente podemos concluir que la tangente en un punto de una curva se obtiene como límite de la secante en ese punto.

En la siguiente figura se observa el ejemplo resuelto: la función a derivar, la derivada y la recta tangente en el punto x=3

$y = x^2$



Recta secante:
Derivada:
$\frac{dy}{dx} = 2x$

Recta tangente: límite de la recta secante (derivada en x = 3).

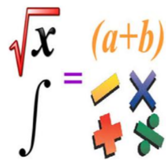
Como hemos podido darnos cuenta, hemos llegado a definir matemáticamente y demostrar el significado de la derivada. Y esto fue lo que por mucho tiempo así como procedimos, según se dice es lo que llevó a Leibniz al descubrimiento del cálculo diferencial.

Otros matemáticos como por ejemplo Newton, definen la derivada desde otra perspectiva, con relación al cambio en las variables del movimiento de un cuerpo, lo que permite determinar la rapidez o posición de un objeto por medio de la aplicación de la derivada. Nosotros nos enfocaremos a usar desde la perspectiva geométrica de Leibniz su significado de este concepto fundamental del cálculo.

La regla general para derivación es fundamental, puesto que se deduce directamente de la definición de derivada, y es muy importante familiarizarse con ella.

Sin embargo, el procedimiento de aplicar la regla en la resolución de problemas es largo o difícil; por consiguiente, se han deducido de la regla general, a fin de facilitar la tarea, reglas especiales o fórmulas para derivar ciertas formas normales que se presentan con frecuencia.

(Es importante no solo aprender de memoria cada formula sino también poder enunciar en palabras la regla correspondiente).



FORMULAS DE DERIVACIÓN

De acuerdo a las clasificaciones de funciones, se han agrupado estas formulas en: Algebraicas y Trascendentes (trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.). Una vez que las hayas revisado y analizado, elabora un formulario para que lo tengas a la mano y lo uses cuando estés resolviendo los ejemplos propuestos por el asesor.

Derivadas Algebraicas:

I. $\frac{dc}{dx} = 0$ .....la derivada de una constante es *cero*

II. $\frac{dx}{dx} = 1$ .... la derivada de “x” respecto de sí misma es igual a *1*

III. $\frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$ ...... la derivada de una suma de funciones es igual a la suma de las derivadas de cada función

IV. $\frac{d}{dx}(cv) = c\frac{dv}{dx}$ .... la derivada de una constante por la función es igual a la constante multiplicada por la derivada de la función.

V. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

VI. $\frac{d}{dx}(v^n) = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$

VII. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

VIII. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

Derivadas trascendentes: logarítmicas y exponenciales

IX. $\frac{d}{dx}\left(e^u\right) = e^u\frac{dv}{dx}$

X. $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}.\frac{du}{dx} = \frac{\frac{dv}{dx}}{u}$

XI. $\frac{d}{dx}\left(a^u\right) = a^v.\ln a.\frac{dv}{dx}$

XII. $\frac{d}{dx}(\log v) = \frac{\log e}{v}.\frac{dv}{dx}$

Derivadas trigonométricas (directas e inversas):

XIII. $\frac{d}{dx}(senu) = \cos u.\frac{dv}{dx}$

XIV. $\frac{d}{dx}(\cos u) = -senu.\frac{dv}{dx}$

XV. $\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u.\frac{dv}{dx}$

XVI $\frac{d}{dx}(ctg\ u) = -csc^2 u \frac{du}{dx}$

XVII $\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u\ .\ tg\ u\ \frac{du}{dx}$

XVIII $\quad \frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \cdot \operatorname{ctg} u \, \frac{du}{dx}$

A continuación se presenta una serie de ejercicios resueltos de derivadas, indicando las formulas que se emplean y el procedimiento usado. Recuerda tener a la mano tu formulario e identificar la formula aplicada:

EJERCICIOS RESUELTOS.

Hallar la derivada de las siguientes funciones:

1. $y = x^4$

Utilizando $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ Obtenemos que:

$$\frac{d}{dx}(x^4) = 4(x^{4-1}) = \mathbf{4x^3}$$

2. $y = x^3$

Utilizando $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ Obtenemos que:

$$\frac{d}{dx}(x^3) = 3(x^{3-1}) = \mathbf{3x^2}$$

3. $y = 3x^6$

Utilizando $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ Obtenemos que:

$$\frac{d}{dx}(x^6) = 6(3)(x^{6-1}) = \mathbf{18x^5}$$

Cuando se tienen ejemplos de funciones en las que se tienen exponentes negativos, se aplica de manera semejante los procedimientos descritos como se observa a continuación:

4. $y = x^{-3}$

Utilizando $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ Obtenemos que:

$\frac{d}{dx}(-3x^{-3-1}) = -3 (x^{-4}) =$ $\mathbf{-3x^{-4}}$

5. $y = 4x^{-2}$

Utilizando $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ Obtenemos que:

$\frac{d}{dx}((-2)(4)\, x^{-2-1}) = -8 (x^{-3}) =$ $\mathbf{-8x^{-3}}$

Es importante mencionar que en el caso de resultados que se obtengan con exponentes negativos, hay que transformarlos a exponentes positivos, por ello primero debes tener en cuenta el conocimiento de este tema y se te sugiere practiques con los ejercicios propuestos en la **presentación electrónica de conceptos básicos**

Cuando se tienen casos en existen términos radicales, entonces primero se transforman los radicales a exponentes fraccionarios y se procede posteriormente a determinar la derivada como se ve en los siguientes ejemplos.

Calcula la derivada de la función:

$y = \sqrt[6]{x}$

Primero convertimos la expresión radical a $y = x^{1/6}$

luego Utilizando $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ Obtenemos que:

$$\frac{d}{dx}(x^{1/6}) = 1/6x^{1/6-1} = 1/6X^{-5/6} = \frac{1}{6X^{5/6}}$$

Pasemos a hora a la aplicación de otra formula:

6. y = 2x

Utilizando $\frac{d}{dx}(cx) = c$ Obtenemos que:

$$\frac{d}{dx}(2x) = \mathbf{2}$$

7. y = -1/2 x

Utilizando $\frac{d}{dx}(cx) = c$ Obtenemos que:

$$\frac{d}{dx}(-1/2x) = \mathbf{-1/2}$$

SI SE TIENEN CASOS EN DONDE HAY VARIOS TERMINOS EN LA FUNCION A DERIVAR, ENTONCES LA FORMULA QUE SE APLICA, ES COMO SE MUESTRA A CONTINUACION:

$$\mathbf{y = 6x^2 + 3x - 1}$$

Utilizando $\frac{d}{dx}(u+v-w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$ Obtenemos que:

$$= \frac{d}{dx}(6x^2) + \frac{d}{dx}(3x) - \frac{d}{dx}(\cancel{1}) = 6(2x^{2-1}) + 3(1) - 0 = \mathbf{12x + 3}$$

dx dx dx

PUEDE VERSE QUE EL TERCER TERMINO DE LA EXPRESION, ES UN VALOR QUE NO TIENE VARIABLE, ES DECIR ES UN TERMINO CONOCIDO COMO CONSTANTE, POR ELLO COMO LA FORMULA INDICA, LA DERIVADA DE UNA CONSTANTE ES IGUAL A CERO, POR ELLO SE ELIMNA. LO MISMO SUCEDE EN EL SIGUIENTE CASO DONDE EL CUARTO TERMINO NO TIENE VARIABLE Y POR CONSECUENCIA SU DERIVADA ES CERO.

$\mathbf{y = 6x^3 - 5x^2 + x + 9}$

Utilizando $\frac{d}{dx}(u+v-w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$ Obtenemos que:

$$= \frac{d}{dx}(6x^3) - \frac{d}{dx}(5x^2) + \frac{d}{dx}(x) + \cancel{\frac{d}{dx}(9)}$$

$$=6(3x^{3-1}) - 5(2x^{2-1}) + 1 + 0 = \mathbf{18x^2 - 10x + 1}$$

Ahora procedemos a resolver ejercicios de la formula de la derivada del producto y cociente de 2 funciones, hay que poner especial atención al procedimiento con sus respectivos pasos.

Ejemplo 1

$\mathbf{y = (x^3 - 7)(2x^2 + 3)}$

Utilizando $\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ Obtenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = (x^3 - 7)\frac{d}{dx}(2x^2 + 3) + (2x^2 + 3)\frac{d}{dx}(x^3 - 7)$$

luego procedemos a realizar las operaciones indicadas quedando:

$(x^3 - 7)\ (4x + 0) + (2x^2 + 3)\ (3x^2 - 0)$

$= 4x^4 - 28x + 6x^4 + 9x^2$

$=$ **$10x^4 + 9x^2 - 28x$** que es la derivada

Ejemplo 2

Calcula la derivada de: **$Y = (x^2)(3x^4 - 7x)$**

Utilizando $\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ Obtenemos que:

$\frac{d}{dx}(uv) = (x^2)\ \frac{d}{dx}(3x^4 - 7x) + (3x^4 - 7x)\ \frac{d}{dx}(x^2)$

$= (x^2)\ (12x^3 - 7)\ +\ (3x^4 - 7x)\ (2x)$

$= 12x^5 - 7x^2 + 6x^5 - 14x^2 =$ **$18x^5 - 21x^2$**

Ejemplo 3

$y = (x^3 - 5x + 9)\ (2x + 1)$

Utilizando $\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ Obtenemos que:

$\frac{d(uv)}{dx} = (x^3 - 5x + 9)\ \frac{d}{dx}(2x + 1) + (2x + 1)\ \frac{d}{dx}(x^3 - 5x + 9)$

$= (x^3 - 5x + 9)\ (2 + 0) + (2x + 1)\ (3x^2 - 5 + 0)$

$= 2x^3 - 10x + 18 + 6x^3 + 3x^2 - 10x - 5 =$ **$8x^3 + 3x^2 - 20x + 13$**

Ahora se procede a la aplicación de la formula 8 de la derivada de un cociente de 2 funciones:

$$y = \frac{8 - x + 3x^2}{x - 9x}$$

Utilizando $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$ Obtenemos que:

$$\frac{(x - 9x)\dfrac{d}{dx}(8 - x + 3x^2) - (8 - x + 3x^2)\dfrac{d}{dx}(x - 9x)}{(x - 9x)^2}$$

$$= \frac{(x - 9x)(-1 + 6x) - (8 - x + 3x^2)(1 - 9)}{(x - 9x)^2}$$

$$= \frac{-x + 9x + 6x^2 - 54x^2 - 8 + x - 3x^2 + 72 - 9x + 27x^2}{(x - 9x)^2}$$

$$= \frac{-24x^2 + 64}{(x - 9x)^2} = \frac{-24x^2 + 64}{x^2 - 18x^2 + 81x^2} = \boxed{\frac{64 - 24x^2}{64x^2}}$$

$$y = \frac{1 - x^3}{x^2 + 4}$$

Utilizando $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$ Obtenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + 4) \frac{d}{dv}(1 - x^3) - (1 - x^3) \frac{d}{dv}(x^2 + 4)}{(v^3 + 1)^2}$$

$$= \frac{(x^2 + 4) (0 - 3x^2) - (1 - x^3) (2x + 0)}{(v^3 + 1)^2}$$

$$= \frac{-3x^4 - 12x^2 - 2x + 2x^4}{(x^2 + 4)^2}$$

$$= \boxed{\frac{- x^4 + 12x^2 - 2x}{(x^2 + 4)^2}}$$

$$y = \frac{10}{x^2 + 1}$$

Utilizando $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$ Obtenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + 1) \frac{d}{dx}(10) - (10) \frac{d}{dx}(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{(x^2 + 1) (0) - (10) (2x + 0)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{0 - 20x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{- 20 x}{(x^2 + 1)^2}$$

Procedemos ahora a mostrar la aplicación de la formula numero VI:

Ejemplo:

calcula la derivada de la función:

$y = (x^2 + 4x)^3$

Utilizando $\frac{d}{dx}(v^n) = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$ Obtenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = 3(x^2+4x)^{3-1}\frac{d}{dx}(x^2+4x)^2$$

$$= 3(x^2+4x)^2(2x+4) = \mathbf{(6x+12)(x^2+4x)^2}$$

Ejemplo: $y = (8x-7)^{-5}$

Utilizando $\frac{d}{dx}(v^n) = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$ Obtenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = -5(8x-7)^{-5-1}\frac{d}{dx}(8x-7)^{-6}$$

$$= -5(8x-7)^{-6}(8)$$

que al realizar las operaciones y pasamos a exponente positivo queda:

$$= -40(8x-7)^{-6} = = \mathbf{\frac{-40}{(8x-7)^6}}$$

Observa ahora que en el siguiente ejemplo la variable independiente es "t", es decir la derivada se calcula respecto a "t", y se trabaja igual, observa el procedimiento, nota cual es la notación de la derivada:

Ejemplo: calcula la derivada de:

$y = (4t^5 - 3t^3 + 2t)^{-2}$

Utilizando $\frac{d}{dx}(v^n) = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$ Obtenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = -2\ (4t^5 - 3t^3 + 2t)^{-2-1}\ \frac{d}{dt}\ (4t^5 - 3t^3 + 2t)$$

$$= -2\ (4t^5 - 3t^3 + 2t)^{-3}\ (20t^4 - 9t^2 + 2) = (-40t^4 + 18t^2 - 4)(4t^5 - 3t^3 + 2t)^{-3}$$

que de igual manera una vez realizadas las operaciones y pasando el exponente negativo a positivo resulta:

$$\boxed{= \frac{-40t^4 + 18t^2 - 4}{(4t^5 - 3t^3 + 2t)^3}}$$

$$\mathbf{y = (4 - 9x)^{1/3}}$$

Utilizando $\frac{d}{dx}(v^n) = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$ Obtenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(4 - 9x)^{1/3-1}\ \frac{d}{dx}(4-9x) = \frac{1}{3}(4 - 9x)^{-2/3}(-9)$$

$$= \frac{-9}{3}(4 - 9x)^{-2/3} = \frac{-3}{(4 - 9x)^{2/3}}$$

$$\boxed{= \frac{-3}{\sqrt[3]{(4 - 9x)^2}}}$$

EJERCICIOS de derivadas y graficas:

Aunque es importante aprender a resolver derivadas, también se requiere para tener una comprensión eficiente del tema, el poder comprender el significado y la representación geométrica ya que ello será de gran utilidad en los siguientes temas de aplicación de la derivada, por ello en los siguientes casos, se explica el resultado de la derivada de una función y su representación grafica.

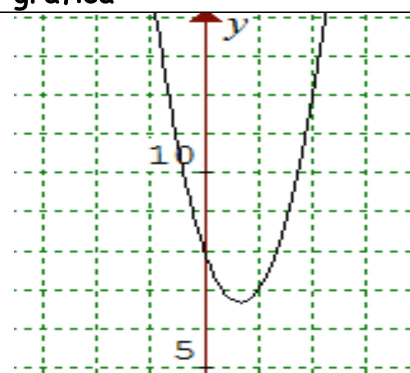
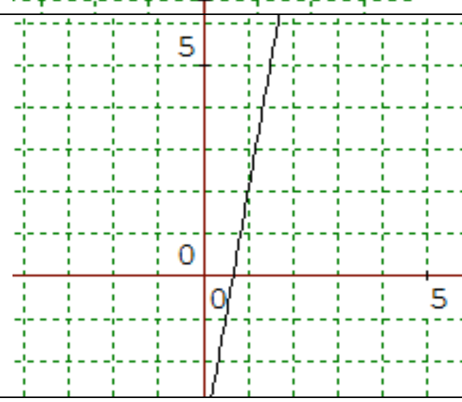
Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones y representa su grafica.

a) $y = 3x^2 - 4x + 8$

su derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = 6x - 4$$

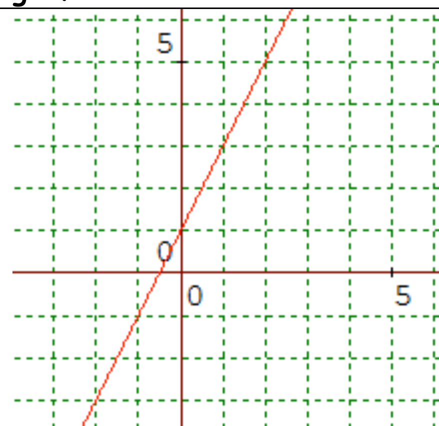
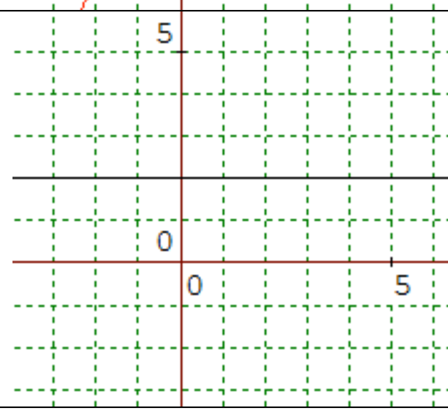
ahora sus graficas respectivas se representan en la siguiente tabla:

Función:	**grafica**
Primitiva: $Y = 3x^2 - 4x + 8$	
Derivada: $\frac{dy}{dx} = 6x - 4$	

b) $y = 2x + 1$

su derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = 6x - 4$$

Función:	**grafica**
Primitiva: $Y = 2x+1$	
Derivada: $\frac{dy}{dx} = 2$	

ahora es momento que practiques de manera integral tus conocimientos de graficacion de funciones, así como lo aprendido de calculo de derivadas en los siguientes ejemplos.

<u>Derivadas logarítmicas y exponenciales.</u>

Ejercicios resueltos.

Observación: habrá que tener especial atención en los ejemplos 2,4, 6 y 7 donde se han empleado las propiedades de los logaritmos.

HAY QUE RECORDAR QUE LA FORMA DE EXPRESAR UN LOGARITMO ES EN EL CASO DE:

- Logaritmo natural: Ln, por ejemplo: algunas funciones como:
  y= Ln 3x,
  y= Ln x
  y= Ln (2x-1)

  Para el caso de logaritmos de base 10 u otra se entenderá que se usa un subíndice, sin embargo de no escribir el subíndice, se dará por hecho que se trata de un logaritmo de base 10 como por ejemplo:

  y= Log (x+2
  y= Log (1/2x)

  Una vez explicado y aclarado estos conceptos procedemos a resolver algunos ejemplos de la aplicación de formulas para la derivada de funciones logarítmicas y exponenciales, hay que tener en cuenta lo que se había dicho anteriormente de tener el formulario de derivadas a la mano para que se facilite la observación de la formula.

ejemplo:

Hallarla derivada de las siguientes funciones:

1. $y = Ln\ (3x + 4)$

Utilizando $\frac{d}{dx}(\ln v) = \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$ Obtenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(3x+4)}\frac{d}{dx}(3x+4) = \frac{1}{(3x+4)}(3) = \boxed{\frac{3}{3x+4}}$$

2. $y = Ln\ x^3$ que escribimos como: $y = 3 \ln x$

Utilizando $\frac{d}{dx}(\ln v) = \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$ y la derivada del producto, Obtenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = 3\frac{d\,(\operatorname{Ln} x)}{dx} = (3)\,\frac{1}{x}\,\frac{d(x)}{dx} = \;= \frac{3}{x}\,(1) = \frac{3}{x}$$

3. $y = \operatorname{Ln}(2x^3 - 3x^2 + 4)$

Utilizando $\frac{d\,(\ln v)}{dx} = \frac{1}{v}\,\frac{dv}{dx}$ Obtenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(2x^3 - 3x^2 + 4)}\;\frac{d\,(2x^3 - 3x^2 + 4)}{dx}$$

$$= \frac{1}{(2x^3 - 3x^2 + 4)}\,(6x^2 - 6x + 0) = \boxed{\frac{6x^2 - 6x}{(2x^3 - 3x^2 + 4)}}$$

4. $y = \log \frac{2}{x}$ que escribimos como $y = \log 2 - \log x$

Utilizando $\frac{d\,(\log v)}{dx} = \frac{\log e}{v}\,\frac{dv}{dx}$ Obtenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,(\log\;2)}{d\,x} - \frac{d(\log(x))}{dx} = \frac{\log e}{2}\,\frac{d(2)}{dx} - \frac{\log e}{x}\,\frac{d(x)}{dx} = 0 - \frac{\log e\;\;(1)}{x} = \boxed{-\frac{\log e}{x}}$$

5. $y = \log(4x - 3)$

Utilizando $\frac{d\,(\log v)}{dx} = \frac{\log e}{v}\,\frac{dv}{dx}$ Obtenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{4x - 3}\;\frac{d\,(4x - 3)}{dx} = \frac{4\log e}{4x - 3}$$

$$= \boxed{\frac{4 \log e}{4x - 3}}$$

6. $y = \text{Ln}\ (25 - 4x)^{1/2} = \frac{1}{2}\ \text{Ln}\ (25-4x)$

Utilizando $\frac{d}{dx}(\ln v) = \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$ y la derivada de un producto , Obtenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d(\ln(25-4x))}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{25-4x}\right)\frac{d(25-4x)}{dx} = \left(\frac{1}{2(25-4x)}\right)(-4) = \frac{-4}{2\,(25-4x)}$$

$$= \boxed{\frac{-2}{25-4x}}$$

7. $\log\ (3x - x^2)^{1/2} = \frac{1}{2} \log(3x - x^2)$

Utilizando $\frac{d}{dx}(\log v) = \frac{\log e}{v}\frac{dv}{dx}$ y la derivada de un producto, Obtenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d(\log(3x-x^2))}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\log e}{3x-x^2}\right)\frac{d(3x-x^2)}{dx} = \frac{\log e\,(3-2x)}{2(3x-x^2)}$$

$$= \boxed{\frac{(3-2x)\log e}{6x-2x^2}}$$

Funciones exponenciales:

8. $y = e^{3x}$

Utilizando $\frac{d}{dx}(e^v) = e^v\frac{dv}{dx}$ Obtenemos que: $\frac{dy}{dx} = e^{3x}\frac{d}{dx}(3x) = e^{3x}(3) = \boxed{3e^{3x}}$

9. $y = \dfrac{2}{e^x}$

Utilizando $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$ Obtenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x \dfrac{d}{dx}(2) - 2\dfrac{d}{dx}(e^x)}{(e^x)^2} = \frac{e^x(0) - 2(e^x(1))}{} = \frac{-2e^x}{e^{2x}} = \boxed{\frac{-2}{e^x}}$$

10. $y = e^{5x}$

Utilizando $\dfrac{d}{dx}(e^v) = e^v \dfrac{dv}{dx}$ Obtenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = e^{5x}\frac{d}{dx}(5x) = e^{5x}(5) = \boxed{5e^{5x}}$$

11. $y = x^2 e^{-x}$ **en este caso se aplica la derivada de un producto (u* v)**

Utilizando $d\dfrac{(uv)}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$ Obtenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = x^2\frac{d}{dx}(e^{-x}) + e^{-x}\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= x^2\left(e^{-x}\frac{d}{}(-x)\right) + e^{-x}(2x) = x^2(-e^{-x}) + e^{-x}(2x)$$

dx

$$= -x^2 e^{-x} + 2x\, e^{-x} = \boxed{e^{-x} \left(- x^2 + 2x \right)}$$

Derivadas Trigonométricas

Ejercicios resueltos.

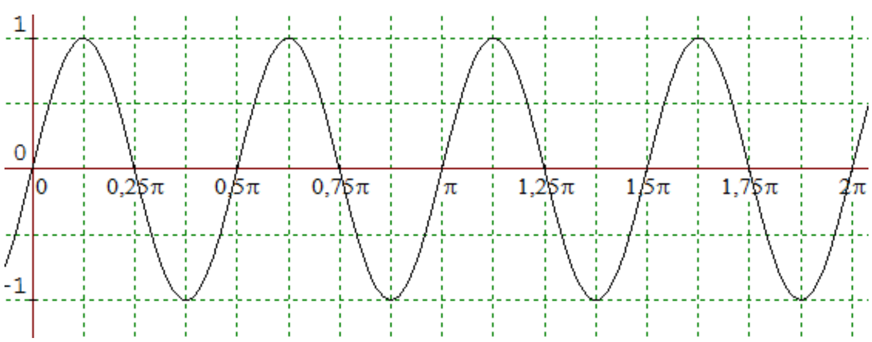
Hallar la derivada de las siguientes funciones:

1. $y = \text{Sen } 4x$

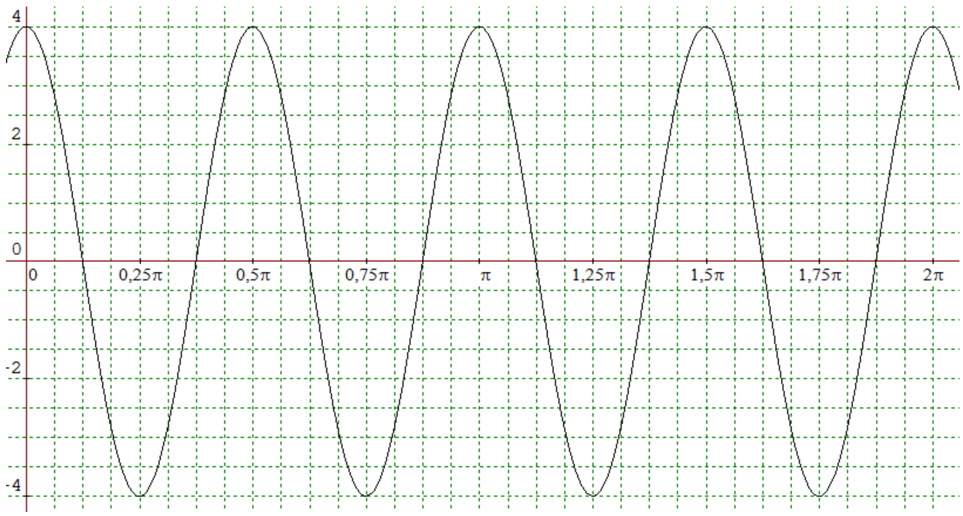
Utilizando $\dfrac{d}{dx}(\text{sen } u) = \cos u \dfrac{du}{dx}$ Obtenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = \cos 4x \frac{d}{dx}(4x) = \cos 4x\,(4) = \boxed{4 \cos 4x}$$

la grafica de la función se muestra a continuación.



La grafica de la derivada es la siguiente:



2. S = tang 2t

Utilizando $\frac{d}{dx}(\text{tang } u) = \sec^2 u \, \frac{du}{dx}$ Obtenemos que:

$$\frac{dS}{dt} = \sec^2 2t \, \frac{d}{dt}(2t) = \sec^2 2t \, (2) = \boxed{2 \sec^2 2t}$$

3. y = sec 3x

Utilizando $\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \, . \, \text{tg } u \, \frac{du}{dx}$ Obtenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = (\sec 3x)(\text{tg } 3x) \, \frac{d}{dx}(3x) = \sec 3x \;\; \text{tg } 3x \;\; (3)$$

$$= \boxed{3 \sec 3x \;\; \text{tg } 3x}$$

4. y = 3 cos 2x aplicar la derivada de un producto : (u* v)

Utilizando $\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ Obtenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = 3\frac{d(\cos 2x)}{dx} + \cos 2x \frac{d(3)}{dx} = 3(-\operatorname{sen} 2x)\frac{d(2x)}{dx} + \cos 2x\,(0)$$

$$= -3 \operatorname{sen} 2x\,(2) = \boxed{-6 \operatorname{sen} 2x}$$

DERIVADAS SUCESIVAS DE UNA FUNCIÓN.

Derivadas de orden superior:

Una función f(x) , tiene una derivada f´(x) conocida como primera derivada, la cual como ya se ha mencionado se escribe como: $\frac{dy}{dx}$ siendo a su vez esta nueva expresión una nueva función a la cual también se le puede calcular su derivada, llamándose entonces segunda derivada, y escribiéndose como f´´(x), o también $\frac{dy^2}{dx^2}$

EN LA SIGUIENTE TABLA SE MUESTRAN funciones donde se presenta la primera derivada y su segunda derivada:

Función primitiva	**Primera derivada**	**Segunda derivada**
$Y= x^3$	$\frac{dy}{dx} = 3x^2$	$\frac{d\,y^2}{dx^2} = 6x$
$Y= x^2$	$\frac{dy}{dx} = 2x$	$\frac{d\,y^2}{dx^2} = 2$
$Y=2\,x^{-3}$	$\frac{dy}{dx} = -6x^{-4}$	$\frac{d\,y^2}{dx^2} = 24x^{-5}$
$Y= 3x^2 - 4x + 5$		$\frac{d\,y^2}{dx^2} = 6$

	$\frac{dy}{dx} = 6x - 4$	
Y= $4x^2$	$\frac{dy}{dx} = 8x$	$\frac{d\,y^2}{dx^2} = 8$
Y= e^{2x}	$\frac{dy}{dx} = 2e^{2x}$	$\frac{d\,y^2}{dx^2} = 4e^{2x}$
Y= e^{-3x}	$\frac{dy}{dx} = -3e^{-3x}$	$\frac{d\,y^2}{dx^2} = 9e^{-3x}$

Entonces se puede definir que dada una función f(x), se obtiene a partir de un primer proceso una nueva función que es la derivada, denotándose como f'(x).

A su vez se denomina segunda derivada f''(x) de la función f(x) a aquella que resulta de derivar por segunda vez ésta primera.

A continuación se muestran algunos ejemplos donde se observan los procedimientos aplicados.

Ejemplo 1.  **Obtener la derivada de la función**

$y = 5x^2 + 3x + 1$

la primera derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = 10x + 3$$

Ahora la segunda derivada es:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(10x + 3) = 10$$

Por lo que la función con sus respectivas derivadas sucesivas son:

Función: $y = 5x^2 + 3x + 1$

Primera derivada : $\frac{dy}{dx} = 10x + 3$

Segunda derivada: $\frac{d^2y}{dx^2} = 10$

Resumiendo entonces una función tiene una ó más derivadas que se denominan derivadas sucesivas o de orden superior.

Estas derivadas se conocen como primera, segunda, tercera derivada,..... etc y su notación es:

Primera derivada: $y'(x)$ o bien $\frac{dy}{dx}$

Segunda derivada: $y''(x)$ o bien $\frac{d^2y}{dx^2}$

tercera derivada: $y'''(x)$ o bien $\frac{d^3y}{dx^3}$

EJERCICIOS RESUELTOS:

Hallar las segundas derivadas de las siguientes funciones.

A) $Y = x^3 + 2x + 4$

La primera derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 + 2x + 1) = 3x^2 + 2$$

Y la segunda derivada es:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = d(3x^2 + 2) = 6x + 0 = \mathbf{6x}$$

B) $Y = Ln\ (5x^2 + 1)$

La primera derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \ln\ (5x^2 + 1) = \frac{1}{5x^2 + 1}\, d\left((5x^2 + 1)\right) = \frac{1}{5x^2 + 1}\left(10x\right) = \frac{10x}{5x^2 + 1}$$

Y la segunda derivada es:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{10x}{5x^2 + 1}\right) = \frac{(5x^2 + 1)\frac{d}{dx}(10x) - 10x\frac{d}{dx}(5x^2+1)}{(5x^2 + 1)^2} = \frac{(5x^2+1)(10) - 10X(10X)}{(5x^2+1)^2}$$

$$= \frac{50x^2 + 10 - 100x^2}{(5x^2+1)^2} = \boldsymbol{\frac{-50X^2 + 10}{(5x^2+1)^2}}$$

c) $y = sen\ 3x$

primera derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \cos 3x \frac{d}{dx}(3X) = \cos 3x\,(3) = 3\cos 3x$$

segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(3\cos 3x) = 3\frac{d}{dx}(\cos 3x) + \cos 3x \frac{d}{dx}(3) = 3\,(-sen\ 3x)(3) + \cos 3x\ (0)$$

$= -9\ sen\ 3x$

Referencias.

Ayres F. (2010.) Calculo diferencial e integral. Editorial Mc Graw Hill. México D. F.

Lectura

Colaborador: Ing. Juan Adolfo Alvarez Martínez
Nombre de la Asignatura: Cálculo Diferencial e integral
Programa educativo: Bachillerato Virtual