UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DEL ESTADO DE HIDALGO

# Aplicaciones de las derivadas

Elaborado por: Ing. Juan Adolfo Álvarez Martínez.

Noviembre, 2014

http://www.uaeh.edu.mx/virtual

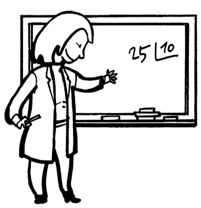
# APLICACIONES DE LAS DERIVADAS.

Existe una gran cantidad de problemas en diversas áreas que se resuelven a partir del concepto de derivada, sin embargo nos enfocaremos en concreto a los siguientes:

1.- cálculo de velocidades y aceleraciones (Física)

2.- cálculo de máximos y mínimos

A continuación observaremos la manera como se aplican los conceptos vistos de la derivada en la solución de problemas.



EJEMPLO.

CALCULO DE VELOCIDAD Y ACELERACIÓN DE UNA PARTÍCULA.

Se sabe que el cambio de posición con respecto al tiempo representa una magnitud denominada velocidad, que de acuerdo con los conceptos ya vistos de cálculo escribimos como:

$v = \frac{ds}{dt}$ , es decir : la velocidad representa la derivada (cambio) de la posición (s) con respecto al tiempo (t).

De manera similar, se denomina "Aceleración" a la variación de la velocidad (v) con respecto al tiempo, por lo que para calcular dicha magnitud se debe derivar la función velocidad. Esto es:

$a = \frac{dv}{dt}$ esto significa que la aceleración es la segunda derivada de la posición con respecto al tiempo, o bien es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo: $a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$

Ejemplo:

En un experimento, La posición de una partícula a gran velocidad que se desplaza por una recta horizontal se puede determinar por medio de la ecuación $\mathbf{s = t^4 - 6t^3 + 12t^2 - 10t + 3}$ .

Determine:
a).- la posición,
b).- velocidad y
c).- aceleración de dicha partícula

Cuando han transcurrido t = 4 segundos.

SOLUCIÓN:
a). La función que determina la posición de la partícula en cualquier instante "t" es: $s = t^4 - 6t^3 + 12t^2 - 10t + 3$ (s: metros, t: segundos)

lo que hacemos es sustituir "t=4 seg" en la ecuación para determinar la posición:

$s = t^4 - 6t^3 + 12t^2 - 10t + 3 = 4^4 - 6(4)^3 + 12(4)^2 - 10(4) + 3 =$
$256 - 384 + 192 - 40 + 3 =$ **27 mts**.

b). Proseguimos a calcular la velocidad, para lo que derivamos la función $s = t^4 - 6t^3 + 12t^2 - 10t + 3$ , resultando:

$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(t^4 - 6t^3 + 12t^2 - 10t + 3) = \mathbf{4t^3 - 18t^2 + 24t - 10}$$

Ahora que conocemos la ecuación de velocidad procedemos a calcular cuando **t=4 seg**.

$$\mathbf{V = 4t^3 - 18t^2 + 24t - 10} = 4(4)^3 - 18(4)^2 + 24(4) - 10 = \mathbf{54\ mts/seg}$$

c). finalmente obtenemos la aceleración derivando por segunda ocasión la función de la posición (o lo que es lo mismo derivamos la función velocidad):

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(4t^3 - 18t^2 + 24t - 10) = \mathbf{12t^2 - 36t + 24}$$

ahora sustituimos cuando t=4 seg:

**$a= 12t^2 – 36t + 24$** $= 12(4)^2 – 36(4) + 24=$ **72 mts/seg$^2$**

**Ejercicio resuelto.** un cuerpo se mueve con respecto a la ecuación:
$f(t) = t^3-9t^2+ 24t$ siendo "t" en segundos

Determine
a) la posición y velocidad de dicho cuerpo cuando han transcurrido 5 segundos de tiempo
b) la velocidad en t= 6 segundos.
c) la aceleración cuando "t" = 4 segundos

La solución, primero la expresión permite determinar la posición para cualquier valor de "t" por lo que para t= 5 segundos tenemos:

$X(t) = t^3-9t^2+ 24t = (5)^3 – 9(5)^2 + 24(5) =$ 20 metros

Luego para determinar la velocidad, sabemos que la derivada de la posición representa la velocidad, por lo que para "t" = 6 se tiene: primero la derivada es:

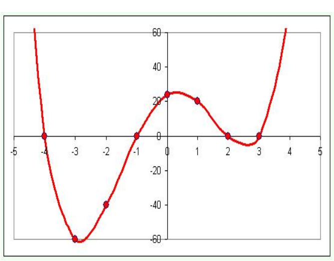
En este caso la primera derivada es:

$\frac{Df(t)}{dt} = 3t^2 -18 t +24$ y por lo tanto la velocidad para "t" = 6

$\frac{df(t)}{dt} = V = 3(6)^2 -18(6) +24 =$ 24 m/ seg

Ahora la aceleración es el cambio de la velocidad respecto al tiempo por lo que entonces se debe obtener la segunda derivada, es decir:

$\frac{d f^2( t)}{dt^2} = a= 6t – 18 = 6(4) -18 =$ 6 m/ seg$^2$



**Procedimiento para hallar máximos y mínimos locales.**

**a)** Se calcula la derivada primera $f'(x)$

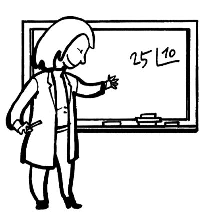
**b)** Se resuelve la ecuación obtenida de la primera derivada; $f'(x)=0$

**c)** Hallamos la derivada segunda $f''(x)$

**e)** Sustituimos en $f''(x)$ los valores de las soluciones de x, posibles máximos o mínimos y vemos si:

- Si la segunda derivada: $f''(x)$ es un numero positivo se trata de un mínimo.
- Si la segunda derivada: $f''(x)$ es un numero negativo se trata de un máximo.

Sustituimos en la función original (primitiva) los valores obtenidos en el inciso b) para hallar las coordenadas para cada valor de “x” de su respectivo valor de “y”



Ejemplo: determinar los máximos y mínimos de : $\mathbf{y = x^3 - 4x^2 + 5x - 1}$

- La Primera derivada es:

  $$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 8x + 5$$

- Ahora Resolvemos la derivada obtenida: como es una ecuación de segundo grado se aplica la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b2 - 4ac}}{2a}$$

en este caso el coeficiente “a” = 3, “b”= - 8 y “c” = 5

Y las soluciones son: $x_1$ **= 1** **y** $x_2$ **= 1.6**

- Ahora se obtiene la segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 8$$

- ahora sustituimos las soluciones en la segunda derivada:

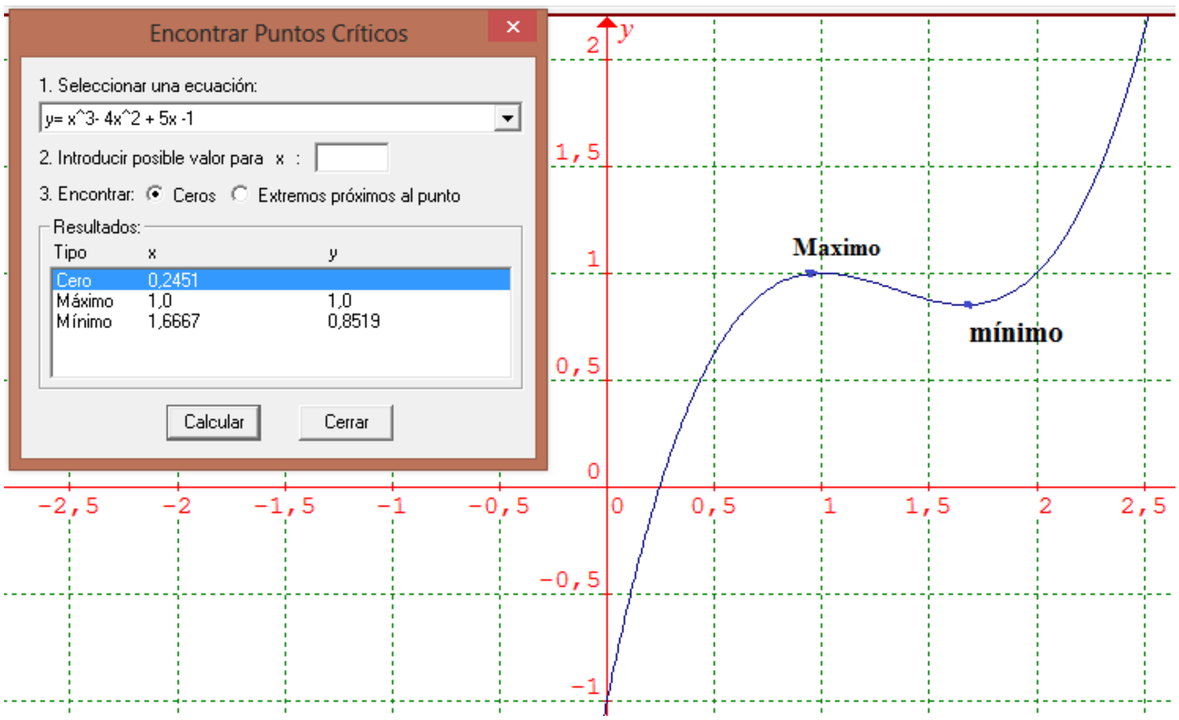
si x= 1 entonces :

$\frac{d^2y}{d\,x^2} = 6x - 8 \quad = 6( 1) – 8 = -2$ y su resultado es negativo por lo tanto en x= 1 la función tiene un máximo

ahora para la segunda solución: si x= 1.6 entonces :

$\frac{d^2y}{d\,x^2} = 6x - 8 \quad = 6\ 1.6) – 8 = 1.6$ y su resultado es positivo por lo tanto en x= 1 la función tiene un mínimo

A continuación se verifican los resultados gráficamente.

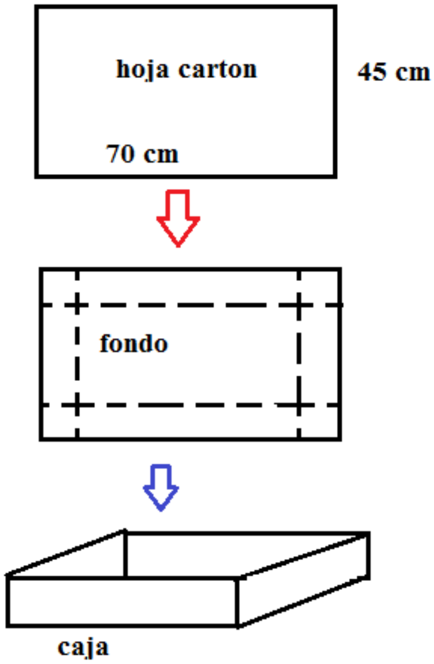



## Caso resuelto.

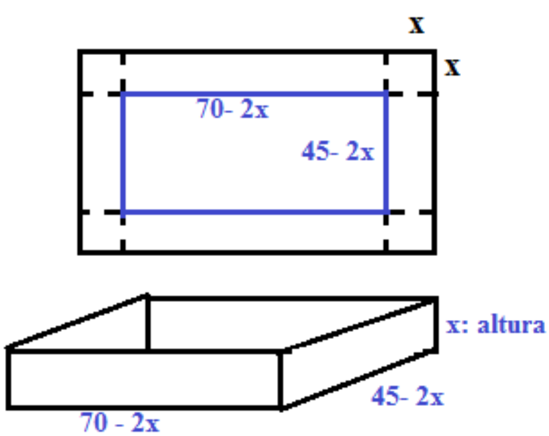
Una compañía que fabrica cajas de cartón para envasar detergente, utiliza hojas de tamaño 70 cms de largo por 45 cms de ancho, calcule las dimensiones de la caja sin tapa que puede fabricarse para que se optimice toda la superficie de la hoja de cartón y se obtenga el mayor volumen.

**Solución.**

Primero hacemos un pequeño dibujo considerando que se deben hacer en cada lado de la hoja dobleces para armar la caja, quedando entonces una representación como la mostrada.




y el doblez de la hoja le denominaremos “x” de forma que el largo de la caja será: 70 – 2x  y el ancho de la caja será de:  45 – 2x la altura será de “x”




De esta manera puede observarse que el volumen de la caja será una función de la altura, es decir depende del doblez de la hoja que representa la altura en la caja.  Ahora bien el volumen de dicha caja será:

V = largo X ancho X altura  = (70 – 2x)(  45 – 2x)( x) , y al realizar las operaciones resulta:

V= $\mathbf{4x^3 - 230\ x^2 + 3150\ x}$ que es la función a trabajar para determinar sus valores máximos y mínimos.

Luego aplicamos el procedimiento:

- la primera derivada es:

  $\frac{dV}{dx} = 12\ x^2 - 460\ x + 3150$

- para la solución de esta derivada, se aplica la fórmula:

  $$\mathbf{x = \frac{-b \pm \sqrt{b2 - 4ac}}{2a}}$$

  en este caso el coeficiente "a" = 12, "b"= - 460 y "c" =3150 de donde las soluciones son:

Y las soluciones son: $x_1$ **= 8.9 y** $\mathbf{x_2}$ **= 24.9**

- Ahora se obtiene la segunda derivada:

$\frac{d^2y}{dx^2} = 24x - 460$

- ahora sustituimos las soluciones en la segunda derivada:

  si x= 8.9 entonces :

  $\frac{d^2y}{d\,x^2} = 24x - 460 \quad = 24(\,8.9) – 8 = -246$

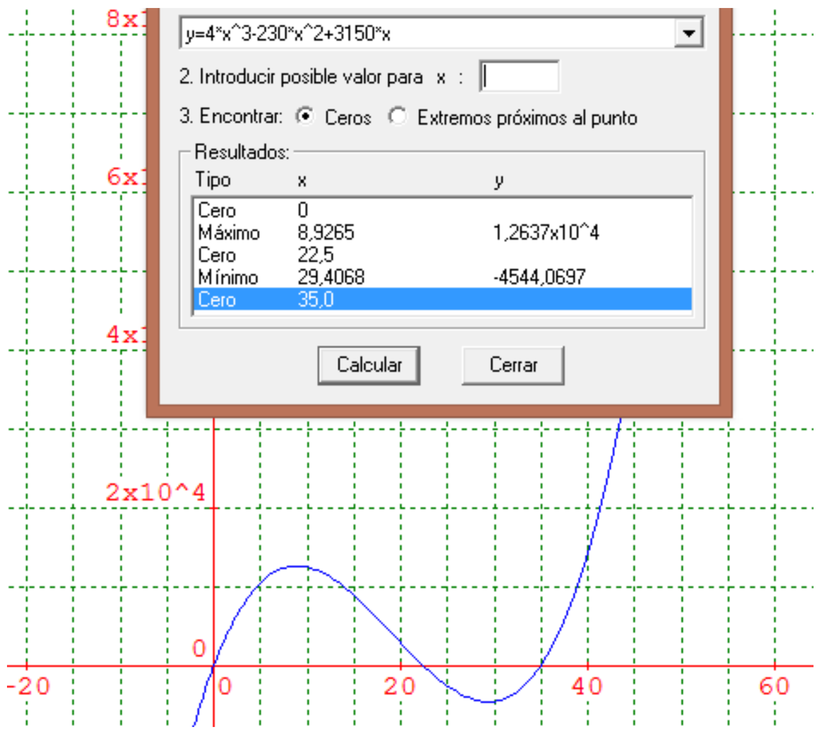
  y su resultado es negativo por lo tanto en **x= 8.9 la función tiene un máximo**

  Ahora para la segunda solución: si x= 1.6 entonces:

$\frac{d^2y}{d\,x^2} = 24x - 460 \quad = 24(24.9) - 460 = 137.6$ y su resultado es positivo

por lo tanto en **x = 24.9 la función tiene un mínimo**

A continuación se verifican los resultados gráficamente.




La conclusión de este problema es que usando una altura de la hoja de 8.9 cm es decir casi 9 cms, el volumen de la caja será el máximo, en este caso de:

12 600 cm cúbicos.

Luego para las dimensiones de largo de la caja y ancho solo se sustituye ya sabiendo el valor de "x" que es la altura en cada medida:

largo : (70 – 2x)= 70- 2(8.9) = 52.2 cm

ancho (45 – 2x)= 45- 2(8.9) = 27.2 cm

altura = x = 8.9 cms

# Referencias.

Ayres F. (2010.) Calculo diferencial e integral. Editorial Mc Graw Hill. México D. F.

# Lectura

Colaborador: Ing. Juan Adolfo Alvarez Martínez
Nombre de la Asignatura: Cálculo Diferencial e integral
Programa educativo: Bachillerato Virtual