UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
ESCUELA SUPERIOR DE CIUDAD SAHAGÚN

LÍMITES

Área Académica: Cálculo Diferencial e Integral

Profesor(a): Dra. C. Esmeralda Ivonne Espinoza Martínez

Periodo: Julio-diciembre de 2018

LÍMITES

Resumen:

El Cálculo está básicamente fundamentado en los límites, es por eso que el tema es trascendental para su estudio. De hecho los dos conceptos principales del Cálculo, la Derivada y la Integral Definida, están basados en límites. Ciertas funciones de variable real presentan un comportamiento un tanto singular en la cercanía de un punto, precisar sus características es la principal intención y el estudio de los límites va a permitir esto.

Palabras clave: límite, tendencia y continuidad

LIMITS.

Summary:

The calculation is basically based on the limits, that is why the subject is transcendental for its study. In fact, the two main concepts of the Calculus, the Derivative and the Definite Integral, are based on limits. Certain functions of real variable present a behavior somewhat singular in the proximity of a point, to specify its characteristics is the main intention and the study of the limits is going to allow this.

Keywords: limit, trend and continuity

Objetivo

- Se analizarán ejemplos sencillos; en los que sea posible, por simple inspección, concluir y tener una idea del concepto de límite.

Simple examples will be analyzed; in which it is possible, by simple inspection, to conclude and have an idea of the concept of limit.

Competencias genéricas a desarrollar en el estudiante

Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.

LÍMITE (concepto).

g(x)= $\frac{x^2-4}{x-2}$

¿Qué es lo primero que se observa con respecto a esta función?

Que la función no está definida en *x = 2*

¿Qué significa esto? Además de que no se puede sustituir a *x* por 2, existe, a nivel gráfico, un segmento de recta vertical que sugiere una asíntota en x= 2, por lo que este valor no pertenece al dominio de la función, y *¿Qué significa esto?* Que cuando “x” se acerca a 2, g(x) se acerca más y más a 4. Por lo anterior, se expresa que “el límite de g(x) cuando x se acerca a 2 es 4” y se escribe

$$\lim_{x \to 2} g(x) = 4 \qquad \text{ó} \qquad \lim_{x \to 2} g(x) \frac{x^2-4}{x-2}$$

LÍMITE (concepto).

El comportamiento de g(x) depende de si x > 2 o si x < 2. Cuando “x” se acerca más y más a 2 por la izquierda, crece sin límite alguno, es decir, el límite de g(x) cuando “x” se acerca a 2 por la izquierda no existe, esto se escribe de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) \quad no\ existe,$$

De modo similar, cuando “x” se acerca más y más a 2 por la derecha, decrece sin límite alguno, es decir, el límite de g(x) cuando “x” se acerca a 2 por la derecha no existe, esto se escribe de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to 2^+} g(x) \quad no\ existe$$

Un límite en el que se cancelan dos factores.

- Calcular $\lim_{x \to 3} \frac{3x+9}{x^2-9}$

El dominio de la función incluye todos los valores de "x", excepto ± 3. A nivel gráfico se genera una asíntota en x=-3 y x= 3, ya que la función no está definida ahí. Así que x ≠ ± 3, por lo tanto,

$$\frac{3x+9}{x^2-9} = \frac{3(x+3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{3}{x-3}$$

Esto sugiere que, la función se acerca al mismo valor ($-\frac{1}{2}$) $cuando\ x \to -3, sea\ por\ la\ derecha\ o\ por\ la\ izquierda\ (es\ decir, los\ límites\ laterales\ son\ iguales), se\ escribe$:

$$\lim_{x \to 3} \frac{3x+9}{x^2-9} = -\frac{1}{2}$$

En otras palabras, un límite existe sí y sólo si ambos límites laterales existen y son iguales.

Un límite que no existe.

Determina si existe o no $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$

Se observa que cuando x→ 0^{+}, f(x) está creciendo sin límite alguno. Así que $\lim\limits_{x \to 0^{+}} \frac{1}{x}$ *no existe*. Del mismo modo, se puede decir que $\lim\limits_{x \to 0^{-}} \frac{1}{x}$ *no existe.*

Como el limite no existe por ninguno de los dos lados, se dice que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ *no existe.*

Por lo tanto, si falta cualquiera de los dos límites laterales, o si los límites laterales existen pero son diferentes, el límite no existe.

Un límite en el que se requieren límites laterales.

Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|}$

Se tiene que :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1,$$

puesto que $|x| = x$, cuando $x > 0$ y

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{-x} = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1,$$

puesto que $|x| = -x$, cuando $x < 0$

Se deduce que el $\lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|}$ no existe, debido a que los límites laterales no coinciden

• Límite de la función constante

Para cualquier constante c y cualquier número real a, $\lim_{x \to a} c =$ c, ya que la constante c no depende de x, y por tanto, permanece invariable cuando x→ a.

• Límite de la función f(x) = x

Para cualquier número real a, $\lim_{x \to a} x = \mathrm{a}$, ya que cuando x→ a, x se acerca hacia a.

Aún cuando estas reglas son tan simples, se usan repetidamente para hallar límites más complicados.

Reglas básicas de límites.

Supón que $\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \ y \ \lim_{x\to a} g(x) = L_{2.}$ Entonces:

i) $\lim_{x\to a}[c \cdot f(x)]$= c· $\lim_{x\to a} f(x) = c \cdot L_1$

ii) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)]$= $\lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L_1 \pm L_2$

iii) $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)]$= $\left[\lim_{x\to a} f(x)\right] \cdot \left[\lim_{x\to a} g(x)\right]$ = $L_1 \cdot L_2$

iv) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{xa\to} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \, (si \ L_2 \neq 0)$

BIBLIOGRAFÍA.

- Zill, L. ; Barnett, S. (2010) "Matemáticas III. Cálculo. Primera parte". 1° Ed. , México, Mc. Graw Hill.