Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Cónicas

Dr. Cecilio Tapia Ignacio

Septiembre 2020

PREPA TRES

Resumen:

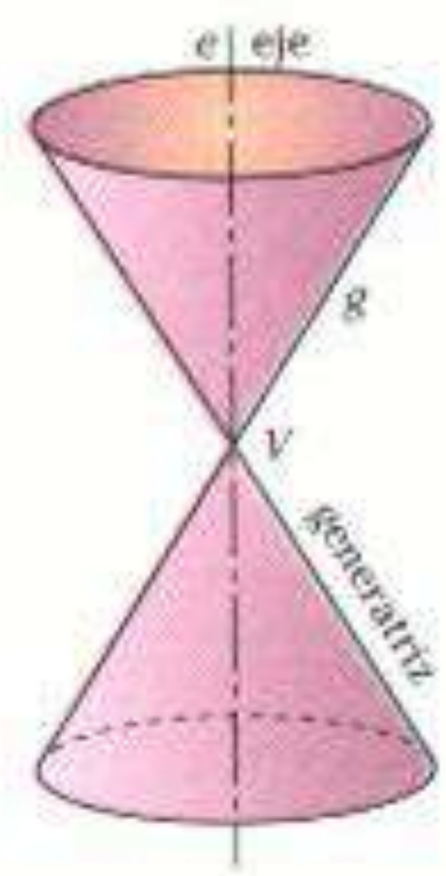
Las curvas cónicas son importantes en astronomía: dos cuerpos masivos que interactúan según la ley de gravitación universal, sus trayectorias describen secciones cónicas si su centro de masa se considera en reposo. Si están relativamente próximas describirán elipses, si se alejan demasiado describirán hipérbolas o parábolas.
Palabras clave: Cónica, ecuación e intersección.

Abstract:

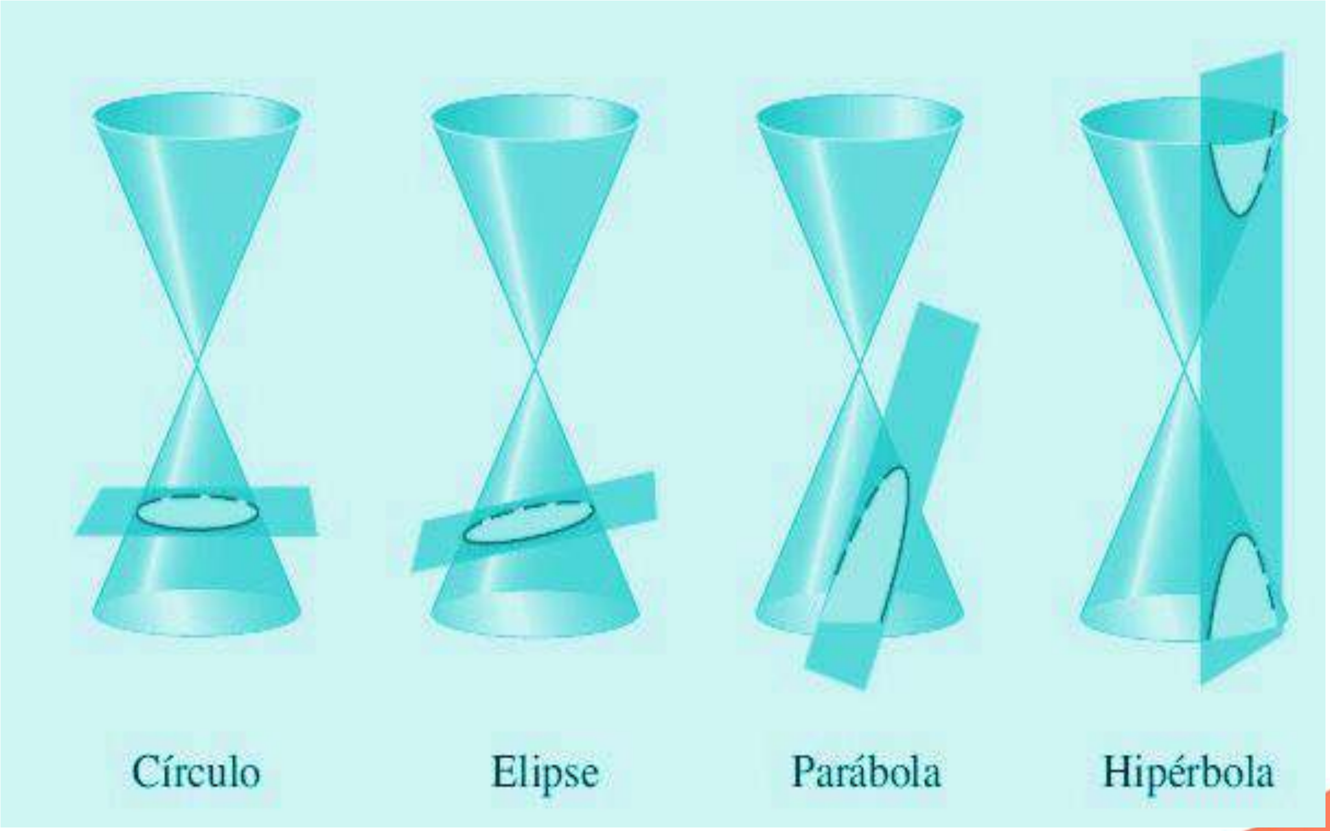
Conic curves are important in astronomy: two massive bodies that interact according to the universal law of gravitation, their trajectories describe conic sections if their center of mass is considered at rest. If they are relatively close they will describe ellipses, if they are too far apart they will describe hyperbolas or parabolas.
Keywords: Conic, equation and intersection

Definición

Se llama cónica (o sección cónica) a las curvas resultantes de la intersección del cono y un plano. Este plano no debe pasar por el vértice (V).



- Existen cuatro tipos de cónicas, según el ángulo del plano que intersecta con el cono y su base.



Circunferencia

- Es la intersección del cono con un plano paralelo a la base.

Elipse

- Intersección del cono con un plano oblicuo a la base y que no la corta en ningún momento.

PREPA TRES

Parábola

- Es la intersección del cono con un plano paralelo a su generatriz y que corta a la base.

Hipérbola

- Es la intersección de un cono recto y un plano cuyo ángulo es menor al de la generatriz del cono.

PREPA TRES

Ecuación de las cónicas

- La ecuación de toda sección cónica se puede escribir de la siguiente forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

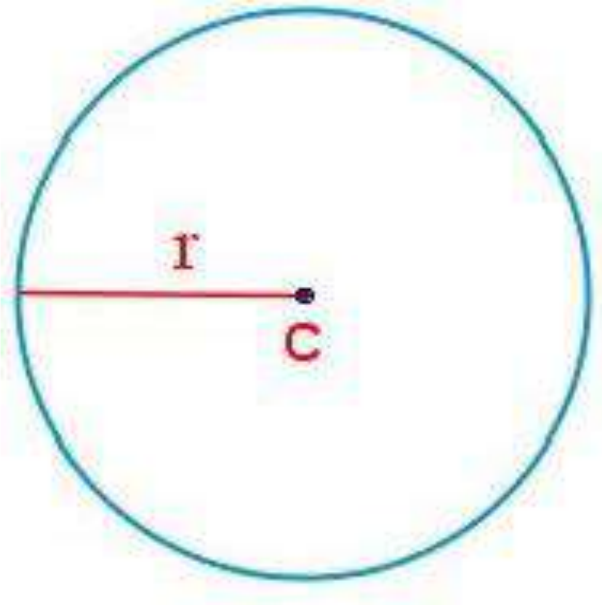
La cual es la ecuación general de segundo grado en términos de x e y. Donde A≠0 ó C≠0.

El caso más simple es cuando B=0 ya que los ejes en el plano bidimensional donde se grafican las cónicas son horizontales o verticales.

PREPA TRES

Circunferencia

Definición: Circunferencia es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo de ese plano.

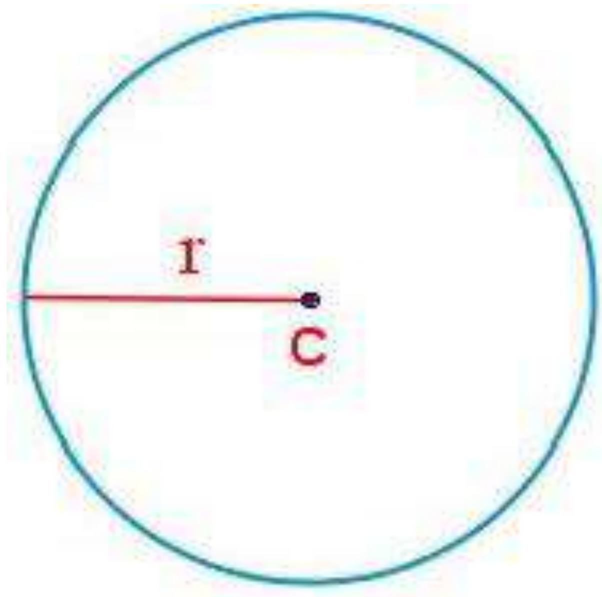


La superficie plana comprendida dentro de una circunferencia es el círculo.

- Cuando A=C la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, representa de manera general una circunferencia.

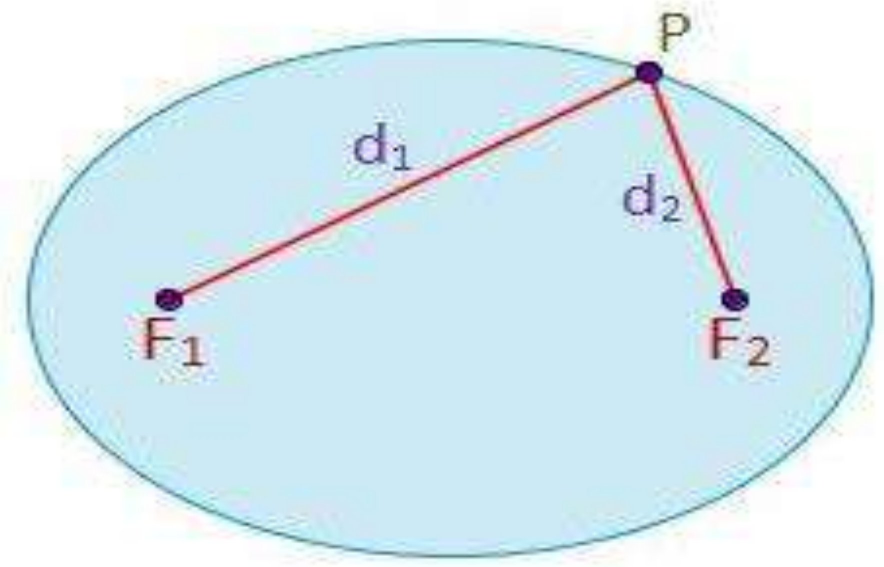
- La circunferencia cuyo centro es el punto (h,k) y cuyo radio es la constante r tiene ecuación:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$



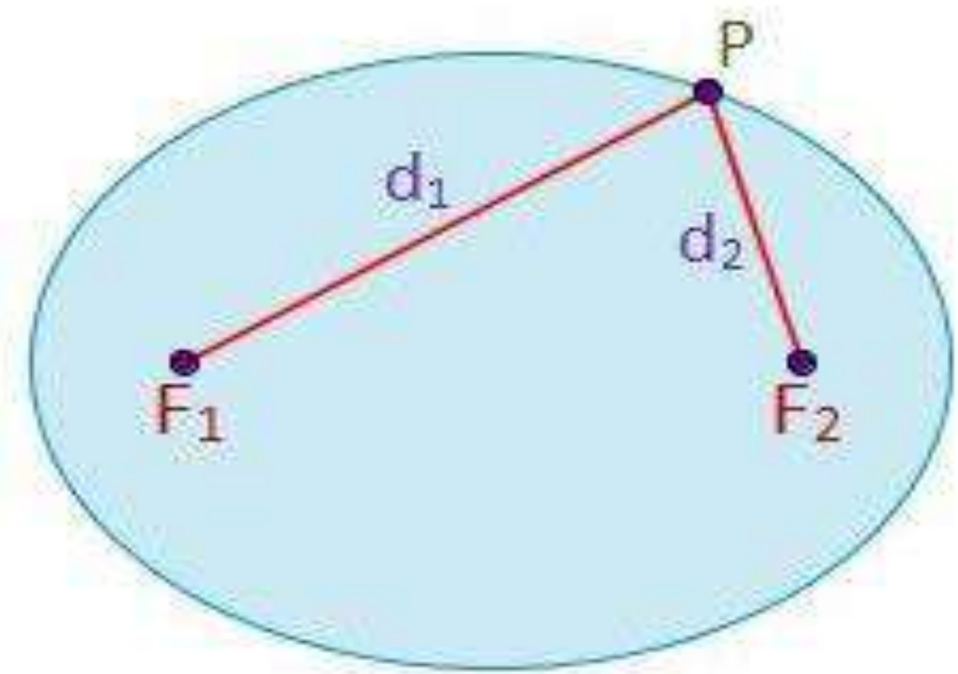
Elipse

Definición: Una elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano siempre es igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos.



Los dos puntos fijos se llaman focos de la elipse.

- Si A y C son del mismo signo, la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, representa una elipse de ejes paralelos a los coordenados, o bien un punto, o no representa ningún lugar geométrico real.



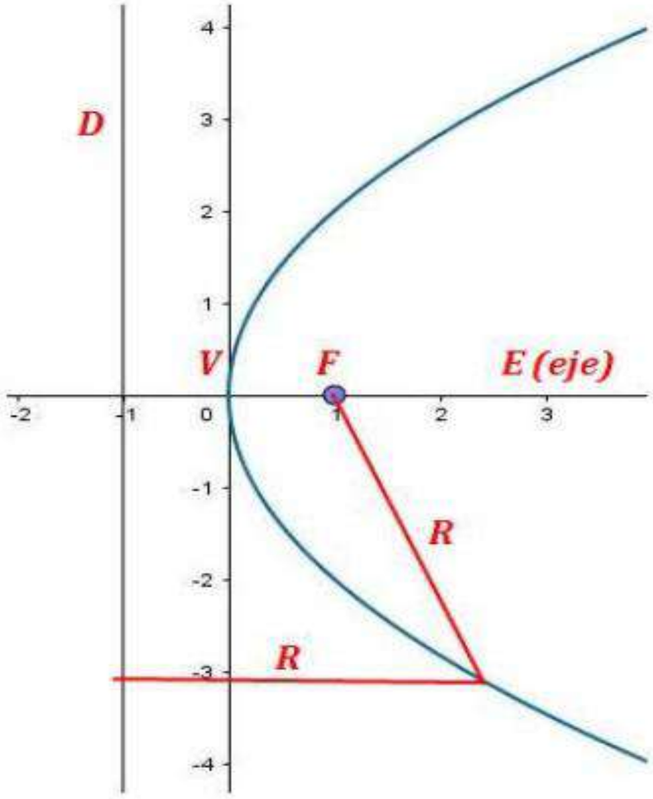
- La ecuación de la elipse de centro en el punto (h,k) y eje focal paralelo al eje X, está dado por la forma ordinaria

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

- Si el eje focal es paralelo al eje Y, su ecuación está dada por la forma ordinara

Parábola

Definición: Una parábola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta.



El punto fijo se llama foco y la recta fija directriz de la parábola.

- Si A=0, C≠0 y D≠0, la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una parábola cuyo eje es paralelo a (o coincide con) el eje X.

- Si A≠0, C=0 y E≠0, la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una parábola cuyo eje es paralelo a (o coincide con) el eje Y.

- La ecuación de una parábola de vértice (h,k) y de eje paralelo al eje X, es de la forma:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

- Siendo p la longitud del segmento del eje comprendido entre el foco y el vértice. Si p>0, la parábola se abre hacia la derecha; si p<0, la parábola se abre hacia la izquierda

PREPA TRES

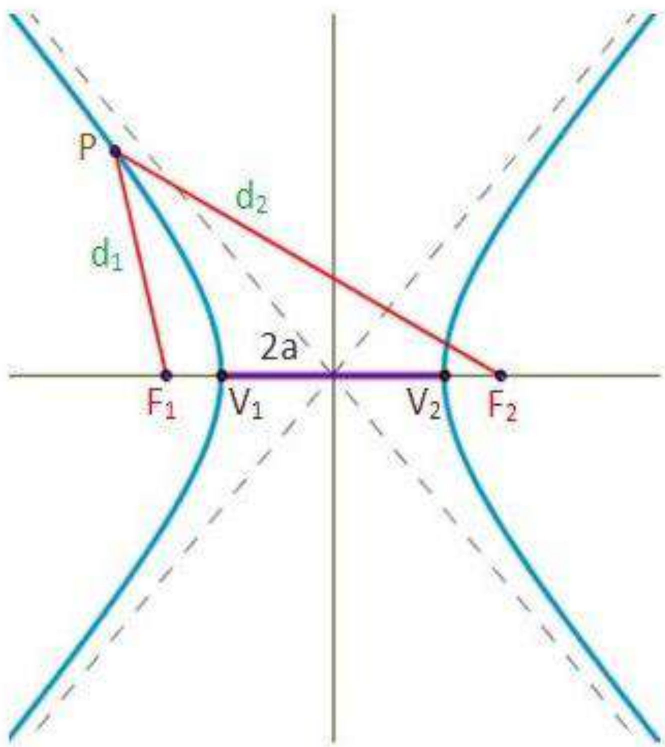
- Si el vértice es el punto (h,k) y el eje de la parábola es paralelo al eje Y, su ecuación es de la forma:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

- Si $p>0$, la parábola abre hacia arriba; si $p<0$, la parábola se abre hacia abajo.

Hipérbola

- Definición: Una hipérbola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es siempre igual a una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre l



La hipérbola consta de dos ramas diferentes, cada una de longitud infinita.

PREPA TRES

- Si los coeficientes A y C difieren de signo, la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, representa una hipérbola de ejes paralelos a los coordenados, o un par de rectas que se cortan.

- La ecuación de una hipérbola de centro el punto (h, k) y eje focal paralelo al eje X, es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

- Si el eje focal es paralelo al eje Y, su ecuación es:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

RESUMEN RELATIVO A LAS CÓNICAS

		Parábola	Elipse	Hipérbola
Definición				
Constantes		p= distancia del vértice al foco = distancia del vértice a la directriz Foco sobre el eje		
Primera ecuación ordinaria **Vértice de la parábola y centros de la elipse e hipérbola en el origen**	Eje focal coincidente con el eje X			
	Eje focal coincidente con el eje Y			
Segunda ecuación ordinaria **Vértice de la parábola y centros de la elipse e hipérbola en el punto (h, k)**	Eje focal paralelo al eje X			
	Eje focal paralelo al eje Y			
Longitud del lado recto		$4p$	$2b^2/a$	$2b^2/a$
Excentricidad		$e=1$	$e= c/a < 1$ (Para la circunferencia, $e=0$)	$e= c/a > 1$
		Ya sea $A=0$ ó $C=0$	A y C del mismo signo Para la circunferencia, $A=C$	A y C de distinto signo
Casos excepcionales		Dos rectas coincidentes; dos rectas paralelas (Ningún lugar geométrico)	Punto (Ningún lugar geométrico)	Dos rectas que se cortan

Referencias:

- Geometría Analítica. Charles H. Lehmann. Editorial Limusa Noriega Editores. 2005.