Dirección de Educación Media Superior

La matemática de la suma

Semestre: 4º

Fecha junio 2022

Bloque III. Aplicaciones de la derivada

Tema. Aplicaciones de la derivada

Subtema. Identificación de relaciones básicas para construir funciones a optimizar

Dr. Cecilio Tapia Ignacio

Escuela preparatoria No. 3

Tópicos

- Objetivo del bloque
- Aprendizaje esperado
- Competencias a desarrollar
- Resumen
- Abstract
- Introducción
- Resolución de problemas de optimización
- Ejemplos de resolución de problemas de optimización
- Conclusión
- Bibliografía

Objetivo del bloque

Aplicar los conceptos de razón de cambio y pendiente de la recta tangente mediante el análisis gráfico y variacional de situaciones hipotéticas y reales que faciliten al estudiante herramientas para la toma de decisiones.

Aprendizaje esperado

Aplicar los conceptos variacionales de situaciones hipotéticas y reales que faciliten al estudiante herramientas para la toma de decisiones.

Competencias a desarrollar

Competencias de pensamiento crítico

✓ Piensa crítica y reflexivamente

✓ Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.

Competencias Disciplinares

✓ Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.

✓ Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

Resumen

En el presente trabajo se presenta una metodología para resolver problemas de optimización. Para ello, se describen cuatro pasos a seguir y se muestran algunos ejemplos de aplicación para asegurar el aprendizaje. En la mayoría de los ejercicios utilizar el criterio de la segunda derivada suele ser más versátil que el criterio de la primera derivada siempre que, la segunda derivada sea más simple que la primera derivada. Para abordar adecuadamente este material es necesario haber entendido el tema "Elementos de análisis de intervalos y puntos característicos de una función mediante la derivada: crecimiento, decrecimiento, concavidad, máximos, mínimos y puntos de inflexión".

Palabras clave: derivada, optimización.

Abstract

A methodology to solve optimization problems is presented. Four steps to follow are described and some application examples are shown. In most exercises, using the second derivative test is usually more versatile than the first derivative test as long as the second derivative is simpler than the first derivative. To properly address this material, it is necessary to have understood the topic "Elements of analysis of intervals and characteristic points of a function through the derivative: growth, decrease, concavity, maximum, minimum and inflection points".

Keywords: derivate, optimization.

Introducción

Los métodos que se han aprendido para encontrar los valores extremos tienen aplicaciones prácticas en muchas áreas de la vida.

Por ejemplo, un empresario textil o de refresqueras en ocasiones quieren minimizar el uso de sus materias primas para minimizar los costos y por tanto maximizar las ganancias. O en la construcción de oleoductos desde una plataforma marina para minimizar costos.

Introducción

Y así pueden haber muchos ejemplos más, sin embargo, en la mayor parte de los problemas prácticos el problema consiste de “***pasar un problema expresado en palabras en un problema de optimización, estableciendo la función que va a maximizar o minimizar***”.

Resolución de problemas de optimización

Es por ello que algunos pasos para la resolución de problemas de optimización pueden ser los siguientes:

1. Comprenda el problema →
2. Dibuje un diagrama →
3. Introduzca la notación →
4. Derive la función y encuentre los puntos extremos

Resolución de problemas de optimización

1. **Comprenda el problema.** Leer detenidamente el problema hasta que se entienda claramente.

¿Qué se desconoce?,

¿Cuáles son las cantidades conocidas?.

Resolución de problemas de optimización

2. **Dibuje un diagrama.** Muchas veces resulta útil dibujar un diagrama e identificar las cantidades dadas y las cantidades requeridas en el diagrama.

Resolución de problemas de optimización

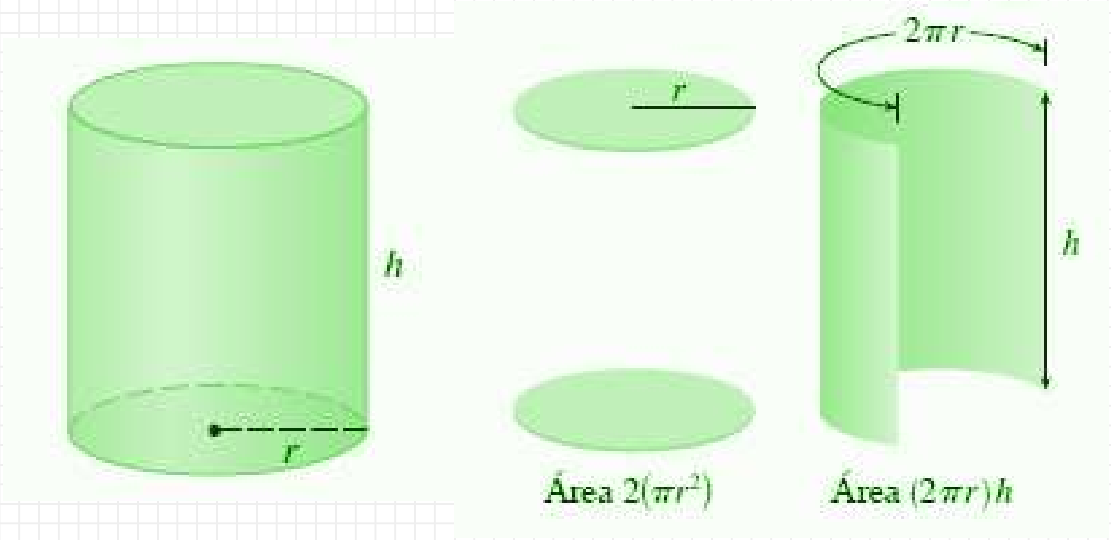
3. Introduzca la notación. Asigne un símbolo a la cantidad que va a ser maximizada o minimizada (por ejemplo V) y exprese V en términos de otras cantidades desconocidas. Utilice la información dada para encontrar relaciones (en forma de ecuaciones) entre estas variables. Utilice estas ecuaciones para eliminar todas, excepto una de las variables en la expresión para V. De esta manera V se expresará en función de una variable x, por ejemplo $V=f(x)$.

Resolución de problemas de optimización

4. Derive la función y encuentre los puntos extremos. Utilice los métodos aprendidos para encontrar los valores máximo o mínimo *absolutos* de *f*. En la mayoría de los problemas el criterio de la segunda derivada suele ser el más versátil (como se verá en los ejercicios). En particular, si el dominio de *f* es un intervalo cerrado, entonces puede utilizarse el método del intervalo cerrado como se verá en el último ejercicio de aplicación.

Ejemplos de solución de problemas de optimización

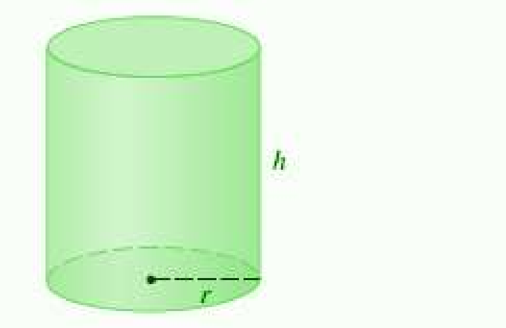
Se va a fabricar una lata que ha de contener un volumen V. Encuentre las dimensiones que debe tener la lata de manera que minimicen el costo del metal para fabricarla.

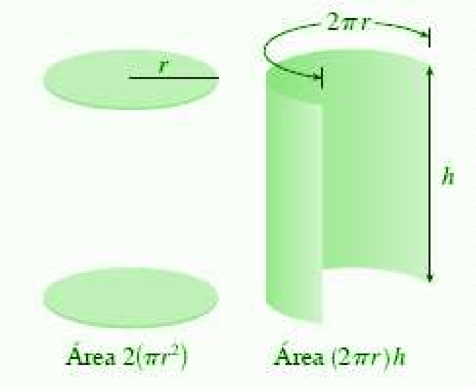


Tomado de: Stewart, J. (2012).

Ejemplos de solución de problemas de optimización

Se va a fabricar una lata que ha de contener un volumen V. Encuentre las dimensiones que debe tener la lata de manera que minimicen el costo del metal para fabricarla.





Tomado de: Stewart, J. (2012).

Solución:

El área superficial es $A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

Para eliminar a h tomemos en cuenta el volumen V.

Así: $\pi r^2 h = V$. Despejando h y sustituyendo en la función del área se tiene: $A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{V}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$

Ejemplos de solución de problemas de optimización

- $$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{V}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

Para encontrar los números críticos derivamos a la función e igualamos a cero

$$\grave{A}'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{2(2\pi r^3 - V)}{r^2} = 0,$$

Entonces $(2\pi r^3 - V) = 0 \;\Rightarrow r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}.$

Ahora aplicamos el criterio de la segunda derivada ya que lo que nos interesa saber es que si en $r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$, A(r) tiene un mínimo.

Ejemplos de solución de problemas de optimización

X

$$A''(x) = 4\pi + \frac{4V}{r^3}$$

Al sustituir el valor de $r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \equiv r_o$ en $A''(r)$ se tiene:

$$A''(r = r_o) = 4\pi + \frac{4V}{\left[\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^3} = 12\pi > 0$$

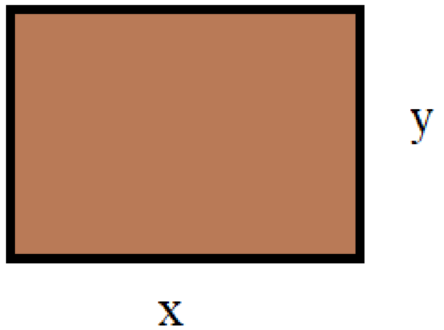
Entonces por el criterio de la segunda derivada A(x) tiene un mínimo local en $r = r_o$. El valor correspondiente a $r = r_o$ es $h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi\left[\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2} = 2\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = 2r.$

Asi, para minimizar el costo de la lata, el radio debe ser

$r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ y la altura debe ser igual al doble del radio, es decir, el diámetro

Ejemplos de solución de problemas de optimización

Le han heredado un terreno, y además le dan una malla para que cerque su terreno. Pero la única condición es que "encierre" un terreno de tipo rectangular o cuadrangular y que sea con la malla que le dieron. Suponga que le han dado una malla de 1000 m de longitud. Desde luego que a usted le gustaría maximizar el área del terreno con esa malla. ¿Cuáles deben de ser las dimensiones de dicho terreno rectangular que maximicen esa área?

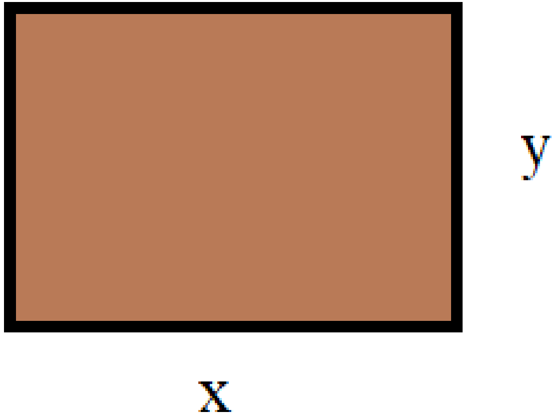


Area= $x\,y$

Perimetro $=2x+2y=1000$

Ejemplos de solución de problemas de optimización

¿Cuáles deben de ser las dimensiones de dicho terreno rectangular que maximicen esa área?



Area= x y

Perimetro =2x+2y=1000

Solución:

Queremos maximizar el área. De acuerdo a la figura podemos despejar *y* del perímetro y sustituirla en el área.

Ejemplos de solución de problemas de optimización

Por lo que resulta $A(x) = xy = x(500 - x) = 500x - x^2$

Como antes se procede a encontrar los números críticos y se aplica el criterio de la segunda derivada.

$$A'(x) = 500 - 2x = 0$$

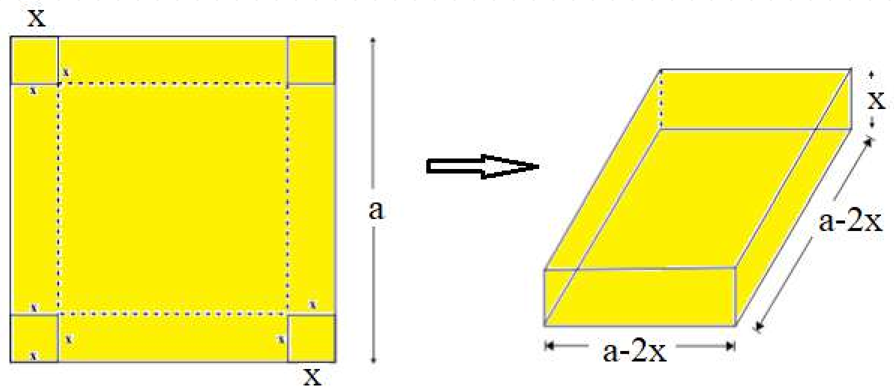
Entonces x=250.

Al tomar la segunda derivada se tiene $A''(x) = -2 < 0$. Por tanto, de acuerdo al criterio de la segunda derivada A(x) tiene un máximo local en x=250.

Así entonces las dimensiones que maximizan el área del terreno son x=250 y y=250. El área maximizada es de 62500 m².

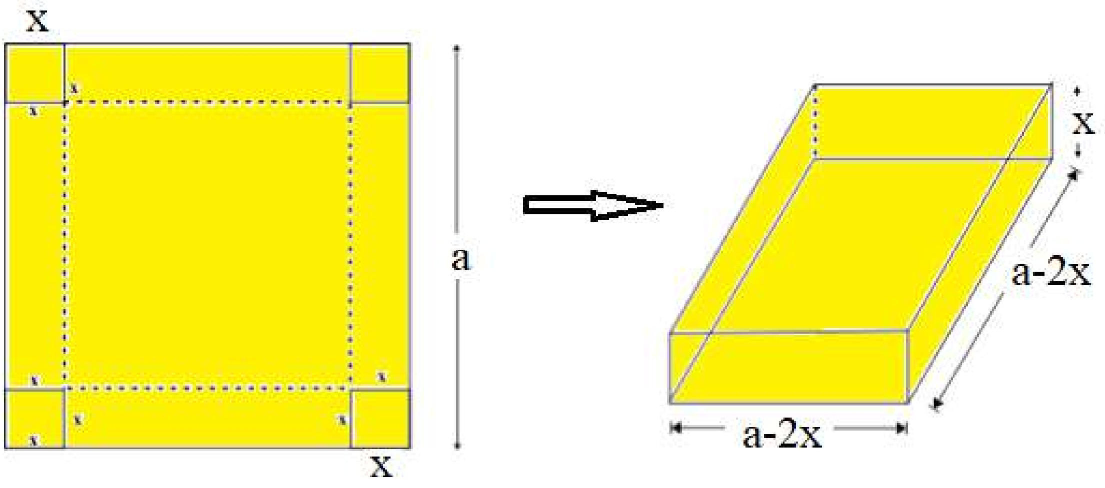
Ejemplos de solución de problemas de optimización

Se dispone de una cartulina cuadrada de lado a y se quiere hacer una caja sin tapa recortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando sus lados. ¿Cuál debe ser la longitud del lado del cuadrado que se recorta para que el volumen de la caja sea máximo?



Ejemplos de solución de problemas de optimización

¿Cuál debe ser la longitud del lado del cuadrado que se recorta para que el volumen de la caja sea máximo?



Solución:

Sea x la longitud del lado del cuadrado que se recorta en cada una de las esquinas (figura izquierda), donde $0 \le x \le a/2$.

Ejemplos de solución de problemas de optimización

Al doblar la parte de cartulina restante, se forma la caja abierta que aparece en la figura (derecha).

Ahora, el volumen de la caja es igual al área de la base x altura.

Esto es, $V(x) = (a - 2x)^2 . x = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x;$

$$0 \leq x \leq a/2$$

Puesto que V (x) (función a maximizar) es una función continua en el intervalo [0, a/2] entonces V (x) alcanza un valor máximo y un valor mínimo en dicho intervalo.

Al derivar V(x) e igualara a cero, se obtienen los puntos críticos. En efecto:
$V'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2 = (2x - a)(6x - a) = 0$

Ejemplos de solución de problemas de optimización

Así entonces: x=a/2 y x=a/6.

Para analizar la naturaleza de los puntos críticos, se usa el criterio de la segunda derivada.

$$V''(x) = 24x - 8a$$

$V''(x = a/2) = 24 \times \frac{a}{2} - 8a = 4\mathrm{a} > 0,$

lo cual indica que x= a/2 corresponde a un mínimo local.

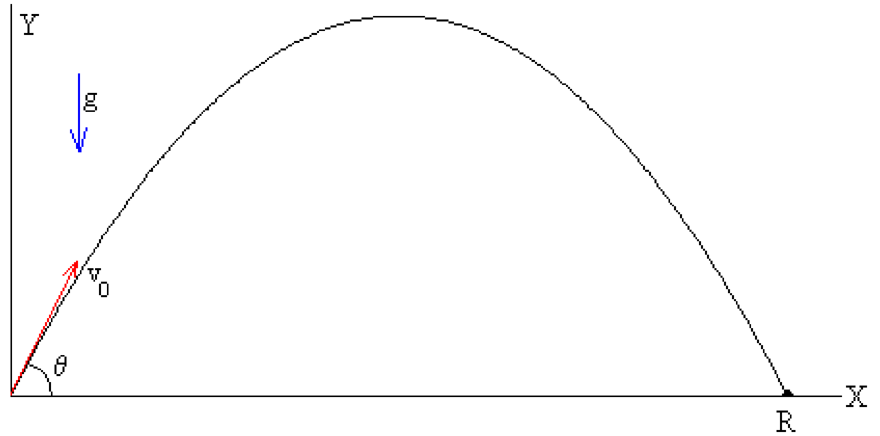
$V''(x = a/6) = 24 \times \frac{a}{6} - 8a = -4\mathrm{a} < 0,$

lo cual indica que x= a/6 corresponde a un máximo local.

En consecuencia, el volumen máximo se obtiene recortando en las esquinas de la cartulina cuadrados de lado $x = a/6$ y se obtiene de esta forma una caja cuyo volumen viene dado por $V\left(x = \frac{a}{6}\right) = \left(a - 2 \times \frac{a}{6}\right)^2 \frac{a}{6} = \frac{2}{27} a^3$.

Ejemplos de solución de problemas de optimización

Se dispara un proyectil con velocidad v_o haciendo un ángulo θ con la horizontal. Puede demostrarse que la abscisa R del punto de impacto, denominada alcance viene dado por: $R(\theta) = \frac{v_o^2}{g}\, sen(2\theta)$ para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. ¿A qué ángulo obtenemos el alcance máximo R?

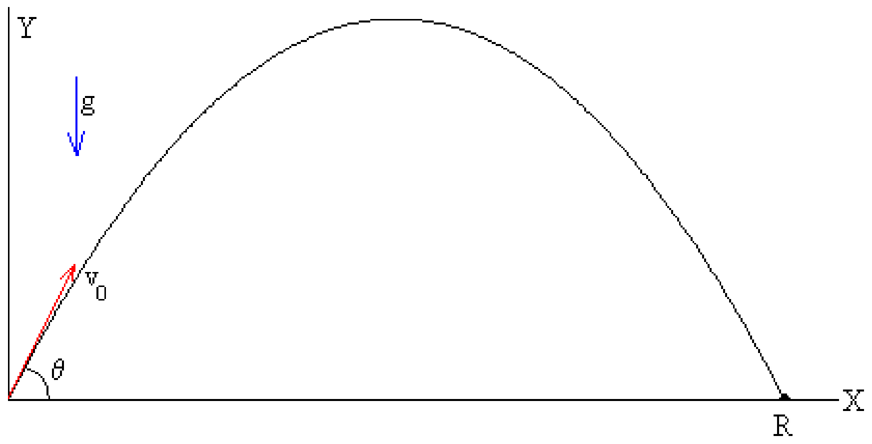


Ejemplos de solución de problemas de optimización

¿A qué ángulo obtenemos el alcance máximo R?

Solución:

En este problema ya tenemos la función asignada. Así que es más fácil, sólo hay que derivar la función. Y nuevamente utilizaremos el criterio de la segunda derivada.



Ejemplos de solución de problemas de optimización

$R'(\theta) = \frac{2v_o^2}{g}\cos(2\theta) = 0$. Como $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, sabemos que $\cos(x \equiv 2\theta) = 0$ en $\mathrm{x} = \frac{\pi}{2}$.

Así entonces el punto crítico es $x = 2\theta = \frac{\pi}{2}$ o equivalentemente $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Evaluando este punto crítico en la segunda derivada tenemos:

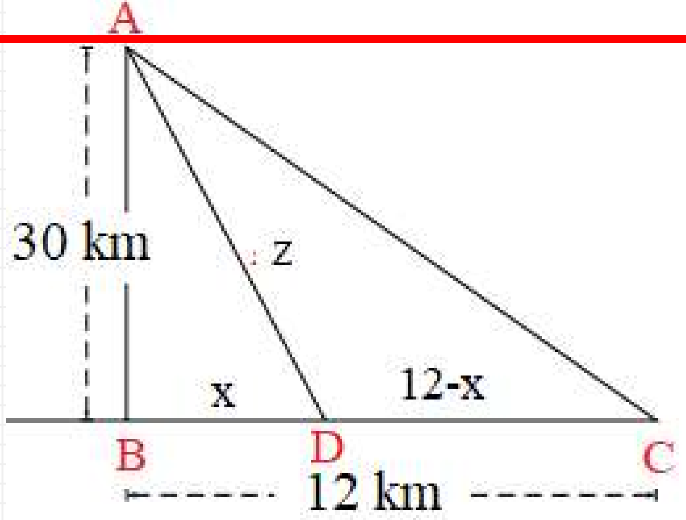
$$R''(\theta) = -4\frac{v_o^2}{g}sen(2\theta)$$

$R''\left(\theta = \frac{\pi}{4}\right) = -4\frac{v_o^2}{g}sen\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) = -4\frac{v_o^2}{g} < 0$, lo cual indica que en $\theta = \frac{\pi}{4}$ ó $\theta = 45°$ corresponde a un máximo local.

En consecuencia el alcance máximo se obtiene cuando $\theta = 45°$.

Ejemplos de solución de problemas de optimización

Se requiere construir un oleoducto desde una plataforma marina que está localizada al norte 30 km mar adentro, hasta unos tanques de almacenamiento que están en la playa y 12 km al este. Si el costo de construcción de cada kilómetro de oleoducto en el mar es de 4 000 000 y en tierra es de 2 500 000, ¿qué tan alejado debe salir el oleoducto submarino a la playa para que el costo de la construcción sea mínimo?

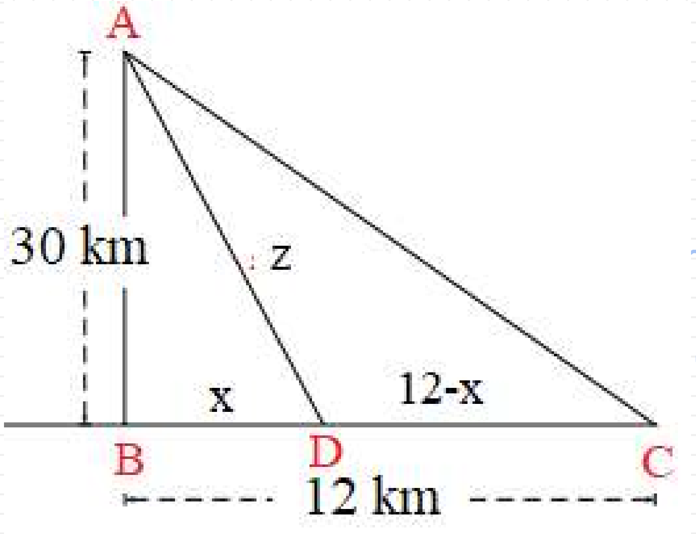


Ejemplos de solución de problemas de optimización

¿Qué tan alejado debe salir el oleoducto submarino a la playa para que el costo de la construcción sea mínimo?

Solución:

El costo de construir z km de oleoducto submarino, a razón de 4 000 000 de dólares por km, es de 4z millones de dólares y el costo de construir 12- x km de oleoducto terrestre, a razón de 2 500 000 de dólares por km, es 2.5(12-x) millones de dólares.



Ejemplos de solución de problemas de optimización

Entonces, el costo total de la construcción del oleoducto es (en millones de dólares)

$$C(x) = 4z + 2.5(12 - x) = 4\sqrt{900 + x^2} + \frac{5}{2}(12 - x)$$

que es la función a minimizar. Derivando y obteniendo puntos críticos:

$$C'(x) = \frac{4x}{\sqrt{900 + x^2}} - \frac{5}{2} = 0$$

$\Rightarrow \frac{4x}{\sqrt{900+x^2}} = \frac{5}{2} \Longrightarrow 8x = 5\sqrt{900 + x^2} \Longrightarrow 64x^2 = 25(900 + x^2)$. Así entonces: $x = \pm\frac{150}{\sqrt{39}} \approx \pm\, 24.0192$. Por ser $x \geq 0$, podemos descartar $x = \frac{150}{\sqrt{39}}$.

Ejemplos de solución de problemas de optimización

Pero hay que tener cuidado $x \approx 24.0192$ no cumple con la restricción $0 \leq x \leq 12$. Esto nos indica que la función costo C(x) no tiene puntos críticos en el intervalo cerrado [0, 12].

Por lo cual no hay un mínimo local estricto (ni máximo) para el costo C(x) en [0, 12].

En [0, 12] la función C(x) es decreciente ya que $C'(x) < 0$ si $0 \leq x \leq \frac{150}{\sqrt{39}} \approx 24.0192.$

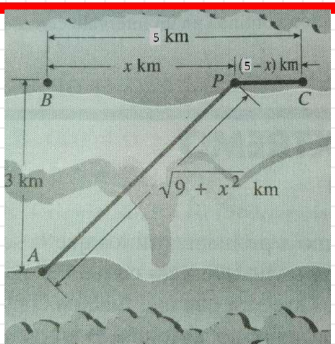
Ejemplos de solución de problemas de optimización

Por lo tanto el costo mínimo aparece en uno de los extremos del intervalo, y por tanto el costo máximo aparece en el otro extremo.
Valuamos entonces C(x) en x=0 y en x=12. Al hacer esto obtenemos $C(x=0)=150$ y $C(x=12)=120$.

Por lo tanto, el costo mínimo de la construcción del oleoducto es de 120 000 000 de dólares y se obtiene cuando todo el oleoducto es submarino y sale a la playa precisamente donde están los tanques de almacenamiento.

Ejemplos de solución de problemas de optimización

Los puntos A y B están en las orillas de un río recto de 3km de ancho y son opuestos unos del otro, El punto C está en la misma orilla que B pero a 5 kilómetros de B río a bajo, Una compañía telefónica desea tender un cable de A a C donde el costo por kilómetro de cable en tierra es de 10, 000 dólares y el de cable suacuático es de 12, 500 dólares, Sea P un punto en la en la misma orilla que B y C de modo que el cable se tienda de A a P y luego a C. Obtenga una ecuación que defina C(x) si C(x) dólares es el costo total del cable tendido.



Modificado de: Leithold, L. (1998)

Ejemplos de solución de problemas de optimización

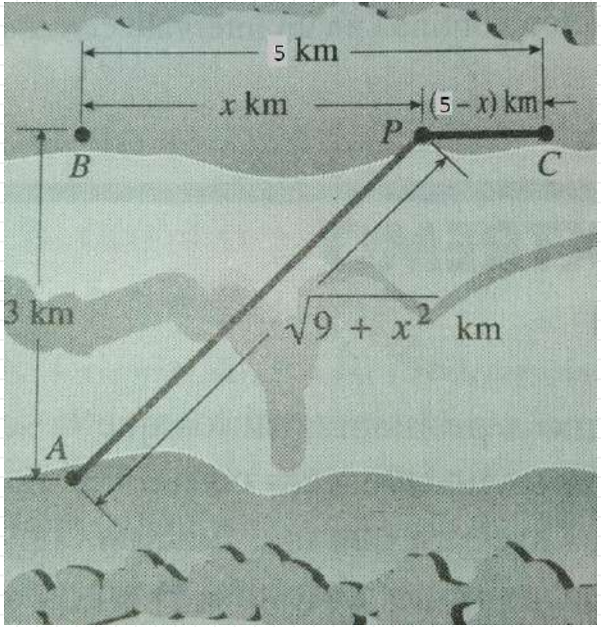
Obtenga una ecuación que defina C(x) si C(x) dólares es el costo total del cable tendido.

Solución:

La distancia de P a C es (5-x) kilómetros y del teorema de Pitágoras, la distancia de A a P es $\sqrt{3^2 + x^2}$ kilómetros. Por tanto,

$$C(x) = 12500\sqrt{9 + x^2} + 10000\,(5-x)$$

El dominio de C(x) es $[0, 5]$.



Modificado de: Leithold, L. (1998)

Ejemplos de solución de problemas de optimización

$C(x) = 12500\sqrt{9+x^2}$ +10000 (5-x)

$$C'(x) = \frac{12500}{\sqrt{9+x^2}} - 10000$$

Al igualara a $C'(x) = 0$ y resolver para x se tiene:

$$\frac{12500}{\sqrt{9+x^2}} - 10000 = 0$$

$12500x - 10000\sqrt{9+x^2}$=0 → $5x = 4\sqrt{9+x^2}$ → x=$\pm$4.

El número -4 es una raíz negativa que no está en el dominio de C, por lo que podemos descartarla. El número $x = 4$ es un punto crítico de C en $[0,5]$. Ahora calculamos la segunda derivada:

$$C''(x) = 12500(9+x^2)^{-1/2} + 12500(9+x^2)^{-3/2} = \frac{12500(2x^2+9)}{(9+x^2)^{3/2}}$$

Ejemplos de solución de problemas de optimización

$$C''(x) = \frac{12500(2x^2+9)}{(9+x^2)^{3/2}}$$

$C''(x=4) = \frac{12500(2(4^2)+9)}{(9+(4^2))^{3/2}}$=4100> 0. Por lo tanto existe un mínimo local en C(x=4)=(4,72500).

Valuamos entonces C(x) en x=0 y en x=5. Al hacer esto obtenemos $C(x=0) = 87500$ y $C(x=5) = 12500(\sqrt{34}) \approx 72886.90$.

Por lo tanto, se estima que el costo del cable tendido, en ese caso, es mínimo cuando x=4 y el costo mínimo es 72500 dólares.

Conclusión para resolver problemas de optimización

1. Comprenda el problema → 2. Dibuje un diagrama → 3. Introduzca la notación → 4. Derive la función y encuentre los puntos extremos

Referencias

- ✗ Stewart, J. (2012). Aplicaciones de la derivada. En Cálculo de una variable, trascendentes tempranas. Cengage Learning.
- ✗ Leithold, L. (1998). Comportamiento de las funciones y de sus gráficas. En. El cálculo. Editorial OXFORD University Press.