Dirección de
Educación
Media Superior

La medición y la matemática de los triángulos

Semestre: 2

Fecha: 22-06-22

Bloque III
Tema: Solución de triángulos oblicuángulos

Nombre del docente: Humberto Dorantes Pérez

Escuela superior de Tlahuelilpan

Tópicos:
Ley de Senos
Ley de Cosenos

Objetivo del bloque

Aplicar diversas alternativas de solución de triángulos oblicuángulos, a través de situaciones reales e hipotéticas de su entorno; así como demostrar identidades Trigonométricas identificando a qué tipo pertenecen y como se aplican para resolver problemas de su entorno

Aprendizaje esperado

Analiza y determina las relaciones entre los lados y ángulos de un triángulo oblicuángulo, para obtener información que le permita argumentar conclusiones sobre problemas aplicados a su entorno.

Competencias a desarrollar

2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Resumen

Cuando decimos resolver un triángulo nos referimos a encontrar el valor de la medida de sus tres lados y de sus tres ángulos. Un triángulo oblicuángulo es aquél que no tiene un ángulo de 90 grados, estos triángulos no se pueden resolver aplicando simplemente razones trigonométricas, sino que hay que aplicar ley de senos o ley de cosenos.

La ley de senos se usa cuando se usa cuando se conoce el valor de dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos o se conoce el valor de dos ángulos y cualquier otro lado.

La ley de cosenos se usa cuando se tiene el valor de dos lados y el ángulo comprendido entre ellos o cuando se tiene el valor de los tres lados.

Palabras clave

Oblicuángulo
Seno
Coseno
Arcoseno
Arcocoseno

Abstract

When we say solve a triangle we mean to find the value of the measure of its three sides and its three angles. An oblique triangle is one that does not have an angle of 90 degrees, these triangles cannot be solved simply by applying trigonometric ratios, but rather the law of sines or the law of cosines must be applied. The law of sines is used when it is used when the value of two sides and the angle opposite one of them is known or the value of two angles and any other side is known. The law of cosines is used when you have the value of two sides and the angle between them or when you have the value of all three sides.

Keywords

Oblique triangle
Sine
Cosine
Arcsine
Arccosine

Triángulos oblicuángulos

Un triángulo es oblicuángulo cuando sus tres ángulos son oblicuos, es decir no tiene ángulos rectos. Estos triángulos se resuelven mediante ley de senos y ley de cosenos

Ley de senos

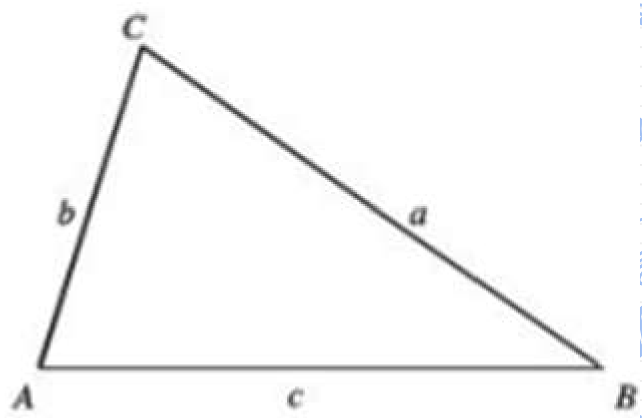
La razón que existe entre un lado de un triángulo oblicuángulo y el seno de el ángulo opuesto a dicho lado es igual a la misma razón entre los lados y ángulos restantes

Se usa cuando:

- Se conoce el valor de dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
- Se conoce el valor de dos ángulos y cualquier otro lado.

Ley de senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$



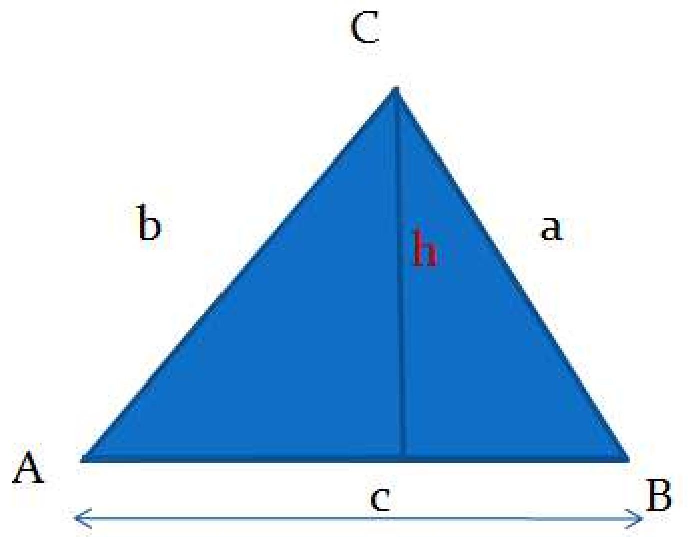
Demostración

$$\operatorname{sen}A = \frac{h}{b} \quad y \quad \operatorname{sen}B = \frac{h}{a}$$

$$b \cdot \operatorname{sen}A = h \quad y \quad a \cdot \operatorname{sen}B = h$$

$$b \cdot \operatorname{sen}A = a \cdot \operatorname{sen}B$$

$$\frac{\operatorname{sen}A}{a} = \frac{\operatorname{sen}B}{b}$$

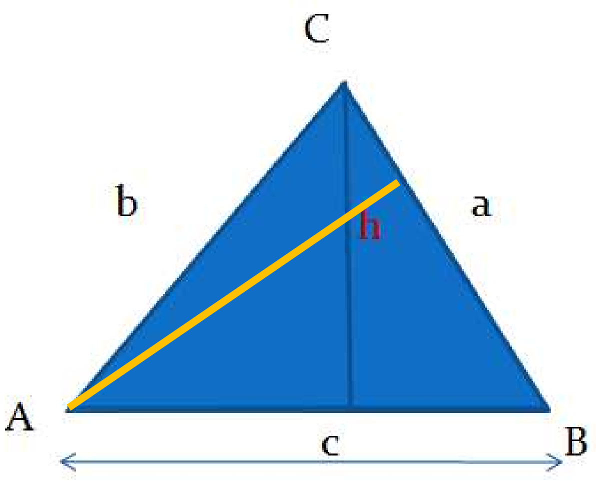


Al trazar la altura sobre CB se obtiene:

$$\operatorname{sen}B = \frac{h}{c} \quad y \quad \operatorname{sen}C = \frac{h}{b}$$

$$c \cdot \operatorname{sen}B = h \quad y \quad b \cdot \operatorname{sen}C = h$$

$$\frac{\operatorname{sen}B}{b} = \frac{\operatorname{sen}C}{c}$$



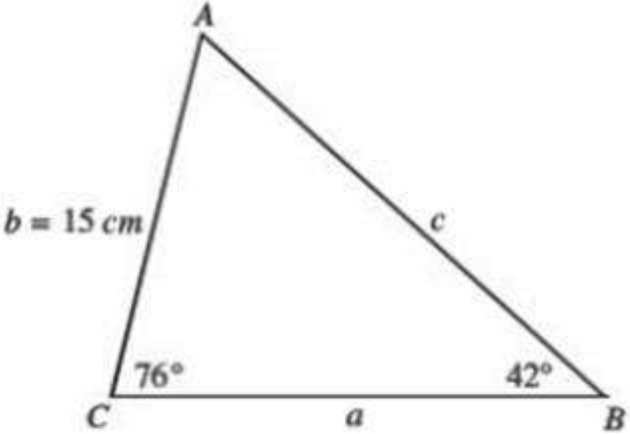
Y al combinar los resultados anteriores:

$$\frac{\operatorname{sen}A}{a} = \frac{\operatorname{sen}B}{b} = \frac{\operatorname{sen}C}{c}$$

Ejemplo:

En el triángulo ABC, $b = 15\ cm$, $\angle B = 42°$ y $\angle C = 76°$. Calcula la medida de los lados y ángulos restantes.

Solución



Para obtener $\angle A$, se aplica $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, despejando,

$$\angle A = 180° - \angle C - \angle B = 180° - 42° - 76° = 62°$$

Se conoce el valor del lado b y el ángulo B, opuesto a dicho lado, también se proporciona el ángulo C, por tanto, se puede determinar la medida del lado c,

$$\frac{c}{sen\ C} = \frac{b}{sen\ B}$$

Al sustituir $\angle C = 76°$, $\angle B = 42°$ y $b = 15\ cm$, se determina que,

$$\frac{c}{sen\ 76°} = \frac{15}{sen\ 42°}$$

De la expresión anterior se despeja c,

$$c = \frac{(15)(sen\ 76°)}{sen\ 42°} = \frac{(15)(0.9703)}{0.6691} = 21.75\ cm$$

Por último, se determina el valor del lado a con la siguiente relación:

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} \qquad \text{donde} \qquad \frac{a}{sen\ 62°} = \frac{15}{sen\ 42°}$$

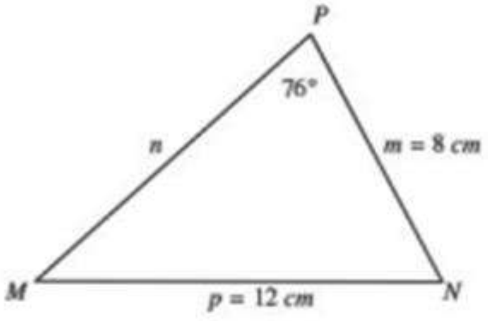
Al despejar a:

$$a = \frac{(15)(sen\ 62°)}{sen\ 42°} = \frac{(15)(0.8829)}{0.6691} = 19.8\ cm$$

Ejemplo 2

En el triángulo MNP, $\angle P = 76°$, $p = 12$ cm y $m = 8$ cm. Resuelve el triángulo.

Solución



Con los datos del problema, se calcula el valor de $\angle M$ con la siguiente relación: $$\frac{m}{sen\ M} = \frac{p}{sen\ P}$$

Al despejar $sen\ M$ y sustituir los valores, se obtiene: $$sen\ M = \frac{m\ sen\ P}{p} = \frac{(8)(sen\ 76°)}{12} = \frac{(8)(0.97029)}{12} = 0{,}6469$$

Entonces: $\angle M = arc\ sen\ (0{,}6469)$

$\angle M = 40°\ 18'$

Por otro lado,

$$\angle N = 180° - \angle P - \angle M = 180° - 76° - 40° \ 18' = 63° \ 42'$$

Se aplica la ley de senos para encontrar el valor del lado *n*:

$$\frac{n}{sen\ N} = \frac{p}{sen\ P}$$

Al despejar *n*,

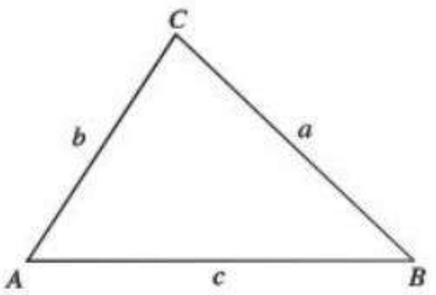
$$n = \frac{p\ sen\ N}{sen\ P} = \frac{(12)(sen\ 63°42')}{sen\ 76°} = \frac{(12)(0.8965)}{0.9703} = 11.09\ cm$$

Por consiguiente,

$$\angle M = 40° \ 18', \angle N = 63° \ 42' \text{ y } n = 11.09\ cm$$

Ley de cosenos

El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los lados restantes, menos el doble producto de dichos lados por el coseno del ángulo opuesto al lado buscado.



Ley de cosenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

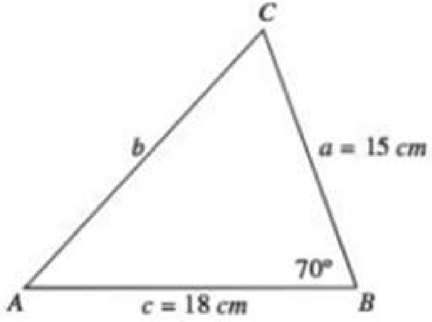
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Se usa cuando:

- Se tiene el valor de dos lados y el ángulo comprendido entre ellos
- Se tiene el valor de los tres lados

Ejemplo 1

En el triángulo ABC, $a = 15\ cm$, $c = 18\ cm$, $\angle B = 70°$. Resuelve el triángulo.



Solución

Para calcular el valor del lado b se utiliza la fórmula: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

Donde,

$$b = \sqrt{(15)^2 + (18)^2 - 2(15)(18)\cos 70°} = \sqrt{225 + 324 - 2(15)(18)(0.34202)} = \sqrt{364.3}$$

$b = 19.09\ cm$

Conocidos los 3 lados del triángulo se calcula el valor de $\angle A$:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(19.09)^2 + (18)^2 - (15)^2}{2(19.09)(18)} = \frac{364.43 + 324 - 225}{687.24} = 0.6743$$

Donde: $\angle A = \arccos 0.6743 = 47°\ 36'$

Por último, se determina la medida de $\angle C$:

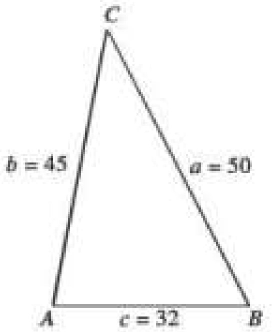
$$\angle C = 180° - \angle A - \angle B = 180° - 47°\ 36' - 70° = 62°\ 24'$$

Por tanto, los elementos restantes del triángulo ABC son:

$$b = 19.09\ cm,\ \angle A = 47°\ 36' \text{ y } \angle C = 62°\ 24'$$

Ejemplo 2

- En el triángulo ABC, $a = 50$, $b = 45$, $c = 32$. Resuelve el triángulo.



Solución

Para obtener $\angle A$:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(45)^2 + (32)^2 - (50)^2}{2(45)(32)} = \frac{2\,025 + 1024 - 2500}{2\,880} = 0{,}1906$$

Donde,

$$\angle A = \arccos 0.1906 = 79°$$

Para obtener $\angle B$:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(50)^2 + (32)^2 - (45)^2}{2(50)(32)} = \frac{2500 + 1\,024 - 2\,025}{3200} = 0{,}4684$$

Donde,

$$\angle B = \arccos 0{,}4684 = 62°\ 4'$$

Para calcular $\angle C$:

$$\angle C = 180° - \angle A - \angle B = 180° - 79° - 62°\ 4' = 38°\ 56'$$

Por consiguiente, los ángulos del triángulo ABC son:

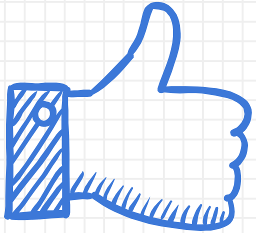
$$\angle A = 79°,\ \angle B = 62°\ 4'\ \text{y}\ \angle C = 38°\ 56'$$

Conclusión

La ley de senos y la ley de cosenos nos ayudan a encontrar las medidas de los tres lados y los tres ángulos de cualquier triángulo conociendo al menos 3 de valores siempre y cuando al menos uno sea la longitud de uno de sus lados.

Referencias

Conamat. (2009). Geometría y Trigonometría. México: Pearson



Gracias por su atención