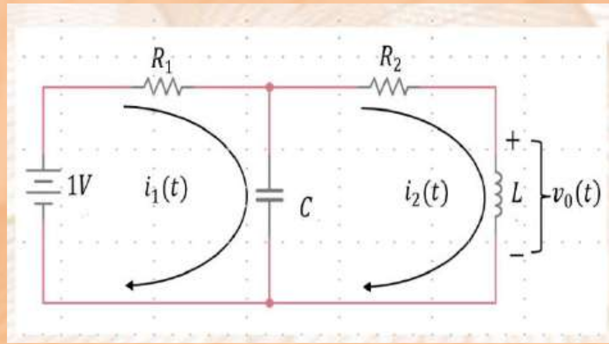
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería

Área Académica de Ingeniería y Arquitectura



Ecuación de la malla 1

$$-1 + R_1 i_1 + \frac{1}{C}\int (i_1 - i_2)dt = 0$$

Ecuación de la malla 2

$$\frac{1}{C}\int (i_2 - i_1)dt + R_2 i_2 + L\frac{di_2}{dt} = 0$$

Tema:

Solución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Usando Laplace

Elaboran:
Norberto Hernández Romero,
Juan Carlos Seck Tuoh Mora,
Joselito Medina Marín.

Mayo de 2023

Resumen

En estas diapositivas se aborda el tema de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante el uso de la transformada de Laplace. Se reportan ejemplos de ingeniería como circuitos eléctricos y sistemas mecánicos representados por ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden hasta modelos de sistemas de ecuaciones diferenciales. Es un material que da el soporte a asignaturas posteriores para la modelación, simulación y control de sistemas dinámicos.

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales ordinarias, circuitos eléctricos, sistemas masa-resorte-amortiguador, transformada de Laplace.

Abstract

These slides deal with the solution of ordinary differential equations through the Laplace transform. Engineering examples are reported, such as electrical circuits and mechanical systems represented by first and second-order differential equations and models of systems of differential equations. It is a material that supports later courses for modeling, simulation, and control of dynamic systems.

Keywords: Ordinary differential equations, electric circuits, mass-spring-damper systems, Laplace transform.

Laplace de la función exponencial

La transformada de Laplace de una función $y(t)$ es $Y(s)$ y está definida por:

$$Y(s) = \int_0^\infty y(t)e^{-st}dt$$

Si $y(t)$ está definida por una función exponencial de la forma $\exp(at)$ donde a es un número en $\mathbb{R}$ y t es la variable independiente, la transformada de Laplace Se puede expresar por:

$$Y(s) = \int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t}dt = \lim_{b\to\infty}\left[\int_0^b e^{(a-s)t}dt\right]$$

Realizando la integral

$$Y(s) = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{(a-s)}e^{(a-s)t}\right]_0^b = \frac{1}{a-s}\lim_{b\to\infty}\left[e^{(a-s)b} - e^0\right]$$

La transformada existe si $(\mathrm{a}-\mathrm{s}) < 0$, esto es, $s > a$, por lo tanto

$$Y(s) = \frac{1}{s-a}$$

Laplace de la función exponencial

La transformada de Laplace de una función $y(t)$ es $Y(s)$ y está definida por:

$$Y(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{s-a}, si\ s > a \\ no\ definida, si\ s \leq a \end{cases}$$

El símbolo $\mathcal{L}$ se usa para denotar la transformada de Laplace, así las operaciones Anteriores se pueden expresar de la siguiente forma,

$$Y(s) = \mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}, si\ s > a$$

Se puede verificar que cuando la función es una exponencial decreciente, la transformada de Laplace queda expresada por,

$$Y(s) = \mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{s+a}, si\ s > -a$$

Laplace de la función rampa unitaria

La función escalón unitario está definida por:

$$y(t) = \begin{cases} t, si\ t \geq 0 \\ 0, si\ t < 0 \end{cases}$$

La transformada de Laplace de la función escalón unitario

$$Y(s) = \int_0^{\infty} y(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} te^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\left[\int_0^{b} te^{-st}dt\right]$$

Realizando la integral por partes,

$$u = t, du = dt, dv = e^{-st}, v = -\frac{1}{s}e^{-st}$$

$$Y(s) = \left[-\frac{1}{s}te^{-st}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{s}e^{-st}dt, \qquad \text{si} \quad s > 0$$

E

Laplace de la función rampa unitaria

El primer término es cero, el segundo término se define por

$$Y(s) = \frac{1}{s}\left(-\frac{1}{s}\right)\int_0^{\infty} e^{-st}(-sdt) = -\frac{1}{s^2}(e^{-\infty} - e^{0})$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2}, \qquad s > 0$$

Laplace de la función seno

La transformada de Laplace de una función $y(t) = \sin(wt)$ se realiza usando la función exponencial, si la expresamos como:

$$y(t) = \sin(wt) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(wt)} - e^{-i(wt)}\right)$$

La transformada de Laplace de $y(t)$ la expresamos por:

$$Y(s) = \mathcal{L}(\sin(wt)) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2i}\left(e^{i(wt)} - e^{-i(wt)}\right)\right)$$

Aplicando Laplace a cada término exponencial

$$Y(s) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s - iw} - \frac{1}{s + iw}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{(s + iw) - (s - iw)}{(s - iw)(s + iw)}\right)$$

Simplificando términos obtenemos:

$$Y(s) = \frac{1}{2i}\left(\frac{s + iw - s + iw}{(s^2 - i^2w^2)}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{2iw}{s^2 + w^2}\right) = \frac{w}{s^2 + w^2}$$

Laplace de la función coseno

La transformada de Laplace de una función $y(t) = \cos(wt)$ se realiza usando función exponencial, si la función la expresamos como:

$$y(t) = \cos(wt) = \frac{1}{2}\left(e^{i(wt)} + e^{-i(wt)}\right)$$

La transformada de Laplace de $y(t)$ la expresamos por:

$$Y(s) = \mathcal{L}(\cos(wt)) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}\left(e^{i(wt)} + e^{-i(wt)}\right)\right)$$

Aplicando Laplace a cada término exponencial

$$Y(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-iw} + \frac{1}{s+iw}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(s+iw)+(s-iw)}{(s-iw)(s+iw)}\right)$$

Simplificando términos obtenemos:

$$Y(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{s+iw+s-iw}{(s^2-i^2w^2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2s}{s^2+w^2}\right) = \frac{s}{s^2+w^2}$$

Resumen de la transformada de Laplace de funciones básicas

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$sen(wt)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$
$\cos(wt)$	$\frac{s}{s^2+w^2}$
$e^{\pm at}$	$\frac{1}{s \mp a}$

Propiedades de la transformada de Laplace

1) Superposición y homogeneidad

$$\mathcal{L}[f+g] = \mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g]$$

$$\mathcal{L}[cf] = c\mathcal{L}[f]$$

Donde f y g son funciones en el tiempo, $c \in \mathbb{R}$.

2) Transformada de Laplace de la derivada n-ésima

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-1} f'(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

3) Transformada de Laplace de la Integral

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left[f(t) = \frac{1}{s}F(s)\right]$$

Propiedades de la transformada de Laplace

4) Teorema de traslación en el plano s

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = \mathcal{L}[f(t)]_{s\rightarrow(s-a)} = F(s-a)$$

5) Transformada inversa de Laplace de la función con traslación $F(s-a)$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)] = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]_{s\rightarrow(s-a)} = e^{at}f(t)$$

Transformada inversa de Laplace

Obtener la transformada inversa de Laplace de la función

$$Y(s) = \frac{1}{s^3}$$

Usamos la ecuación

$$F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \text{ Cuya transformada inversa equivale a } f(t) = t^n$$

Donde $n + 1 = 3$, entonces $n = 2$ y $2! = 2$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^3}\right) = \frac{1}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2!}{s^3}\right) = \frac{1}{2!}t^2 = \frac{t^2}{2}$$

Transformada inversa de Laplace

Obtener la transformada inversa de Laplace de la función

$$Y(s) = \frac{3}{s^3} - \frac{6}{s^4} + \frac{24}{s^5}$$

Usamos las ecuación

$$F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$ Cuya transformada inversa equivale a $f(t) = t^n$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s^3}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6}{s^4}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{24}{s^5}\right) = \frac{3}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2!}{s^3}\right) - \frac{6}{3!}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3!}{s^4}\right) + \frac{24}{4!}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4!}{s^5}\right)$$

$$y(t) = \frac{3}{2}t^2 - t^3 + t^4$$

Transformada inversa de Laplace

Obtener la transformada inversa de Laplace de la función

$$Y(s) = \frac{(s+1)^2}{s^3}$$

Donde

$$Y(s) = \frac{s^2+2s+1}{s^3} = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s^3}$$ Usamos $F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ y $f(t) = t^n$

Aplicando transformada inversa

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right]$$

$$y(t) = 1 + 2t + \frac{1}{2}t^2$$

Transformada inversa de Laplace

Obtener la transformada inversa de Laplace de la función

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 25}$$

Usamos la ecuación

$$F(s) = \frac{w}{s^2 + w^2}$$ cuya transformada inversa equivale a $f(t) = sen(wt)$

Donde $w^2 = 25$, entonces $w = 5$, aplicando la transformada inversa

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 25}\right) = \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5}{s^2 + 25}\right) = \frac{1}{5}sen(5t)$$

Transformada inversa de Laplace

Obtener la transformada inversa de Laplace de la función

$$Y(s) = \frac{s+1}{3s^2+1}$$

Aplicando la transformada inversa a $Y(s)$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{3s^2+1}\right) = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{s^2+\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+\frac{1}{3}} + \frac{1}{s^2+\frac{1}{3}}\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+\frac{1}{3}}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{s^2+\frac{1}{3}}\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{3}cos\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}sen\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)$$

Transformada inversa de Laplace

Obtener la transformada inversa de Laplace de la función

$$Y(s) = \frac{2}{s^2 + 2s}$$

Aplicando la transformada inversa a $Y(s)$ y una descomposición por fracciones parciales

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2 + 2s}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s(s+2)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}\right)$$

Donde $A(s+2) + Bs = 2$ Por lo tanto $A = 1, B = -1$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} + \frac{-1}{s+2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right)$$

La función en el tiempo se define por:

$$y(t) = 1 - e^{-2t}$$

Transformada inversa de Laplace

Obtener la transformada inversa de Laplace de la función

$$Y(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$$

Aplicando una descomposición por fracciones parciales

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{(s+2)(s+3)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}\right)$$

Donde, $A(s+3) + B(s+2) = s+1,$ por lo tanto, $A = 1, B = -1$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}\right) = e^{-t} - e^{-3t}$$

Transformada inversa de Laplace

Obtener la transformada inversa de Laplace de la función

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 10}$$

La ecuación se puede expresar por

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2 + 9}$$

Usando el teorema

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)] = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]_{s\to(s-a)} = e^{at}f(t)$$

La solución aplicando transformada inversa y teorema de corrimiento

$$y(t) = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s^2+9}\right)\Bigg|_{s\to(s+1)} = \frac{1}{3}e^{-t}sen(3t)$$

Transformada inversa de Laplace

Obtener la transformada inversa de Laplace de la función

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + 4s + 20}$$

La ecuación se puede expresar por

$$Y(s) = \frac{s}{(s+2)^2 + 16}$$

Usando el teorema

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)] = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]_{s\to(s-a)} = e^{at}f(t)$$

La solución aplicando transformada inversa y teorema de corrimiento

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{s^2+16}\right)\Bigg|_{s\to(s+2)} - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+16}\right)\Bigg|_{s\to(s+2)} = e^{-2t}cos(4t) - \frac{1}{2}e^{-2t}sen(4t)$$

Solución de ecuaciones diferenciales usando Laplace

Obtener la solución de la ecuación diferencial mediante Laplace

$$\frac{dy}{dt} + y = 2, \qquad y(0) = 1$$

Aplicando Laplace a la ecuación diferencial

$$sY(s) - y(0) + Y(s) = \frac{2}{s}$$

Sustituyendo la condición inicial, despejando Y(s) y realizando descomposición por fracciones parciales (raíces diferentes)

$$Y(s) = \frac{\frac{2+s}{s}}{s+1} = \frac{s+2}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}$$

Determinación de los coeficientes

$$A(s+1) + Bs = s + 2$$
$$A = 2, B = -1$$

La solución

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s} - \frac{1}{s+1}\right) = 2 - e^{-t}$$

Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales usando Laplace

Obtener la solución de la ecuación diferencial mediante Laplace

$$\frac{dy}{dt} + y = e^{2t}, \qquad y(0) = 2$$

Aplicando Laplace a la ecuación diferencial y sustituyendo la condición inicial

$$sY(s) - 2 + Y(s) = \frac{1}{s-2}$$

Despejando Y(s) y realizando descomposición por fracciones parciales (raíces diferentes)

$$Y(s) = \frac{2s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2}$$

Determinación de los coeficientes

$$A(s+1) + B(s-2) = 2s+1$$
$$A = 1, B = 1$$

La solución

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-2}\right) = e^{-t} + e^{2t}$$

Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales usando Laplace

Obtener la solución de la ecuación diferencial mediante Laplace

$$\frac{dy}{dt} + z = t$$

$$\frac{dz}{dt} + 4y = 0$$

Condiciones iniciales $y(0) = 1, z(0) = -1$

Transformada de Laplace del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$sY(s) + Z(s) = \frac{1}{s^2} + 1$$

$$4Y(s) + sZ(s) = -1$$

Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales usando Laplace

Su forma matricial

$$\begin{bmatrix} s & 1 \\ 4 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y(s) \\ Z(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s^2+1}{s^2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

Realizando los determinantes correspondientes:

$$\Delta = \begin{bmatrix} s & 1 \\ 4 & s \end{bmatrix} = s^2 - 4 \qquad \Delta_Y = \begin{bmatrix} \frac{s^2+1}{s^2} & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} = \frac{s^2+1}{s} + 1 = \frac{s^2+1+s}{s}$$

$$\Delta_Z = \begin{bmatrix} s & \frac{s^2+1}{s^2} \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = -s + \frac{4(s^2+1)}{s^2} = \frac{-(s^3+4s^2+4)}{s^2}$$

Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales usando Laplace

La solución para Y(s)

$$Y(s) = \frac{\frac{s^2+s+1}{s}}{s^2-4} = \frac{s^2+s+1}{s(s^2-4)}$$

Descomposición por fracciones parciales

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+2}$$

Procedimiento para la determinación de A, B y C

$$A(s^2-4) + Bs(s+2) + Cs(s-2) = s^2+s+1$$

$$As^2 - 4A + Bs^2 + 2Bs + Cs^2 - 2Cs = s^2+s+1$$

Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales usando Laplace

Por igualación de términos obtenemos el sistema de ecuaciones lineales

$$A + B + C = 1$$
$$2B - 2C = 1$$
$$-4A = 1$$

La solución $A = -\frac{1}{4}, B = \frac{7}{8}$ y $C = \frac{3}{8}$

Así la función $Y(s)$ se puede expresar por

$$Y(s) = \frac{-1/4}{s} + \frac{7/8}{s-2} + \frac{3/8}{s+2}$$

Aplicamos la transformada inversa a la ecuación anterior para obtener

$$y(t) = -\frac{1}{4} + \frac{7}{8}e^{2t} + \frac{3}{8}e^{-2t}$$

Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales usando Laplace

La función $\mathrm{Z}(s)$ se puede expresar por

$$Z(s)=\frac{\frac{-(s^3+4s^2+4)}{s^2}}{s^2-4}=\frac{-(s^3+4s^2+4)}{s^2(s^2-4)}$$

Realizando la descomposición por fracciones parciales

$$Z(s)=\frac{A}{s^2}+\frac{B}{s}+\frac{C}{s-2}+\frac{D}{s+2}$$

Procedimiento para la determinación de A, B y C

$$As^2-4A+Bs^3-4Bs+Cs^3+2Cs^2+Ds^3-2Ds^2=-(s^3+4s^2+4)$$

$$As^2-4A+Bs^3-4Bs+Cs^3+2Cs^2+Ds^3-2Ds^2=-(s^3+4s^2+4)$$

Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales usando Laplace

Por igualación de términos obtenemos el sistema de ecuaciones lineales

$$B + C + D = -1$$
$$A + 2C - 2D = -4$$
$$-4B = 0$$
$$-4A = -4$$

Donde $A = 1, B = 0, C = -7/4, D = 3/4.$

Así la función Z(s) se puede expresar por

$$Z(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{-7/4}{s-2} + \frac{3/4}{s+2}$$

La transformada inversa a la ecuación anterior para obtener la solución

$$z(t) = t - \frac{7}{4}e^{2t} + \frac{3}{4}e^{-2t}$$

Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales usando Laplace

Obtener la solución de la ecuación diferencial mediante Laplace

$$\frac{d^2y}{dt^2} + z + y = 0$$

$$\frac{dz}{dt} + \frac{dy}{dt} = 0$$

condiciones iniciales $y(0) = 0, y'(0) = 0, z(0) = 1$

Transformada de Laplace del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$(s^2 + 1)Y(s) + Z(s) = 0$$
$$sZ(s) + sY(s) = 1$$

En su forma matricial

$$\begin{bmatrix} s^2 + 1 & 1 \\ s & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(s) \\ Z(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales usando Laplace

Resolviendo el sistema anterior por Cramer:

$$\Delta = \begin{bmatrix} s^2+1 & 1 \\ s & s \end{bmatrix} = s(s^2+1) - s = s^3$$

$$\Delta_Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & s \end{bmatrix} = -1$$

$$\Delta_Z = \begin{bmatrix} s^2+1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix} = s^2+1$$

La solución del sistema de ecuaciones

$$Y(s) = \frac{-1}{s^3}, \qquad Z(s) = \frac{s^2+1}{s^3} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}$$

La transformada inversa de $Y(s)$ y $Z(s)$

$$y(t) = -\frac{1}{2}t^2 \qquad\qquad z(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2$$

Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales usando Laplace

Obtener la solución de la ecuación diferencial mediante Laplace

$$\frac{dx}{dt} - 4y = 1$$

$$\frac{dy}{dt} + x = 2$$

Condiciones iniciales $x(0) = 0, \;\; y(0) = 0$

Transformada de Laplace del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$sX(s) - 4Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$X(s) + sY(s) = \frac{2}{s}$$

Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales usando Laplace

Su forma matricial

$$\begin{bmatrix} s & -4 \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/s \\ 2/s \end{bmatrix}$$

Realizando los determinantes correspondientes:

$$\Delta = \begin{bmatrix} s & -4 \\ 1 & s \end{bmatrix} = s^2 + 4 \qquad \Delta_X = \begin{bmatrix} 1/s & -4 \\ 2/s & s \end{bmatrix} = 1 + \frac{8}{s} = \frac{s+8}{s}$$

$$\Delta_Y = \begin{bmatrix} s & 1/s \\ 1 & 2/s \end{bmatrix} = 2 - \frac{1}{s} = \frac{2s-1}{s}$$

Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales usando Laplace

La solución para $X(s)$

$$X(s) = \frac{s+8}{s(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4} = \frac{2}{s} + \frac{-2s+1}{s^2+4} = \frac{2}{s} - 2\left(\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{4}\frac{2}{s^2+4}\right)$$

Aplicando la transformada inversa

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}(X(s)) = 2 - 2\cos(2t) + \frac{1}{2}sen(2t)$$

La solución para $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{2s-1}{s(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4} = \frac{-1/4}{s} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)s+2}{s^2+4} = -\frac{1}{4}\frac{1}{S} + \frac{1}{4}\left(\frac{s}{s^2+4} + 4\frac{2}{s^2+4}\right)$$

Aplicando la transformada inversa

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(Y(s)\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos(2t) + 2sen(2t)$$

Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales usando Laplace

Obtener la solución de la ecuación diferencial mediante Laplace

$$\frac{dx}{dt} = x - 2y$$

$$\frac{dy}{dt} = 5x + y$$

Condiciones iniciales $x(0) = 1, \quad y(0) = -2$

Transformada de Laplace del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$sX(s) - 1 = \mathrm{X(s)} - 2Y(s)$$

$$sY(s) + 2 = 5X(s) + \mathrm{Y(s)}$$

Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales usando Laplace

Su forma matricial

$$\begin{bmatrix} s-1 & 2 \\ -5 & s-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Realizando los determinantes correspondientes:

$$\Delta = \begin{bmatrix} s-1 & 2 \\ -5 & s-1 \end{bmatrix} = s^2 - 2s + 10 \qquad \Delta_X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & s-1 \end{bmatrix} = s + 3$$

$$\Delta_Y = \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} = -2s + 7$$

Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales usando Laplace

La solución para $X(s)$

$$X(s) = \frac{s+3}{s^2-2s+11} = \frac{s+3}{(s-1)^2+10} = \frac{s-1}{(s-1)^2+10} + \frac{4}{(s-1)^2+10}$$

Aplicando la transformada inversa

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-1}{(s-1)^2+10}\right) + \frac{4}{\sqrt{10}}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sqrt{10}}{(s-1)^2+10}\right)$$

Aplicando el teorema de corrimiento

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+10}\right)_{s\to(s-1)} + \frac{4}{\sqrt{10}}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sqrt{10}}{s^2+10}\right)_{s\to(s-1)}$$

$$x(t) = e^t\cos\left(\sqrt{10}t\right) + \frac{2\sqrt{10}}{5}e^t\, sen\left(\sqrt{10}t\right)$$

Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales usando Laplace

La solución para $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{-(2s-7)}{s^2-2s+11} = \frac{-2\left(s-\frac{7}{2}\right)}{(s-1)^2+10} = -2\left(\frac{s-1-\frac{5}{2}}{(s-1)^2+10}\right)$$

$$Y(s) = -2\left(\frac{s-1}{(s-1)^2+10} - \frac{5/2}{(s-1)^2+10}\right)$$

Aplicando la transformada inversa

$$y(t) = -2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-1}{(s-1)^2+10}\right) + \frac{5}{\sqrt{10}}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sqrt{10}}{(s-1)^2+10}\right)$$

Aplicando el teorema de corrimiento

$$y(t) = -2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+10}\right)_{s\to(s-1)} + \frac{\sqrt{10}}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sqrt{10}}{s^2+10}\right)_{s\to(s-1)}$$

$$y(t) = -2e^t\cos\left(\sqrt{10}t\right) + \frac{\sqrt{10}}{2}e^t\,sen\left(\sqrt{10}t\right)$$

Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales usando Laplace

Obtener la solución de la ecuación diferencial mediante Laplace

$$\frac{dx}{dt} = x - y$$

$$\frac{dy}{dt} = x$$

Condiciones iniciales $x(0) = 0, \;\; y(0) = 1$

Transformada de Laplace del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$sX(s) - 0 = \mathrm{X(s)} - Y(s)$$

$$sY(s) - 1 = X(s)$$

Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales usando Laplace

Su forma matricial

$$\begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Realizando los determinantes correspondientes:

$$\Delta = \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} = s^2 - s + 1 \qquad \Delta_X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & s \end{bmatrix} = -1$$

$$\Delta_Y = \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = s - 1$$

Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales usando Laplace

La solución para $X(s)$

$$X(s) = \frac{-1}{s^2 - s + 1} = \frac{-1}{\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

Aplicando la transformada inversa

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1}{\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)$$

Aplicando el teorema de corrimiento

$$x(t) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{s^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)_{s \to s - 0.5} = \frac{-2}{\sqrt{3}} e^{0.5t} sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$$

Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales usando Laplace

La solución para $Y(s)$

$$Y(s)=\frac{s-1}{s^2-s+1}=\frac{s-1}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{s-1/2}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}-\frac{1/2}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

Aplicando la transformada inversa

$$y(t)=\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-1/2}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)-\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)$$

Aplicando el teorema de corrimiento

$$y(t)=\ \mathcal{L}^{-1}-\left(\frac{s}{s^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)_{s\to(s-0.5)}\quad\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{s^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)_{s\to(s-0.5)}$$

Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales usando Laplace

Aplicando el teporema de corrimiento la solución $y(t)$ queda definida por:

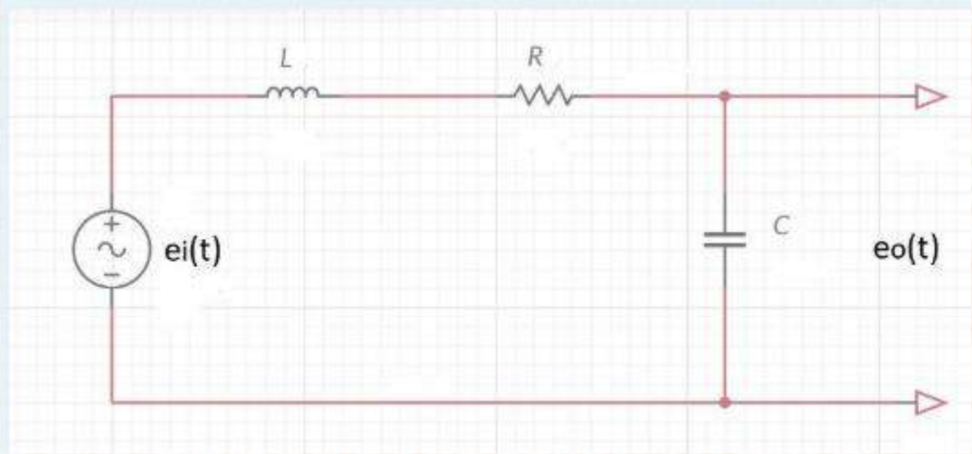
$$y(t) = e^{0.5t}cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{0.5t}sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

Factorizando la función exponencial

$$y(t) = e^{0.5t}\left(cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$$

Aplicación de Laplace a la solución de problemas de circuitos eléctricos

Determinar el voltaje de salida en las terminales del capacitor $e_0(t)$ en el siguiente circuito para el voltaje de entrada indicado $e_i(t)$. Los parámetros del circuito son: $R = 3$, $L = 1H$, $C = 0.5F$ y $e_i(t) = 2sen(2t)$. Suponga condiciones iniciales igual a cero.



Aplicación de Laplace a la solución de problemas de circuitos eléctricos

La ecuación diferencial que modela al circuito eléctrico de acuerdo a la Ley de voltajes De Kirchhoff

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{Cs}\int i(t)dt = e_i(t)$$

Sustituyendo parámetros

$$3i(t) + \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{0.5s}\int i(t)dt = 2\mathrm{sen}(2\mathrm{t})$$

Aplicando Laplace

$$3I(s) + sI(s) + \frac{2}{s}I(s) = \frac{2\sqrt{2}}{s^2+4}$$

Aplicación de Laplace a la solución de problemas de circuitos eléctricos

Despejando $I(s)$

$$I(s) = \frac{2\sqrt{2}s}{(s^2+4)(s^2+3s+2)}$$

La salida deseada

$$E_0(s) = \frac{1}{0.5s} I(s) = \frac{1}{0.5s} \frac{2\sqrt{2}s}{(s^2+4)(s^2+3s+2)} = \frac{4\sqrt{2}}{(s^2+4)(s^2+3s+2)}$$

Donde

$$e_o(t) = 4\sqrt{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+4)(s^2+3s+2)}\right\} = 4\sqrt{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+4)(s+1)(s+2)}\right\}$$

Aplicación de Laplace a la solución de problemas de circuitos eléctricos

Aplicando descomposición por fracciones parciales

$$\frac{1}{(s^2+4)(s^2+3s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{Cs+D}{s^2+4}$$

El sistema de ecuaciones lineales

$$A + B + C = 0$$

$$2A + B + 3C + D = 0$$

$$4A + 4B + 2C + 3D = 0$$

$$8A + 4B + 2D = 1$$

La solución del sistema de ecuaciones lineales $A = \frac{1}{5}, B = -\frac{1}{8}, C = -\frac{3}{40}, D = -\frac{1}{20}$

Aplicación de Laplace a la solución de problemas eléctricos y mecánicos

La salida puede expresarse por

$$e_o(t) = 4\sqrt{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/5}{s+1} + \frac{-1/8}{s+2} - \frac{(3/40)s + 1/20}{s^2+4}\right\}$$

El tercer término se descompone en dos términos como se muestra a continuación

$$e_o(t) = 4\sqrt{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/5}{s+1} + \frac{-1/8}{s+2} - \left(\frac{3}{40}\right)\left(\frac{s}{s^2+4} + \frac{2/3}{s^2+4}\right)\right\}$$

Todos los términos en la forma estándar

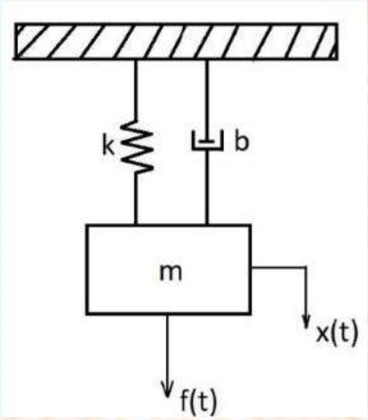
$$e_o(t) = 4\sqrt{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/5}{s+1} + \frac{-1/8}{s+2} - \left(\frac{3}{40}\right)\frac{s}{s^2+4} - \left(\frac{1}{20}\right)\frac{1}{s^2+4}\right\}$$

Se aplica la tranformada inversa de Laplace para obtener la solución en
El tiempo

$$e_o(t) = \frac{4\sqrt{2}}{5}e^{-t} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-2t} - \frac{3\sqrt{2}}{10}\cos(2\mathrm{t}) - \frac{\sqrt{2}}{5}\operatorname{sen}(2t)$$

Aplicación de Laplace a la solución de problemas mecánicos

Un sistema masa resorte amortiguador tiene los siguientes parámetros:$k = \frac{1N}{m},\ b = \frac{1Ns}{m}, masa = 1kg$ y a la masa se le aplica una fuerza $f(t) = t$. Determine la ecuación de movimiento $x(t)$ usando Laplace. Suponga condiciones iniciales igual a cero.



Aplicación de Laplace a la solución de problemas mecánicos

El modelo del sistema mecánico

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = t$$

Aplicando Laplace

$$(s^2 + s + 1)X(s) = \frac{1}{s^2}$$

Despejando $X(s)$

$$X(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + s + 1)}$$

Aplicando descomposición por fracciones parciales

$$X(s) = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{Cs + D}{s^2 + s + 1}$$

Aplicación de Laplace a la solución de problemas mecánicos

Determinando los valores $A = 1, B = -1, C = 1$ y $D = 0$, por lo tanto:

$$X(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{s}{(s+0.5)^2 + 3/4}$$

Poniendo cada término es su forma estándar

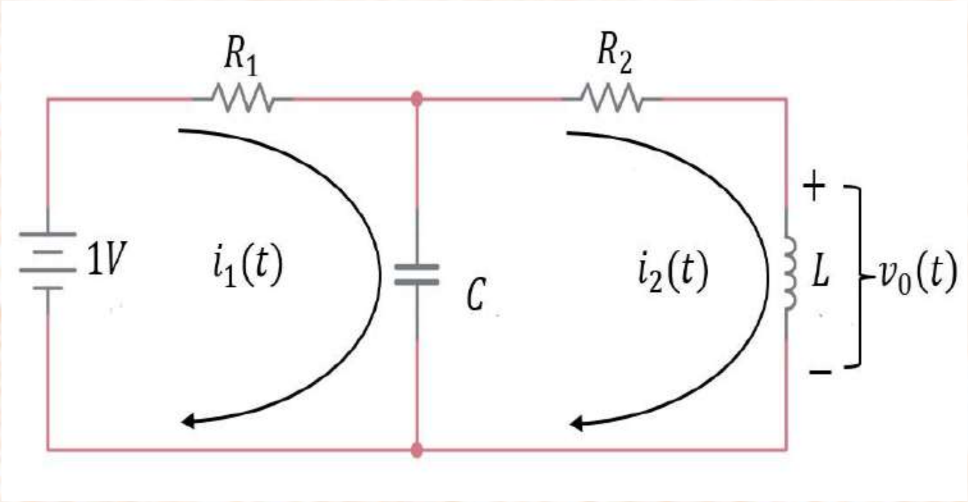
$$X(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{s+0.5}{(s+0.5)^2 + \frac{3}{4}} - \frac{0.5}{(s+0.5)^2 + \frac{3}{4}}$$

Aplicando la transformada inversa determinamos la ecuación de movimiento de la masa:

$$x(t) = t - 1 + e^{-0.5t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-0.5t}sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales usando Laplace en circuitos eléctricos

Determine el voltaje de salida $v_0(t)$ en el inductor, suponer condiciones iniciales igual a cero, esto es $i_1(0) = 0, i_2(0) = 0.$ $R_1 = 1\Omega, R_2 = 5\Omega, L = 1H\ y\ C = \frac{1}{3}F.$



Ecuación de la malla 1

$$-1 + R_1 i_1 + \frac{1}{C}\int (i_1 - i_2)dt = 0$$

Ecuación de la malla 2

$$\frac{1}{C}\int (i_2 - i_1)dt + R_2 i_2 + L\frac{di_2}{dt} = 0$$

Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales usando Laplace en circuitos eléctricos

Aplicando Laplace a la ecuaciones integro-diferenciales del circuito

Malla 1 $$R_1 I_1(s) + \frac{1}{Cs}\left(I_1(s) - I_2(s)\right) = \frac{1}{s}$$

Malla 2 $$\frac{1}{Cs}\left(I_2(s) - I_1(s)\right) + R_2 I_2(s) + LsI_2(s) = 0$$

Agrupando términos comunes

$$\left(R_1 + \frac{1}{Cs}\right) I_1(s) - \frac{1}{Cs} I_2(s) = \frac{1}{s}$$

$$-\frac{1}{Cs} I_1(s) + \left(Ls + R_2 + \frac{1}{Cs}\right) I_2(s) = 0$$

Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales usando Laplace en circuitos eléctricos

Sustituyendo valores de los parémetros resistencias, inductancia y capacitor

Malla 1 $$\left(1+\frac{3}{s}\right)I_1(s)-\frac{3}{s}I_2(s)=\frac{1}{s}$$

Malla 2 $$-\frac{3}{s}I_1(s)+\left(s+5+\frac{3}{s}\right)I_2(s)=0$$

Despejando $I_1(s)$ de la ecuación de la malla 2 y sustituimos en la ecuación de la Malla 2

$$I_1(s)=\frac{1}{3}(s^2+5s+3)I_2(s)$$

$$\left(1+\frac{3}{s}\right)\frac{1}{3}(s^2+5s+3)I_2(s)-\frac{3}{s}I_2(s)=\frac{1}{s}$$

Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales usando Laplace en circuitos eléctricos

Realizando los productos

$$\frac{1}{3}(s^2+5s+3)I_2(s)+\frac{1}{s}(s^2+5s+3)I_2(s)-\frac{3}{s}I_2(s)=\frac{1}{s}$$

Agrupando términos de $I_2(s)$

$$(s^2+8s+18)I_2(s)=\frac{3}{s}\ ,$$ Despejando $I_2(s)$, $$I_2(s)=\frac{3}{s(s^2+8s+18)}$$

El voltaje en el inductor está definido por:

$$v_0(t)=L\frac{di_2(t)}{dt}$$ Aplicando Laplace $$V_0(s)=LsI_2(s)$$

Como $L=1H$, Entonces $$V_0(s)=sI_2(s)$$

Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales usando Laplace en circuitos eléctricos

Por lo tanto: $V_0(s) = s\left(\frac{3}{s(s^2+8s+18)}\right) = \frac{3}{s^2+8s+18}$

Aplicamos la transformada inversa de Laplace a la ecuación anterior

$$v_0(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s^2+8s+18}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{(s+4)^2+2}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{(s+4)^2+2}\right)$$

La respuesta es una función senoidal amortiguada exponencialmente

$$v_0(t) = \frac{3}{\sqrt{2}}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right)_{s\to(s+4)} = \frac{3}{\sqrt{2}}e^{-4t}sen(\sqrt{2}t)$$

REFERENCIAS O BIBLIOGRAFÍA

Coddington, E. A. (2012). *An introduction to ordinary differential equations*. Courier Corporation.

Ross, S. (2021). Introduction to ordinary differential equations.

Zill, D. G., Hernández, A. E. G., & López, E. F. (2002). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado* (No. 970-686-487-3.). México: Thomson Learning.

Zill, D. G. (2012). Matemáticas avanzadas para ingeniería.

Zill, D. G., Cullen, M. R., Hernández, A. E. G., & López, E. F. (2002). *Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera*. Thomson.

OTRAS FUENTES DE CONSULTA

WolframAlpha, Ejemplos de ecuaciones diferenciales, https://es.wolframalpha.com/examples/mathematics/differential-equations. Último Acceso: 1 de junio 2023.

MathWorks, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, https://la.mathworks.com/help/matlab/ordinary-differential-equations.html. Último Acceso: 1 de junio 2023.

MathWorks, transformada inversa de Laplace, https://la.mathworks.com/help/symbolic/sym.ilaplace.html. Último Acceso: 1 de junio 2023.

MathWorks, Laplace, https://la.mathworks.com/help/symbolic/sym.laplace.html. Último Acceso: 1 de junio 2023.

REFLEXIÓN

Este material es elaborado con la finalidad repasar la metodología para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias usando la transformada de Laplace. Es importante para resolver problemas de circuitos eléctricos conocer los fundamentos de circuitos eléctricos como voltajes, corrientes y cargas en los elementos pasivos como resistor, inductor y capacitor. Para los sistemas mecánicos traslacionales es importante conocer la aplicación de la segunda Ley de Newton. Se abordan diferentes ejemplos donde se resuelven sistemas de ecuaciones diferenciales donde resulta importante conocer la solución de sistemas de ecuaciones lineales de forma simbólica usando la regla de Cramer. Otro punto importante que se necesita saber, son las descomposiciones por fracciones parciales para los diferentes casos de raíces diferentes, raíces es múltiples y complejas conjugadas. El objetivo final de la aplicación de estas técnicas es básicamente predecir el comportamiento de estos sistemas dinámicos en ingeniería donde aquí se está proporcionando un enfoque analítico aplicando la transformada de Laplace.

Por su atención …

Gracias

Información de contacto

Nombre del contacto: Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Área Académica de Ingeniería y Arquitectura
Teléfono: (+52) 771 717-2000 ext. 4007
Correo electrónico: nhromero@uaeh.edu.mx